АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

7125 - 12348

№ 7 — 10 1960
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga,
Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

JOHNSON REPRINT COMPANY LIMITED
Berkeley Square House, London, W. 1

First reprinting, 1965, Johnson Reprint Corporation
Printed in the United States of America

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

QA
1
A373
1960
no.7-10

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

7125—8451

*

Referativnyi zhurnal. Matematika

№ 7 1960

ПРОИЗВОДСТВЕННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ КОМБИНАТ ВИНИТИ

МОСКВА

81a768

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

ИНСТИТУТА НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ДИРЕКТОР ИНСТИТУТА профессор *А. И. Михайлов*

ГЛАВНЫЕ РЕДАКТОРЫ СЕРИЙ: член-корреспондент АН СССР *Н. В. Агеев* (Металлургия), канд. биол. наук *В. П. Доброхвалов* (Биология), профессор *Е. Е. Захаров* (Геология, Горное дело), профессор *С. М. Лисичкин* (Экономика промышленности), профессор *С. М. Никольский* (Математика), профессор *К. Ф. Огородников* (Астрономия и геодезия), профессор *Ю. Г. Саушкин* (География), академик *Л. И. Седов* (Механика), *В. В. Серпинский* (Химия), профессор *Б. М. Тареев* (Электротехника), канд. техн. наук *В. З. Фрейдберг* (Машиностроение), профессор *И. А. Хвостиков* (Геофизика), профессор *Э. В. Шпольский* (Физика)

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Персоналия 1
Преподавание математики 2
Основания математики и математическая логика . . . . . —
Теория чисел 4
Алгебра 9
Многочлены и линейная алгебра 10
Группы 13
Поля, кольца и структуры 18
Алгебраическая теория схем связи и управления 22
Топология 28
Теория функций действительного переменного 34
Теория множеств 38
Приближение функций полиномами и их обобщениями 40
Теория функций комплексного переменного 45
Дифференциальные уравнения 80
Обыкновенные дифференциальные уравнения 80
Уравнения в частных производных 96
Приложения к физике, технике и естественным наукам 116
Интегральные уравнения 127
Вариационное исчисление 129
Анализ (другие вопросы) 132
Числовые ряды 135
Специальные функции 137
Интегральные преобразования и операционное исчисление 139
Приложения общих методов математического анализа 141
Функциональный анализ 143
Теория вероятностей 160
Математическая статистика 174
Теория игр, исследование операций и математическая экономика 180
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 185
Геометрия 195
Приложения геометрии 195
Элементарная геометрия 196
Аналитическая геометрия 199
Проективная и неевклидовы геометрии 200
Начертательная геометрия 202
Алгебраическая геометрия 203
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 205
Геометрия n-мерного пространства 208
Теория относительности 213
Глобальная теория дифференцируемых многообразий 214
Метрические методы в геометрии 216
Выпуклые многообразия 220
Численные и графические методы 221
Таблицы 230
Вычислительные машины и математические приборы 232
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике 242
Авторский указатель 245

Адрес редакции: Москва Д-219, Балтийская ул., 14

REFERATIVNYI ZHURNAL

INSTITUTE OF SCIENTIFIC INFORMATION OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE USSR

DIRECTOR OF THE INSTITUTE professor *A. I. Mikhailov*

CHIEF EDITORS OF THE SECTIONS: Corresponding Member of the A. S., USSR *N. V. Ageev* (Metallurgy), Candidate of Biological Sciences *V. P. Dobrokhvalov* (Biology), Professor *E. E. Zakharov* (Geology, Mining), Professor *S. M. Lisichkin* (Economics of Industry), Professor *S. M. Nikolsky* (Mathematics), Professor *K. F. Ogorodnikov* (Astronomy and Geodesy), Professor *Yu. G. Saushkin* (Geography), Academician *L. I. Sedov* (Mechanics), *V. V. Serpinsky* (Chemistry), Professor *B. M. Tareev* (Electrical Engineering), Candidate of Technical Sciences *V. Z. Freidberg* (Machine Building), Professor *I. A. Khvostikov* (Geophysics), Professor *E. V. Shpolsky* (Physics)

CONTENTS

General 1
History. Personalia 1
Teaching of mathematics 3
Foundations. Mathematical logic 4
Theory of numbers 9
Algebra 10
Polynomials, linear algebra 13
Groups 18
Fields, rings, lattices 26
Algebraic theory of communication and control circuits 28
Topology 34
Theory of functions of real variables 38
Theory of sets 40
Approximations of functions by polynomials and by their generalizations 45
Theory of functions of complex variables 80
Differential equations 80
Ordinary differential equations 96
Partial differential equations 116
Applications to physics, technology and natural sciences 127
Integral equations 129
Calculus of variations 132
Analysis (other aspects) 135
Numerical series 137
Special functions 139
Integral transforms, operational calculus 141
Applications of general methods of mathematical analysis 143
Functional analysis 160
Theory of probability 174
Mathematical statistics 180
Theory of games, operational research, mathematical economics 185
Applications of probabilities and statistical methods 195
Geometry 195
Applications of geometry 196
Elementary geometry 199
Analytical geometry 200
Projective and non-euclidean geometries 202
Descriptive geometry 203
Algebraic geometries 205
Differential geometry of 3-dimensional space 208
Geometry of *n*-dimensional space 213
Theory of relativity 214
Global theory of differentiable manifolds 216
Metric methods in geometry 220
Convex manifolds 221
Numerical and graphical methods 230
Tables 232
Computers and mathematical devices 242
Application of computer devices 245
Author index 245

Editorial Office: Moscow D-219, Baltijskaya ulitsa, 14

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР профессор *С. М. Никольский*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: академик *П. С. Александров*, академик *И. Н. Векуа*, академик *А. Н. Колмогоров*, член-корреспондент АН СССР *Ю. В. Линник*, профессор *А. И. Маркушевич*, профессор *М. А. Наймарк*, профессор *В. В. Немыцкий*, академик *П. С. Новиков*, профессор *Д. Ю. Панов* профессор *К. А. Рыбников*, член-корреспондент АН СССР *Н. В. Смирнов*, профессор *С. П. Фиников*

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ канд. физ.-матем. наук *А. А. Конюшков*

Рефераты 7125—8451 **№ 7** **Июль 1960 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

Редактор *К. А. Рыбников*

7125. Взгляд в завтра нашей науки. Несмеянов А., Газ. «Известия», 1960, 1 янв., стр. 3.

7126. Второй Всесоюзный коллоквиум по общей алгебре, Москва, 3-6 февр. 1958 г. Успехи матем. наук, 1959, 14, № 5, 197—237

7127. Конференция по теории и применению дискретных автоматических систем. Москва, 1958 г. (Конференція до теорії і використанню дискретних автоматичних систем, Москва, 1958 р.), Автоматика (Київ), 1959, № 1, 93—94 (укр.)

7128. Годичное собрание Общества прикладной математики и механики в Ганновере (19-23 мая 1959 г.). (Wissenschaftliche Jahrestagung der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik in Hannover (19.-23. Mai 1959). Z. angew. Math. und Mech., 1959, 39, № 9-11, 337—453 (нем.)

7129. Резюме докладов, заявленных Правлению Московского математического общества и принятых Правлением. Успехи матем. наук, 1959, 14, № 5, 156—166

7130. О некоторых общих вопросах кибернетики. Ляпунов (Despre unele probleme generale ale cibernetică. Leapunov A. A.), An. Rom.-Sov. Ser. mat.-fis., 1959, 13, № 3, 10—28 (рум.)

Перевод с русского (РЖМат, 1960, 2555)

7131. Науки о коммуникациях в обстановке университетов. Уиснер (Communication sciences in a university environment. Wiesner J. B.), IBM J. Res. and Developm., 1958, 2, № 4, 268—275 (англ.)

Обзор современного состояния и перспектив наук о коммуникациях (Communication Sciences). Под этим термином автор подразумевает комплекс вопросов, близкий к называемому часто кибернетикой. Обсуждаются связи наук о коммуникациях с другими науками, в том числе с математикой. Рассматривается вопрос о разделении функций между университетами и промышленными лабораториями. Дается обзор достижений центра по наукам о коммуникациях Массачусетского технологического института. Р. Л. Добрушин

7132. Категория вероятности. Смирнов Л. В., Вопр. философии, 1958, № 12, 80—89

Новая редакция ранее опубликованной статьи автора (РЖМат, 1958, 9409). Более подробно рассмотрены философские вопросы: вероятность и возможность, вероятность и причинность, связь и различие между понятием вероятности, рассматриваемой в математике, и философской категорией вероятности и др. Л. Е. Майстров

7133. Философское содержание и значение теории относительности. Александров (Conținutul filozofic și însemnătatea teoriei relativității. Aleksandrov A. D.), An. Rom.-Sov. Ser. mat.-fiz., 1959, 13, № 3, 125—152 (рум.)

Перевод с русского (Вопросы философии, 1959, № 1).

7134 К. О физических и математических связях. Ортнер (Über physikalische und mathematische Abhängigkeit. Umrisse einer neuen Analyse. 2. erw. Aufl. Orthner R. Wien, Deuticke, 1959, VII, 60 S., ill., 30.—Sch.) (нем.)

7135 К. История и деятельность Индийского статистического института за 1931—1956 гг. (History and activities. Indian Statist. Inst. 1931—1956. Calcutta, 1956, 50 pp.) (англ.)

Обзор деятельности Индийского статистического института (Калькутта) за 1931—1956 гг. Приложен список работ, опубликованных сотрудниками института.

7136 К. Годовой отчет Индийского статистического института. Апрель 1956—Март 1957. (Annual report. Indian statistical institute. April 1956—March 1957. Calcutta, s. a., 90 pp.) (англ.)

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. ПЕРСОНАЛИЯ

7137. Приемы быстрого счета в древнем Китае. Сюй Чунь-фан. Шусюэ цзяосюэ, Shuxue jiaoxue, 1958, № 8, 1—4 (кит.)

Рассказывается о приемах быстрого счета при умножении и делении (например, на 5, 16 и т. д. и более сложные приемы), которые были разработаны древнекитайскими математиками в применении к счетному прибору. Автор рассмотрел материалы сочинения V—VI вв. н. э. «Сяхоу Ян суаньцзин» (Математический трактат Сяхоу Яна), одного из произведений классического Десятикнижья по математике, а также сочинения математика XIII в. Ян Хуэя, который систематизировал и обобщил подобные приемы, накопленные в результате богатой вычислительной практики древних китайцев.

Э. И. Березкина

7138. Мои заметки о Тартальe. Альварес-Ласо (Mis recuendos de Tartaglia. Alvarez Laso José), Rev. mat., 1958, № 3, 27—38 (исп.)

Статья содержит, кроме общеизвестных сведений, обзор некоторых сочинений Тартальи (1499—1557). В 1537 году вышла первая книга Тартальи La Nuova

Scientia, посвященная баллистике, в которой между прочим имеется утверждение, что максимальная длина выстрела получается при угле возвышения в 45°. В 1546 году вышло его второе сочинение Delle quesiti ed inventione diverse («О различных задачах и изобретениях»), первые три книги которого посвящены баллистике и артиллерии, четвертая — войсковым построениям, пятая — топографии, три следующих — фортификации и статистике и последняя (девятая) — теоретической математике (арифметика, геометрия и алгебра).

Последнее произведение Тартальи, вышедшее частично после его смерти: Trattato di numeri et misure (1556—1560). Первая книга посвящена практической арифметике, вторая — теоретической (в ней между прочим содержится треугольник Паскаля, дающий разложение бинома вплоть до 17-й степени). Третья книга содержит элементарную геометрию, причем Евклид отождествляется с однофамильцем — известным мегарским философом; в четвертой книге излагается содержание книг Архимеда о сфере и цилиндре. Пятая книга посвящена геометрическим построениям. Шестая, не отредактированная полностью автором, излагает алгебру, кончая квадратными уравнениями. Примечательно, что теория кубических уравнений не нашла места в этом сочинении. И. Н. Веселовский

7139. Математические труды Декарта, 1596—1650, в свете науки его эпохи и в свете современной математики. Глоден (L'oeuvre mathématique de Descartes, 1596—1650, dans le cadre de la science de son époque et à la lumière des mathématiques modernes. Gloden Albert. Cahiers luxembourgeois, 1955, **27**, № 6, 243—250) (франц.)

7140. Итальянские математики последнего столетия объединенной Италии. Трикоми (Matematici italiani del primo secolo dell'Italia unita. Tricomi Francesco G.), Boll. Unione mat. ital., 1957, **12**, № 4, 678—679 (итал.)

Сообщение о готовящемся выпуске справочника кратких сведений об итальянских математиках, умерших после 1861 года. И. Н. Веселовский

7141. Пеано и судьбы логики в Италии. Жемона (Peano e le sorti della logica in Italia. Geymonat Ludovico), Boll. Unione mat. ital., 1959, **14**, № 1, 109—118 (итал.)

В статье, посвященной выходу 2-го тома «Избранных сочинений» Джузеппе Пеано, содержащего работы по математической логике и универсальному языку, автор говорит об упадке математической логики в Италии. Причины этого он находит: 1) в общем «кризисе оснований», который переживает современная наука, 2) в кажущемся противоречии между формальной и математической логиками, которые в действительности представляют лишь различные фазы развития одной и той же дисциплины, как евклидова и неевклидова геометрии, 3) в конвенционализме (условности) логических суждений. Автор надеется, что в ближайшем будущем эти трудности будут побеждены. И. Н. Веселовский

7142. Бертран Рассел. Айусо (Bertrand Russell. Ayuso Arturo), Gac. mat., 1958, **10**, № 3-4, 71—75 (исп.)

Воспроизводятся факты биографии Б. Рассела и сведения об основных его работах. Высказана мысль, что современная логистика ведет свое начало от Ars Magna Раймундо Луллия через Лейбница до Моргана, Буля, Пирса, Пеано и, наконец, до Principia Mathematica Рассела и Уайтхеда. Разъяснены идеи Рассела относительно обоснования математики. В качестве примера автор рассматривает трактовку Расселом понятия числа. И. Н. Веселовский

7143. Аксиоматическое обоснование теории множеств в работах Нёймана. Хайнал (Neumann János axiomatikus halmazelméleti munkásságáról. Hajnal András), Mat. lapok, 1959, **10**, № 1-2, 5—11 (венг.)

Излагается история аксиоматического обоснования теории множеств и ее связь с работами Нёймана. Приводится нёйманова система аксиом теории множеств, указаны ее недостатки, дано аксиоматическое обоснование мощности. А. А. Бовди

7144. Исторические заметки об испытании Вилькоксоном двух непарных образцов. Краскал (Historical notes on the Wilcoxon unpaired two-sample test. Kruskal William H.), J. Amer. Statist. Assoc., 1957, **52**, № 279, 356—360 (англ.)

Статья является дополнением к работе: Kruskal William H., Wallis W. Allen. Use of ranks in one-criterion variance analysis, J. Amer. Statist. Assoc., 1952, **47**, 583—621; 1953, **48**, 907—911. Кратко рассматриваются исследования по непарным образцам Дойчлера (G. Deuchler). Приведены краткие биографические сведения о Дойчлере (1883—1955). Имеются указания на работы по данному вопросу Липмана (Lipmann), Уайтфилда (Whitfield), Джини (Gini) и Оттавиани (Ottaviani). Библ. 16 назв. Л. Е. Майстров

7145. Математические учебники А. Ю. Давидова, изданные в 70-х годах 19 века. Симонов Р. А., Сб. научн. тр. Всес. заочн. ин-та пищ. пром-сти, 1957 (1958), вып. 4, 160—188

Дополнение к статье автора «Педагогическое наследие профессора математики Московского университета А. Ю. Давидова» (Тр. Всес. заочн. ин-та пищевой промышленности, 1957, вып. 1). Рассматриваются учебники А. Ю. Давидова, изданные в 70-х годах XIX в.: «Руководство к арифметике», «Геометрия для уездных училищ» (с подзаголовком «Составлено по Дистервегу») и «Начала тригонометрии». С. И. Новоселов

7146. Н. И. Лобачевский и механика. Верхунов В. М., Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., химии, 1958, № 6, 77—89

Автор останавливается на лекциях Н. И. Лобачевского по механике, читавшихся им в 20-х годах XIX в. в Казанском университете. О содержании лекций автор судит по сохранившимся записям их студентами, относящимся к 1826/27 учебному году. Главное внимание здесь обращено на введение Лобачевским основных понятий механики: движения, пространства, времени, силы. Автор отмечает, что Лобачевский при обосновании механики исходил, в отличие от Ньютона и французских математиков XVIII в., «из тесной связи физической сущности явлений природы и абстракций, лежащих в основе точного естествознания». При этом автор ссылается также на отдельные места из «Новых начал геометрии» Лобачевского. Вторая половина статьи посвящена теории сложения сил, причем автор подробно разбирает аналитические методы, не использующие постулата о параллельных и могущие быть обобщенными на неевклидовы пространства. Указываются некоторые исторические этапы построения механики в неевклидовых пространствах, упоминаются, в частности, работы Клиффорда и А. П. Котельникова. Библ. 29 назв. Г. К. Михайлов

7147. Очерк истории развития чертежных инструментов. Каргин Д. И., Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР, 1959, **25**, 270—310

7148. Анатолий Иванович Мальцев (род. 1909). (К пятидесятилетию со дня рождения). Курош А. Г., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 6, 203—211

7149. Памятная заметка об Эрхарде Шмидте (1876—1959). Жюлиа (Notice nécrologique sur Erhard Schmidt, correspondant de l'Académie. Julia Gaston), C. r. Acad. sci., 1959, **249**, № 25, 2676—2677 (франц.)

ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ

7150. Дидактические аспекты оснований математики. Риддер (Grondslagen der wiskunde didactische aspecten. Ridder J.), Faraday, 1958, 28, № 2, 14—21 (гол.)

7151. Фаркаш Бойаи — предшественник современной математической дидактики. Кёньвеш-Тот (Bolyai Farkas, a matematika modern didaktikájának előfutára. Könyves Tóth Kalmán), Mat. lapok, 1959, 10, № 1—2, 12—22 (венг.)

Излагается дидактическая система преподавания венгерского математика Ф. Бойаи. На конкретных примерах, взятых из его учебника «Арифметика», демонстрируются его дидактические принципы. А. А. Бовди

7152. Обсуждение содержания новых программ по математике. Матем. в школе, 1959, № 2, 5—20

Под общим заголовком помещены 6 статей следующих авторов: 1) Е. С. Березанская, Г. Б. Гуревич, А. П. Дицман, 2) П. А. Буданцев, 3) В. Г. Куколев, 4) С. Е. Ляпин, 5) Методическая секция Уральского математического общества и Кабинет математики Свердловского Областного института усовершенствования учителей, 6) Н. А. Принцев. Все статьи помещены в порядке обсуждения вопросов, поставленных в статье В. Г. Ашкинузе, В. И. Левина и А. Д. Семушина «О перестройке программ по математике в свете новых задач средней школы». (РЖМат, 1959, 10691). Авторы поддерживают следующие общие положения: выделить в программе моменты, имеющие наибольшее общеобразовательное и прикладное значение (статья 1); устранить перегрузку учащихся учебным материалом (1, 3, 6); программа восьмилетней школы должна обеспечить в известной мере законченный круг элементарных математических знаний (1, 5); облегчить курс геометрии для восьмилетней школы, усилив в нем роль интуитивного начала с осторожным и постепенным введением элементов дедукции; включить в курс геометрии VIII класса стереометрический материал (1,2); включить в программу элементы приближенных вычислений (1, 2, 3, 5, 6), в связи с последним желательно ознакомление учащихся восьмилетней школы с применением логарифмической линейки (1, 4, 5); органическое проникновение в школьный курс математики идеи функциональной зависимости и применение графических методов (2, 3). В отношении практической реализации выдвинутых общих положений авторы статей высказывают различные мнения и критические замечания. Точки зрения в ряде случаев оказываются противоположными. Так, соглашаясь с предложением усилить внимание к десятичным дробям, некоторые авторы возражают против предложения изучать сначала десятичные дроби, а затем простые (1, 2), а некоторые соглашаются с этим предложением (5). Соглашаясь с предложением включить в курс восьмилетней школы некоторые сведения по стереометрии, ряд авторов возражает против рассмотрения вопросов о взаимном расположении прямых и плоскостей в пространстве (1, 2, 5). Высказывается возражение против упразднения тригонометрии как самостоятельного учебного предмета (3). Отмечается, что вопросы чисто алгебраические в проекте программы не получают должного освещения (отсутствует понятие комплексного числа, более глубокие сведения о решении уравнений, вопросы делимости многочленов), что исключены вопросы комбинаторики (1). По поводу введения элементов математического анализа высказывается мнение, что если вводить понятие производной, то целесообразно дать и понятие интеграла, которое найдет применение при вычислении площадей и объемов (1, 4). Высказывается возражение против исключения из программы вопросов о равносильности уравнений и против тенденции отказаться от исследования уравнений и тождественных преобразований в зависимости от параметров и допустимых значений аргументов (2). Указывается на несоответствие в расположении тем «Последовательности и пределы» и «Длина окружности и площадь круга» (3). Высказывается мнение о целесообразности сначала изучать треугольники, а затем параллельные прямые (3). В целях облегчения программы предлагается из курса алгебры исключить свойства степеней с дробными и отрицательными показателями и действия над ними (5), ограничиться в восьмилетней школе лишь множеством рациональных чисел (2). Однако выдвигается и другое предложение: довести числовую область в восьмилетней школе до множества всех действительных чисел (3). Авторы статей высказывают соображения и по многим другим вопросам, связанным с содержанием программы и с расположением учебного материала. С. И. Новоселов

7153. Проект программ по математике восьмилетней школы, вечерней (сменной, сезонной, заочной) средней общеобразовательной школы и средней общеобразовательной трудовой политехнической школы с производственным обучением. Матем. в школе, 1959, № 4, 1—14

7154. Обзор и перспективы школ для инженеров-статистиков. Аояма (Review and prospects of the training school of statistical technicians. (Aoyama Hirojiro), Токэй сури кэнкюсё ихо, Proc. Inst. Statist. Math., 1954, 2, № 1, 7—9 (японск.)

7155 К. Математика для высшей школы. Альдеберт и др. (Mathematik für höhere Schulen. Bearb. Aldebert Hans et al. München, Bayer. Schulbuchverl., 1959) (нем.)

7156 К. Высшая математика. Ч. 1, 2. Божоров (Висша математика. Ч. I Божоров Ефтим. Наука и изкуство, 1958. 368 с., ил., 11.50 лв; Ч. 2. София, Техника, 1959, 367 с., ил., 11.50 лв.) (болг.) Българ. книгопис, 1958, 62. № 3, 7; 1959. 63, № 4, 8

7157 К. Справочник по математике. Для инженеров и учащихся втузов. Бронштейн, Семендяев (Taschenbuch der Mathematik. Für Ingenieure und Studenten d. Techn. Hochschulen. Bronstein I. N., Semendjajew K. A. Übers. aus dem Russ. Leipzig, Teubner, 1959, XII, 548 S., ill., 22.50 DM) (нем.) Перевод с русского (РЖМат, 1958, 8448 К).

7158 К. Сборник математических формул. 5-е изд. Бжоска, Барч (Mathematische Formelsammlung. 5. Aufl. Brzoska Franz, Bartsch Walter. Leipzig, Fachbuchverlag. 1959, X, 345 S., ill., 7.80 DM) (нем.)

7159 К. Введение в математику для студентов-экономистов. Льюис (An introduction to mathematics for students of economics. Lewis John Parry. London, Macmillan Co.; New York, St. Martin's Press, 1959, X, 394 pp., ill., 40 sh.) (англ.)

7160 К. Арифметика для Центральной Африки. Лей (Arithmetic for Central Africa. Lay Edward John Stanley. London, Macmillan Co., 1959, 5sh. Standard 5 teacher's book, 110 pp., ill. Standard 6 teacher's book, 112 pp., ill.) (англ.)

7161 К. Сборник задач по высшей математике. (Для втузов). Т. 2. 14 изд. Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О. М., Физматгиз, 1959, 286 стр., 6 р. 75 к.

7162 К. Введение в высшую математику. Для учащихся и для самообразования. Т. 2. Дифференциальное исчисление, бесконечные ряды, элементы дифференциальной геометрии и теории функций. Мангольдт (Einführung in die höhere Mathematik. Für Studierende und zum Selbststudium. Bd 2. Differentialrechnung, Unendliche Reihen, Elemente d. Differentialgeometrie und d. Funktionentheorie. 11. Aufl. Mangoldt H. von. Leipzig, Hirzel, 1959, XIV, 624 S., 22. — DM) (нем.)

Т 1. см. РЖМат, 1959, 9677 К.

7163 К. Курс высшей математики. Учебн. пособие. Маркович Э. С. Всес. заочн. финанс.-экон. ин-т, М., 1959, 372 стр., илл., 6 р. 90 к.

7164 К. Математические задачи для получения аттестата зрелости. Панерай (Problemi di matematica per la maturita scientifica. Avviamento alla risoluzione e alla discussione. 3a ed aum. Panerai Tullia. Firenze, F. Monnier, 1958, 143 p., ill., 400 L.) (итал.)

7165 К. Математические таблицы для составления и решения задач. Пособие для учителей средн. школы. Панкратов А. Л. М., Учпедгиз, 1959, 138 стр., илл., 2 р. 50 к.

7166 К. Высшая математика для студентов технических вузов. Ч. 1. Аналитическая геометрия с теорией векторов, дифференциальное исчисление и его применения. Романовский, Врона (Matematyka wyższa dla studiów technicznych. Cz. 1. Geometria analityczna z teorią wektorów, rachunek różniczkowy i zastosowania. Romanowski Świętosław, Wrona Włodzimierz. Warszawa, PWN, 1957, 480 s., il., 31 zł.) (польск.)

7167 К. Высшая математика для технических учебных заведений. Ч. 2. Интегралы, обыкновенные дифференциальные уравнения, ряды, приближенные вычисления и их применения. Романовский, Врона (Matematyka wyższa dla studiów technicznych. Cz. 2 Całki, równania różniczkowe zwyczajne, szeregi, obliczenia przybliżone i zastosowania. Romanowski Świętosław, Wrona Włodzimierz. Warszawa, PWN, 1958, 276 s., il., 23 zł.) (польск.)
Ч. 1 см. реф. 7166 К.

7168 К. Ошибки в математических рассуждениях. Изд. 2-е, переработ. Брадис В. М., Минковский В. Л., Харчева А. К. М., Учпедгиз, 1959, 176 стр., илл., 2 р. 95 к.

7169 К. Высшая математика для математиков, физиков, инженеров. Ч. 6. Интегрирование и ряды в комплексной области. Обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных. Рот е, Сабо (Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure. Teil 6. Integration und Reihenentwicklung im Komplexen. Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen. Rothe R. Szabó István. 2. Verb. Aufl. Stuttgart, Teubner, 1958, 251 S., ill., 17.60 DM) (нем.)
Ч. 1—4 см. РЖМат, 1959, 9665 К.—9668 К., ч. 5—РЖМат, 1956, 7409 К.

7170 К. Курс лекций по арифметике рациональных чисел. Соминский И. С. М., Учпедгиз, 1959, 100 стр., 1 р. 25 к.

7171 К. Дифференциальное и интегральное исчисление и аналитическая геометрия. 2-е изд. Филлипс (Cálculo e geometria analítica. 2. ed. Phillips H. B. Trad. do ingl. Rio de Janeiro, Ao Livro Técn., 1958, xiv, 475 p., il., 550,00 cruz.) (порт.)

7172 К. Курс высшей математики. Для студ. физ. фак. ун-тов. Т. 1. Харшиладзе Ф. И. Тбилиси, Тбилисск. ун-т, 1958, 535 стр., илл., 16 р. (груз.)

7173 К. Учебник математики для высших школ. Аналитическая геометрия. 11-е переработанное изд. Швейцер, Ламбахер, Гёц (Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Schulen. Analytische Geometrie. Hrsg. Schweizer Wilhelm, Lambacher Theophil. 11. Aufl. Bearb. Schweizer Wilhelm, Götz Walter, Stuttgart, Klett, 1959, IV, 180 S., ill., 5.80 DM) (нем.)

См. также: 7512, 7814, 8179 К, 8181 К, 8193 К, 8203 К, 8205.

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Редактор *Ю. В. Линник*

7174. О представлении натуральных чисел в виде суммы членов формы $x(x+1)\ldots(x+k-1)/k!$ Чэнь Цзин-жунь (Chen Ching-jun), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1959, **9**, № 3, 264—270 (кит.; рез. англ.)

Пусть $\varphi_k(x)$ означает многочлен, указанный в заглавии, и пусть $g(\varphi_k)$ означает наименьшее r со свойством, что каждое положительное целое число представимо в виде суммы самое большее r значений $\varphi_k(x)$ (x — целое положительное). В. И. Нечаев (РЖМат, 1954, 3594) доказал, что $k+\left[\frac{k}{2}\right]+\left[\frac{k}{3}\right] \leqslant g(\varphi_k) \leqslant 6k\ln k + 9k\ln\ln k$ для $k \geqslant 12$. В настоящей статье с правой стороны неравенство улучшается до $k(5\ln k + 12)$ и с левой — до $k\ln k - k$.
По резюме автора

7175. Об одном варианте доказательства теоремы Гольдбаха—Виноградова. Субханкулов М. А., Уч. зап. Тадж. ун-та, 1958, 18, 39—43

Дается вариант доказательства теоремы Виноградова—Гольдбаха о представлении всякого достаточно большого нечетного числа в виде суммы трех нечетных простых чисел. Этот вариант является небольшим видоизменением доказательства Н. Г. Чудакова (Успехи матем. наук, 1949, 4, № 30). В процессе доказательства получен остаточный член для суммы $\sum_{p_1+p_2+p_3=n} \ln p$ в виде $O(n^2(\ln n)^{-1000})$.
В. М. Архангельская

7176. О представлении натуральных чисел в виде суммы простых чисел. Бровкин (Sur les décompositions des nombres naturels en sommes de nombres premiers. Browkin J.), Colloq. math., 1958, **5**, № 2, 205—207 (франц.)

Доказываются элементарно соотношения

$$P(n+1) \geqslant P(n), \quad n = 1, 2, \ldots; \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} [P(n+1) - P(n)] = +\infty, \tag{2}$$

где $P(n)$ — число представлений n в виде суммы простых чисел. Уточняется (1) для $n = 8, 9, 10, \ldots$ Результаты (1) и (2) были ранее доказаны Бейтманом и Эрдёшем (РЖМат, 1959, 4403).
В. М. Архангельская

7177. Замечание по поводу работы А. Шинцеля и В. Серпинского «О некоторых гипотезах, относящихся к простым числам» (Remarque concernant le travail de A. Schinzel et W. Sierpiński: «Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers»), Acta arithm., 1959, **5**, № 2, 259 (франц.)

Указывается, что в формулировке гипотезы термин „полиномы" должен быть заменен на термин „неприводимые полиномы". См. РЖМат, 1959, 10781.
Н. П. Романов

7178. О точном числе простых чисел, меньших данной границы. Лемер (On the exact number of primes less

than a given limit. Lehmer D. H.), Illinois J. Math., 1959, 3, № 3, 381—388 (англ.)

Описывается метод вычисления количества простых чисел, $\pi(x)$, по формулам Мейсселя и Лежандра с помощью электронной вычислительной машины СВАК (SWAC). Дана таблица функции $\pi(x)$; например, $\pi(10^9) = 50847534$, $\pi(10^{10}) = 455052512$. Данное Мейсселем значение $\pi(10^9) = 50847478$ оказалось неточным. Дана таблица разностей $\mathrm{li}(x) - \pi(x)$. В. А. Голубев

7179. К распределению некоторых степенных произведений простых чисел. Хорнфек (Zur Verteilung gewisser Primzahlpotenzprodukte. Hornfeck Bernhard), Math. Ann., 1959, 139, № 1, 14—30 (нем.)

Пусть T — некоторое множество различных простых чисел p_λ, $\lambda = 1, 2, \ldots, k$; M — множество всех натуральных чисел $n = \prod_{\lambda=1}^{k} p_\lambda^{\alpha_\lambda}$, причем показатель α_λ пробегает некоторое множество натуральных чисел B_λ, Делая различные предположения о множествах T и B_λ, автор выводит асимптотические оценки для количества $M(x)$ чисел из множества M, не превышающих положительного действительного числа x.

Типичная теорема: Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — попарно различные простые числа и B_λ — множества с x-плотностью β_λ, где $\lambda = 1, 2, \ldots, k$. Тогда для чисел из множества $M = \prod_{\lambda=1}^{k} p_\lambda^{B_\lambda}$ справедлива оценка

$$M(x) = \frac{\prod_{\lambda=1}^{k} \beta_\lambda}{k! \prod_{\lambda=1}^{k} \log p_\lambda} \log^k x + o(\log^k x).$$

Отсюда при $\beta_\lambda = 1$ получается, как частный случай, известный результат Пойа. Н. В. Гордеев

7180. Об одном тождестве Човла—Селберга. Анфертьева Е. А., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 3, 13—21

Приводится новое доказательство известного ранее тождества Човла — Селберга для дзета-функции Эпштейна от квадратичной формы, на котором основано гипотетическое доказательство Човла — Селберга несуществования десятого отрицательного дискриминанта одноклассного квадратичного поля. Доказательство основано на мелиновских преобразованиях и использовании известных оценок для гамма-функции и функций Бесселя. В. М. Архангельская

7181. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых функций. Шидловский А. Б., Тр. Моск. матем. о-ва. 1959, 8, 283—320

Основная теорема автора о трансцендентности и алгебраической независимости значений в алгебраических точках E-функций (РЖМат, 1955, 5591; 1959, 10824) применяется для изучения конкретных функций. Пусть для $\mu, \eta_l \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$;

$\lambda, \mu_l, \mu_j \neq 0, -1, -2, \ldots$; $s = 1, \ldots, r$; $j = 0, 1, \ldots, m$; $i = 1, \ldots, s$, l; $l = 1, \ldots t, r$

$$\int^z t^{\mu-1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{c_n}{n+\mu} z^{n+\mu};$$

$$\varphi_{0,\lambda}(z) = \varphi_\lambda(z) = \lambda z^{-\lambda} e^z \int^z t^{\lambda-1} e^{-t} dt,$$

$$\varphi_{s,\lambda}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)(\mu_1+n)\ldots(\mu_s+n)},$$

$$\varphi_{0,l,j}(z) = \varphi_{\lambda_j}(z),$$

$$\varphi_{s,l,j}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(\lambda_j+1)\ldots(\lambda_j+n)(\mu_{1,l,j}+n)(\psi_{s,l,j}+n)}$$

$$K_{0,\lambda}(z) = K_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n};$$

$$K_{l,\lambda}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)(\mu_1+n)\ldots(\mu_l+n)} \left(\frac{z}{2}\right)^n,$$

$$H_{,\lambda}(z) = z^{-\eta_l} e^z \int^z t^{\eta-1} e^{-t} H_{l-1,\lambda}(t)\, dt,$$

$$H_{0\lambda}(z) = K_\lambda(z)$$

Теорема 1. Пусть λ_0 — неотрицательное целое рациональное число, $\lambda_1 \ldots, \lambda_m$ — дробные рациональные числа такие, что разности $\lambda_{j_1} - \lambda_{j_2}$, $1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant m$ не являются целыми; $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — алгебраические числа, линейно независимые над полем рациональных чисел; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — различные алгебраические числа, отличные от нуля. Тогда $(m+1)n$ чисел $\varphi_{\lambda_0}(\beta_i)$ и $\varphi_{\lambda_j}(\alpha_i)$; $j = 1, \ldots, m$; $i = 1, \ldots, n$, алгебраически независимы.

Теорема 2. Пусть $\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_r$ — рациональные числа, каждое из которых не является целым отрицательным, такие, что разности $\mu_s - \lambda$, $s = 1, \ldots, r$, не являются целыми положительными, а разности $\mu_{s_1} - \mu_{s_2}$, $1 \leqslant s_1 < s_2 \leqslant r$, не являются целыми, за исключением нуля. Пусть α — любое алгебраическое число отличное от нуля. Тогда числа $\varphi_{s,\lambda}(\alpha)$, $s = 0, 1, \ldots, r$, алгебраически независимы.

Теорема 3. Пусть λ_0 — неотрицательное целое число; числа λ_j, $j = 1, \ldots, m$ — дробные рациональные; $\mu_{s,l,j}$, $s = 1, \ldots, r$; $l = 1, \ldots, t$; $j = 0, \ldots, m$ — рациональные числа, отличные от целых отрицательных. Все разности $\lambda_{j_1} - \lambda_{j_2}$, $1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant m$; $\mu_{s_1,l_1,j} - \mu_{s_2,l_2,j}$; $s_1, s_2 = 1, \ldots, r$; $1 \leqslant {}_1 < {}_2 \leqslant t$ $j = 0, 1, \ldots, m$; $\mu_{s,l,0} - \lambda_j$ $s = 1, \ldots, r$; $l = 1, \ldots, t$; $j = 1, \ldots, m$, не являются целыми. Разности $\mu_{s_1,l,j} - \mu_{s_2,l,j}$, $1 \leqslant s_1 < s_2 \leqslant r$; $l = 1, \ldots, t$; $j = 0, 1, \ldots, m$, не могут быть целыми, за исключением нуля, а разности $\mu_{s,l,j} - \lambda_j$, $s = 1, \ldots, r$, $l = 1, \ldots, m$, $j = 0, 1, \ldots, m$, не могут быть целыми положительными. Далее, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — алгебраические числа, линейно независимые над полем рациональных чисел, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — отличные от нуля алгебраические числа, квадраты которых попарно различны. Тогда $(rt+1)(m+1)n$ чисел $\varphi_{\lambda_0}(\beta_l)$, $\varphi_{\lambda_j}(\alpha_l)$, $\varphi_{s,l,0}(\beta_l)$ и $\varphi_{s,l,j}(\alpha_l)$, $(s = 1, \ldots, r$; $l = 1, \ldots, t$; $j = 1, \ldots, m$; $i = 1, \ldots, n)$ алгебраически независимы.

Теорема 4. Пусть λ — рациональное число, $\lambda \neq \pm 1/2, -1, \pm 3/2, -2, \ldots$; $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — рациональные числа такие, что как сами эти числа, так и разности $\mu_{l_1} - \mu_{l_2}$, $1 \leqslant l_1 < l_2 \leqslant r$ не могут быть целыми, за исключением нуля, а разности $\mu_l - \lambda$, $l = 1, \ldots, r$ не являются целыми положительными; α — любое алгебраическое число, отличное от нуля. Тогда $r+2$ числа $K_\lambda(\alpha)$ $K'_\lambda(\alpha)$, $K_{l,\lambda}(\alpha)$, $l = 1, \ldots, r$, алгебраически зависимы.

Теорема 5. Пусть λ — рациональное число, $\lambda \neq \pm 1/2, -1, \pm 3/2, -2, \ldots$; $\eta_1, \ldots, \eta_r$ — рациональные числа такие, что $\eta_l \neq 0, -1, -2, \ldots$; $l=1, \ldots, r$, а разности $\eta_{l_1} - \eta_{l_2}$, $1 \leqslant l_1 < l_2 \leqslant r$, не могут быть целыми, за исключением нуля; α — любое алгебраическое число, отличное от нуля. Тогда $r+3$ числа e^{α}, $K_\lambda(\alpha)$, $K'_\lambda(\alpha)$, $H_{l,\lambda}(\alpha)$, $l=1, \ldots, r$, алгебраически независимы.

Из этих теорем вытекает, в частности, что при допустимых значениях параметров λ, μ и η каждая из упомянутых функций в алгебраических точках $\alpha \neq 0$ принимает трансцендентные значения. Трансцендентными будут также и отличные от нуля значения аргументов, при которых эти функции принимают алгебраические значения.

Некоторые опечатки: 1) в формулах (65) и (66) вместо α_l следует читать γ_l, 2) в формулах (67) и (68), а также в 1-й, 4-й и 7-й строках снизу на стр. 299 и во 2-й строке сверху на стр. 300 индекс j может принимать также значение 0. Н. И. Фельдман

7182. Об аппроксимации алгебраического числа алгебраическими числами данного поля. Куджани (Sull' approssimabilità di un numero algebrico mediante numeri algebrici di un corpo assegnato. Cugiani Marco). Boll. Unione mat. ital., 1959, **14**, № 2, 151—162 (итал.)

Рассмотрим поле алгебраических чисел K и пусть α имеет над K степень $g \geqslant 2$. Как известно, неравенство $|\alpha - \xi| < h^{-2-\varepsilon}$, $h = h(\xi)$ — высота числа ξ, $\varepsilon > 0$, имеет лишь конечное множество решений ξ из K (это было доказано для поля рациональных чисел Ротом (РЖМат, 1956, 7844), а в общем случае — Ле-Веком (РЖМат, 1960, 6471К). Возникает вопрос (поставленный для поля рациональных чисел Давенпортом и Ротом (РЖМат, 1960, 2711), нельзя ли заменить в этом утверждении константу ε на подходящим образом выбранную функцию $f(h) > 0$, подчиненную условию: $\lim_{h\to\infty} f(h) = 0$.

Автор делает первые шаги в этом направлении, доказывая теорему:

Пусть $\eta > 0$ и $f(h) = (8g+\eta)(\log\log\log h)^{-1/2}$. Если для бесконечной последовательности примитивных чисел ξ_n поля K, высоты h_n которых монотонно не убывают, справедливо неравенство $|\alpha - \xi_n| < h_n^{-2-f(h_n)}$, то тогда $\overline{\lim}_{n\to\infty} \log h_{n+1}/\log h_n = +\infty$.

Для доказательства автор использовал метод Рота — Левека. Напомним, что прежде чем Рот доказал свою теорему, результат, аналогичный теореме Куджани, для константы ε был получен Шнейдером.

Д. Н. Ленской

7183. О множествах чисел типа $p^n - q^n\alpha$. Куджани (Sugli insiemi numerici del tipo $p^n - q^n\alpha$. Cugiani Marco. Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat., 1956, 90, 209—220) (итал.)

В предыдущей статье (РЖМат, 1956, 8548) автор изучал последовательность точек, абсциссы которых вида $p^2 - q^2\alpha$, где α — фиксированное действительное число, а p, q принимают целые значения. Он показывает, что для почти всех α эта последовательность имеет 0 как точку сгущения. Настоящая статья имеет дело с последовательностью $I_n(\alpha)$ точек вида $p^n - q^n\alpha$, где n — целое $\geqslant 3$. В этом случае $I_n(\alpha)$ не имеет конечной точки сгущения для почти всех α. В частности, это справедливо, когда α есть любое алгебраическое число, как это следует из недавней теоремы Рота (РЖМат, 1956, 7844). Другие результаты для четных значений $n \geqslant 4$ показывают, что последовательность, получающаяся из $I_n(\alpha)$, может быть либо двумя полуосями, либо собственной подпоследовательностью ее, в зависимости от выбора α. D. H. Lehmer

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 11, 875—876.

7184. Односторонние неравенства для целочисленных квадратичных форм. Уотсон (One-sided inequalities for integral quadratic forms. Watson G. L.), Quart. J. Math., 1958, **9**, № 34, 99—108 (англ.)

Пусть $f = f(x_1, \ldots, x_k)$ — целочисленная, примитивная, невырожденная квадратичная форма сигнатуры s, $s \neq -k$. Изучается точная нижняя граница $\min^+ f$, положительных значений $f(x_1, \ldots, x_k)$ при целых переменных $x_1, \ldots, x_k$. Доказано, что для $k \leqslant 8$

$$\frac{(\min^+ f)^k}{|\partial^k f/\partial x_i \partial x_j|} < \begin{cases} 1, & 0, \pm 1 \\ 1/2, & \pm 3 \\ 1/3, & \pm 2 \\ 1/4, & 4 \end{cases} \quad \text{если } s \equiv \pmod 8,$$

кроме трех исключительных случаев, когда f эквивалентна формам $4x_1x_2 - x_3^2$, $16x_1x_2 - x_3^2$, $3x_1x_2 - x_3^2 - 3x_3x_4 - 3x_4^2$. Полностью выяснено, когда в указанной выше формуле имеет место знак равенства. Б. Б. Венков

7185. Нулевые или отрицательные значения дискриминанта в квадратичных уравнениях. Цеккендорф (La valeur nulle ou négative du discriminant dans les équations quadratiques. Zeckendorf E.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1958, **27**, № 3-4, 68—73 (франц.)

Продолжение работы автора (РЖМат, 1959, 6610). Рассматриваются неопределенные уравнения второй степени с нулевым и отрицательным дискриминантом. И в этих случаях для значений неизвестных могут быть построены рекуррентные последовательности.

В. А. Голубев

7186. Модулярные формы с мультипликативными коэффициентами. Ньюман (Modular forms whose coefficients possess multiplicative properties Newman Morris), Ann. Math., 1959, **70**, № 3, 478—489 (англ.)

Пусть $\delta = \frac{p-1}{24}\{(q+1)\varepsilon - (q-1)\varepsilon_0\}$, $\delta^* = \frac{p-1}{24}\{(q+1)\varepsilon + (q-1)\varepsilon_0\}$, $\varepsilon = \frac{r+s}{2}$, $\varepsilon_0 = \frac{r-s}{2}$, $B(\tau) = B_{r,s}(\tau) = \eta^r(\tau)\eta^s(q\tau)$, $g(\tau) = \frac{B(p\tau)}{B(\tau)}$, $R_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -kq & 1 \end{pmatrix}$, $G(\tau) = \sum_{k=0}^{p} g(R_k\tau)$, $t = \frac{r+sq}{24}$,

$$\exp(-2\pi i t\tau i)\, B_{r,s}(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{r,s}^{(n)} \exp(2\pi i \tau n),$$

p, q — простые, тогда справедлива теорема 2: Если $0 \leqslant \delta \leqslant p$, $0 \leqslant \delta^* \leqslant p$, то $G(\tau) = \text{const}$ и $c(np+\delta) = \beta c(n) - \gamma p^{\varepsilon-1} c\left(\frac{n-\delta}{p}\right)$, где $\beta = c(\delta) + \gamma p^{\varepsilon-1} c(-\delta/p)$, $\gamma = (-1)^{\varepsilon(p-1)/2}(q/p)^r$. Приводится таблица значений r, s, m для простого $q \leqslant 23$ таких, что $d(n) = c((r+qs) \times (n-1)/24)$ мультипликативна на классе чисел, состоящих из простых $p \equiv 1 \pmod m$. Для случая $\delta = 0$ указаны явные формулы для $c(n)$. Доказательство мультипликативности большинства функций $c_{r,s}(n)$, рассмотренных автором было проведено ранее Гекке, Рамануджаном, Линтом, Блеем и референтом.

Б. В. Левин

7187. Неравенства между некоторыми вещественными модулярными функциями. Флор (Inequalities among

some real modular functions. Flor Peter), Duke Math. J., 1959, 26, № 4, 679—682 (англ.)

Пусть $l(\alpha) = \lim\limits_{t\to\infty} \inf \min t \mid x - \alpha y \mid$,

$S(\alpha) = \lim\limits_{t\to\infty} \sup \min t \mid x - \alpha y \mid$, $k(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n$,

α — вещественное иррациональное число, x, y — целые, $0 < \mid y \mid \leqslant t$, $\alpha = (a_1, a_2, \ldots)$. Моримото (Morimoto S., Proc. London Math. Soc. ( ), 1938, 44, 323—325) доказал, что условия $k(\alpha) = \infty$, $l(\alpha) = 0$, $S(\alpha) = 1$ эквивалентны.

Доказывается теорема: Пусть $\{\gamma_t\}$ — последовательность вещественных иррациональных чисел, тогда три равенства $\lim k(\gamma_t) = \infty$, $\lim l(\gamma_t) = 0$, $\lim S(\gamma_t) = 1$ эквивалентны.

Для доказательства теоремы, наряду с „модулярными функциями" Перрона $M(\alpha) = 1/l(\alpha)$, рассматривается также функция $T(\alpha) = S(\alpha)/(1 - S(\alpha))$ и выводятся неравенства

$$\frac{T(\alpha)}{1+\sqrt{T(\alpha)}} \leqslant k(\alpha) \leqslant \frac{(T(\alpha)-1)^2}{T(\alpha)}, \quad (1)$$

$$M(\alpha) > \frac{T(\alpha)+1}{\sqrt{T(\alpha)}}, \quad (2)$$

$$M(\alpha) < T(\alpha) - \frac{1}{T(\alpha)}, \quad (3)$$

которые вместе с известными неравенствами для $M(\alpha)$ и $k(\alpha)$ приводят к доказательству теоремы 2. Доказывается, что неравенства (1) — (3) неулучшаемы.

Б. В. Левин

7188. Арифметическое свойство групп линейных преобразований. Малер (An arithmetic property of groups of linear transformations. Mahler K.), Acta arithm., 1959, 5, № 2, 197—203 (англ.)

Изве тна связь геометрической теории модулярных групп с вопросом о минимуме бинарных квадратичных форм. Вместо модулярной группы рассматривается допустимая фуксова группа, т. е. группа, имеющая фундаментальную область R_0, целиком лежащую в верхней полуплоскости, из которой исключена линия $y = 0$ и точка $z = \infty$. Доказывается теорема 3 (обобщающая теорему Хедлунда): Если F — допустимая фуксова группа, состоящая из линейных преобразований s_k:

$$z \to \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k} \quad (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k \text{ — вещественные};$$
$$\alpha_k\delta_k - \beta_k\gamma_k = 1, \; k = 1, 2, 3, \ldots)$$

$f(u, v)$ — произвольная положительно определенная квадратичная форма, то $f(\alpha_k, \gamma_k)$ лежат всюду плотно на положительной вещественной полуоси. Высказывается предположение, что для неопределенных форм значения $f(\alpha_k, \gamma_k)$ лежат всюду плотно на всей вещественной оси.

Рассматривается пример допустимой фуксовой группы, относящийся к теории неопределенных тернарных квадратичных форм. Б. В. Левин

7189. О теореме Минковского—Главка. Леккеркер (De stelling van Minkowski—Hlawka. Lekkerkerker C. G.), Rapp. Math. centrum., 1956, № ZW-011, 1—7 (гол.)

Указано несколько обобщений теоремы Минковского — Главка о лучевом теле. Б. Б. Венков

7190. Исследования о проблеме собственного делителя. Закс (Untersuchungen über das Problem der eigentlichen Teiler. Sachs Horst), Wiss. Z. Martin—Luther—Univ. Halle—Wittenberg. Math.-naturwiss. Reihe, 1956—1957, 6, № 2, 223—259 (нем.)

Пусть $f_\nu(z)$ — последовательность рациональных функций ($\nu = 0, \pm 1, \ldots$), K — поле алгебраических чисел, $\xi \in K$; изучается вопрос о существовании в K простого идеала $\mathfrak{p}$ такого, чтобы $f_\nu(\xi) \bmod \mathfrak{p}$ как функция от ν была бы периодической функцией заданного периода n. Подробно рассмотрен случай $f_\nu(z) = z^\nu$. В этом случае, если K вполне вещественно, то проблема имеет решение почти для всех (т. е. кроме конечного числа исключений) целых $\xi \in K$ и n. Рассматриваются и другие функции, например, $f_\nu(\xi) = 2\cos\left[\nu \arccos\frac{\xi}{2}\right]$, где ξ рационально, в этом случае задача имеет решение для любого $n > 12$ и почти всех ξ. Б. Б. Венков

7191. О решении в рациональных числах некоторых диофантовых уравнений. Георгиев (O rozwiązaniu w liczbach wymiernych pewnych równań diofantycznych. Georgiew G.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1955, Ser. 1, 1, № 2, 201—238 (польск., рез. русск., англ.)

Устанавливаются достаточные условия для полного решения в рациональных числах уравнений вида

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \prod_{1}^{n} x_i^{a_{ki}} = A_0,$$

где показатели a_{kl} и коэффициенты A_k — целые числа. Эти условия не зависят от коэффициентов A_k — в них участвуют только показатели a_{kl}. В. К. Белов

7192. Одно диофантово уравнение. Хантер (A diophantine equation. Hunter J. A. H.), Math. Gaz., 1959, 43, № 344, 130 (англ.)

7193. О диофантовом уравнении $(a^2-b^2)^x+(2ab)^y = (a^2+b^2)^z$. Кэ Чжао (Ko Chao), Сычуань дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Sichuan daxue xuebao. Ziran kexue, Вестн. Сычуаньск. ун-та (сер. естеств. н.), Acta scient. natur. Univ. szechuan., 1959, 3, 25—34 (кит.; рез. англ.)

Есманович предположил, что диофантово уравнение $(a^2 - b^2)^x + (2ab)^y = (a^2 + b^2)^z$ не имеет целых решений, кроме $x = y = z = 2$. В статье доказывается

Теорема: I. Если $a = 2n$ и b не содержат простых множителей вида $4l + 1$, $2n > b > 0$, $(n, b) = 1$ и 1) $n \equiv 2 \pmod 4$, $b \equiv 3 \pmod 8$, или 2) $n \equiv 2 \pmod 4$, $b \equiv 5 \pmod 8$, $2n + b$ имеет простой множитель вида $4l - 1$, или 3) $n \equiv 0 \pmod 4$, $b \equiv 3,5 \pmod 8$, то предположение Есмановича справедливо.

II. Если $a = 3n$ и $b = 2m$ не имеют простых множителей вида $4l + 1$, $(3n, 2m) = 1$, $\sqrt{2}(2m) > 3n > 2m > 0$ или $3n > 8m > 0$ и 1) $m \equiv 2 \pmod 4$, $n \equiv 1 \pmod 8$, или 2) $m \equiv 2 \pmod 4$, $n \equiv 7 \pmod 8$, $3n + m$ имеет простой множитель вида $4l - 1$, или 3) $m \equiv 0 \pmod 4$, $n \equiv 1,7 \pmod 8$, то предположение Есмановича справедливо. Резюме автора

7194. Решения диофантовых уравнений $x^3+y^3=kz^2$, $k=1, 2, 3$. Родеха (Sobre las ecuaciones diofanticas $x^3+y^3=kz^2$, $k=1, 2, 3$. Rodeja F. E. G.), Rev. mat. hisp.-amer., 1959, 19, № 2, 84—91 (исп.)

Даются формулы решений в случае $(x, y) = 1$ в натуральных числах указанных в заглавии уравнений и таблицы этих решений. В. А. Голубев

7195. О неопределенном уравнении $5/n=1/x+1/y+1/z$. Джентиле (Sull' indeterminata $5/n=1/x+1/y+1/z$. Gentile Giovanni), Archimede, 1959, 11, № 4, 222—223 (итал.)

Палама (РЖМат, 1959, 2323) доказал возможность решения уравнения $5/n = 1/x + 1/y + 1/z$ в натуральных числах, если $n \neq 1260m + 1$. Дается другое, простое, вполне элементарное доказательство предложения Палама. В. А. Голубев

7196. Представление рациональными дробями. Болт, Райт (Representations of rational fractions. Bolt B.,

Wright E.), Math. Gaz., 1959, **43**, № 344, 132—133 (англ.)

7197. Примитивные пифагоровы тройки. Мошан (Primitive Pythagorean triples. Moshan Ben), Math. Teacher, 1959, 52, № 7, 541—545 (англ.)

7198. Целые отношения произведений факториалов. Морделл (Integer quotients of products of factorials. Mordell L. J.), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 2, 134—138 (англ.)

Ставится и решается следующая задача: Пусть p — простое, a, b, c — неотрицательные целые такие, что $a \neq 0$, $a \neq p$ и $b \neq p$; пусть далее $p = al + bm$, где $l > 0$ и $m \geqslant 0$—целые. Существует ли бесконечное количество целых x таких, что $Q = (px)!/((ax)!)^l((bx+c)!)^m$—целое? Дается еще несколько замечаний по этой задаче. После работы имеется замечание редактора Райта о том, что статья (РЖМат, 1959, 8807) вытекает из результатов этой работы автора. А. Г. Постников

7199. Некоторые свойства арифметических прогрессий. Субба-Рао (Some properties of arithmetic progressions. Subba Rao K.), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 7, 582—584 (англ.)

Пусть z, m, n — натуральные числа, $x_1, x_2, \ldots$ — целые числа, принадлежащие арифметической прогрессии. Доказывается, что уравнения: 1) $x_1^2 + \ldots + x_{2m+1}^2 = (2m+1)z^n$, 2) $x_1^2 + \ldots + x_{2m}^2 = 2mz^n$, 3) $x_1^2 + \ldots + x_m^2 = z^{2n+1}$, 4) $x_1^2 + \ldots + x_m^2 = z^n$ имеют бесконечное число решений. В. А. Голубев

7200. Заметка о проблеме Эрдёша. Берч (Note on a problem of Erdős. Birch B. J.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1959, **55**, № 4, 370—373 (англ.)

Доказывается следующее предположение Эрдёша: Пусть p, q — взаимно простые числа. Тогда имеется такое $N(p, q)$, что каждое целое $n > N(p, q)$ может быть представлено в виде суммы различных чисел формы $p^a q^b$, где сумма — из множества различных пар натуральных чисел (a, b). В. А. Голубев

7201. Арифметический принцип обращения. Коэн (An arithmetical inversion principle. Cohen Eckford), Bull. Amer. Math. Soc., 1959, **65**, № 5, 335—336 (англ.)

Согласно известному принципу обращения Мёбиуса $\sum_{d|n} f(d) = g(n) \rightleftarrows \sum_{d|n} \mu(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right) = f(n)$, где $\mu(n)$ — функция Мёбиуса. В работе дается обобщение принципа Мёбиуса в форме взаимной импликации ($r = r_1 r_2$)

$$g(r_1, r_2) = \sum_{d|r_1} f\left(\frac{r_1}{d}, r\right)\mu(d) \rightleftarrows f(n, r) = \sum_{d|r} g\left(d, \frac{r}{d}\right),$$

где $f(n, r)$ — ровная (even) по mod r, по терминологии, введенной автором, функция, т. е. $f(n, r) = f((n, r), r)$. Рассматривается также дальнейшее обобщение соотношения и его приложение к выводу арифметических тождеств Гёльдера, Андерсона-Апостола и др.

Н. П. Романов

7202. Несколько замечаний о функции φ Эйлера. Эрдёш (Some remarks on Euler's φ function. Erdős P.), Acta arithm., 1958, **4**, № 1, 10—19 (англ.)

Доказываются 4 теоремы о функции $\varphi(n)$ Эйлера типа теоремы Шинцеля (РЖМат, 1956, 5713); для доказательства использованы метод Бруна, теоремы Мертенса и Ландау. В. А. Голубев

7203. О функции Эйлера. Гурматай (Sur l'indicateur. Goormaghtigh R.), Mathesis, 1959, **68**, № 7—9, 268—269 (франц.)

См. РЖМат, 1960, 4892.

7204. О функции $\sigma_k(n)$. Негоеску (Asupra funcției $\sigma_k(n)$. Negoesku N. C.), Lucrarile ştiinţ. Inst. ped. Timişoara. Mat.-fiz., 1958(1959), 149—152 (рум.; рез. франц., русск.)

Работа посвящена выводу соотношения $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} \sigma_{k-1}\left(\frac{n}{d}\right) d^{k-1}\varphi(d)$, где $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$, $\varphi(n)$ — функция Эйлера. Соотношение получается путем перемножения соответствующих рядов Дирихле.

Н. П. Романов

7205. Замечание к теореме Вильсона. Коста (A note on Wilson's theorem. Costa Carneiro Affonso da Newton. Soc. Parana. Mat. Anuário, 1956, 2, 5—6) (порт.)

Отмечается, что теорема Вильсона может быть видоизменена следующим образом. Для того чтобы p было простым, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое $n \leqslant p$, что $(n-1)!(p-n)! \equiv (-1)^n \pmod p$. Приводятся различные простые следствия. D. H. Lehmer

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 4, 84.

7206. Одно свойство простых чисел. Коста (Uma propriedade dos números primos. Costa Carneiro Affonso da Newton. Matematica, 1959, **4**, № 12, 43—44 (порт.)

Доказывается, что если p — нечетное простое число, то справедливо сравнение

$$\int_0^\infty e^{-x} x^p dx \int_0^{\pi/2} \sin^p x dx \equiv (-1)^{(p+1)/2} \pmod p.$$

Б. Э. Апарисио

7207. О некоторых свойствах классов простых вычетов по модулю n. Ч. II. Якобсталь (Über einige Eigenschaften der primen Restklassen mod. n. II. Jacobsthal Ernst. Kgl. norske vid. selskabs forhandl., 1959, **32**, № 5, S. 31—37) (нем.)

Продолжение работы автора (РЖМат, 1959, 7750). Доказываются теоремы, определяющие числа классов вычетов по модулю n, имеющих данный делитель d числа n. В. А. Голубев

7208. Одна арифметическая сумма, связанная с наибольшей целой функцией. Карлиц (An arithmetic sum connected with the greatest integer function. Carlitz L.), Kgl. norske vid. selskabs forhandl., 1959, **32**, № 4, pp. 24—30 (англ.)

Пусть $S(a, b, m; r) = \sum_{k=0}^{r-1} D(k)$, где $D(k) = D(a, b, m; k) = \left[\frac{a+b+k}{m}\right] - \left[\frac{a+k}{m}\right] - \left[\frac{b+k}{m}\right] + \left[\frac{k}{m}\right]$, a, b — произвольные целые, m, r — натуральные числа. Якобсталь (РЖМат, 1958, 6442) доказал, что $S(a, b, m; r) \geqslant 0$ при произвольном натуральном r. Дается другое доказательство неравенства Якобсталя, выявляющее интересное симметрическое свойство суммы S.

В. А. Голубев

7209. Некоторые тождества. Дерран (Some identities. Durran J. H.), Math. Gaz., 1959, **43**, № 344, 131—132 (англ.)

7210. О топологии, связанной с натуральным рядом чисел. Голомб (A connected topology for the integers. Golomb Solomon W.), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 8, 663—665 (англ.)

Если в натуральный ряд чисел ввести топологию, объявив открытыми множества совокупности чисел $\{an+b\}$ при $(a, b) = 1$ и при $n = 0, 1, 2, \ldots$, то многие проблемы в теории чисел могут быть поставлены как теоретико-множественные задачи для соответствующего топологического пространства. Например, проблема Дирихле о бесконечном числе целых в арифметической прогрессии — простые числа всюду плотны в этом пространстве. В. К. Белов

7211. Некоторые свойства последовательностей Битти. I. Коннелл (Some properties of Beatty sequen-

ces. I. Connell Ian G.), Canad. Math. Bull., 1959, 2, № 3, 190—197 (англ.)

Две последовательности натуральных чисел называются дополнительными, если они содержат все натуральные числа без пропусков и повторений. Установлено Битти, что $u_n = [n(1+1/\alpha)]$, $v_n = [n(1+\alpha)]$, $n = 1, 2, \ldots$, являются дополнительными тогда и только тогда, если $\alpha > 0$ — число иррациональное. В статье определяются все $\alpha > 0$, при которых последовательность Битти имеет свойство: $u_{v_n} = u_n + v_n$. В. А. Голубев

7212. Проблема конструирования целого числа. Мейерс (An integer construction problem. Meyers Leroy F.), Amer. Math. Monthly, 1959, 66, № 7, 556—561 (англ.)

Обоснованы формулы, указывающие наибольшее целое число N, которое может быть составлено из r чисел 1, s чисел 2 и t целых чисел a_j таких, что $3 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_t$ при помощи только двух действий: сложения и умножения, если каждое из $r+s+t$ данных чисел употребляется только по одному разу. Оказывается, что $N = 1$, если $r = 1$ и $s = t = 0$; $N = (a_1 + 1)\prod_{j=2}^{t} a_j$, если $r = 1$, $s = 0$ и $t \geqslant 1$; $N = 2^{s-r}(2+1)^r \prod_{j=1}^{t} a_j$, если $r \leqslant s$; $N = (1+1) \times 2(2+1)^{s-1}\prod_{j=1}^{t} a_j$, если $r - s = 1$ и $s \geqslant 1$; $N = (1+1)^q (1+1+1)^{(r-s-2q)/3}(2+1)^s \prod_{j=1}^{t} a_j$, если $r \geqslant s+2$, где q обозначает остаток от деления на 3. При этом $\prod_{j=2}^{t} a_j$ считается равным 1. Приведенные формулы взаимно исключают друг друга, исчерпывают все случаи и указывают способ конструирования числа N. Присоединение вычитания не привело бы к увеличению максимального N при соблюдении тех же условий. Б. А. Кордемский

7213. Перечисление положительных рациональных чисел. Срinивасан (The enumeration of positive rational numbers. Srinivasan M. S.), Proc. Indian Acad. Sci., 1958, **A 47**, № 1. 12—24 (англ.)

Несколько способов перечисления рациональных чисел было указано Уайлдером (Wilder R. L., Introduction to the foundation of mathematics, London, John Wiley and Sons, 1952). Предлагается новый способ перечисления положительных рациональных чисел. Для этого используются свойства близкой к ряду Фарея серии медиан и τ-функций Гермеса. В. А. Голубев

7214. О простых числах, имеющих данные начальные и конечные цифры. Серпинский (Sur les nombres premiers ayant des chiffres initiaux et finals donnés. Sierpiński W.), Acta arithm., 1959, 5, № 3, 265—266 (франц.)

Доказывается теорема: Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — две конечные последовательности цифр десятичной нумерации, где $b_l = 1, 3, 7$ или 9. Существует достаточно большое простое число p, имеющее m начальных последовательных цифр $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и n конечных последовательных цифр $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Доказательство вытекает из теоремы Лежён — Дирихле о простых числах в арифметических прогрессиях и из одной леммы автора. В. А. Голубев

7215. Об одной теоретико-числовой задаче. Рыкалин А., Раик А. Е., Сб. студ. научн. работ Мордовск. ун-т, 1958, № 2, 41—46

Рассматривается произведение двух n-значных чисел, где $n \geqslant 2$. При перестановке в обратном порядке цифр сомножителей порядок цифр нового произведения обратен порядку цифр первоначального произведения. Для двузначных сомножителей вида $10a + b$ и $10c + d$ это свойство имеет место или нет одновременно с тем справедливы или несправедливы неравенства $ac < 10$, $bd < 10$ и $ad + bc < 10$. На этой основе составлена таблица всех пар двузначных чисел, обладающих указанным свойством. Указана возможность обобщения полученных условий для пар n-значных чисел в случае $n = 3, 4, \ldots, 8$. Б. А. Кордемский

7216. Критерий делимости на 7. Уоллес (A test for divisibility by 7. Wallace E. W.), Math. Gaz., 1959, 43, № 344, 130 (англ.)

7217 К. Введение в арифметическую факторизацию и сравнения с точки зрения абстрактной алгебры. Вандивер, Уивер (Introduction to arithmetic factorization and congruences from the standpoint of abstract algebra. Vandiver H. S., Weaver Milo W. Amer. Math. Monthly, 1958, 65, № 8, Part 2, IV, 53 pp.) (англ.)

7218 К. Введение к трансцендентным числам. Шнейдер (Introduction aux nombres transcendants. Schneider Theodor. Trad. de l'allem. Paris, Gauthier-Villars, 1959, 152 p., 3500 fr.), Bibliogr. France, 1959, 148, № 43, 1096 (франц.)

7219 К. Геометризация непрерывных дробей. Судан (Geometrizarea fracțiilor continue. Sudan Gabriel. București, Ed. tehn., 1959, 436 p., il., 17 lei), Bibliogr. RPR, 1959, 8, № 12, 313 (рум.)

7220 К. Очарование чисел. Рейхман (La fascination des nombres. Reichmann W. J. Trad. de l'angl. Paris, Payot, 1959, 195 p., ill., 1300 fr.), Bibliogr. France, 1959, 148, № 39, 984 (франц.)

См. РЖМат, 1958, 3540.

7221 К. Числа и их волшебство. Адлер (Die Zahlen und ihr Zauberreich. Adler Irving. Übers. aus dem Engl., München, Süddtsch. Verl., 1959, 119 S., 5.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, A, № 41, 3074 (нем.)

См. также: 7292, 7295, 8221

АЛГЕБРА

Редакторы *Л. А. Скорняков, В. И. Шестаков*

7222. Теория полей и многочленов. Фаддеев Д. К., В сб.: Матем. в СССР за 40 лет. 1917—1957. Т. 1. М., Физматгиз, 1959, 201—205

7223. Общая алгебра. Глушков В. М., Курош А. Г. В сб.: Матем. в СССР за 40 лет. 1917—1957. Т. 1. М., Физматгиз, 1959, 151—200

7224 К. Высшая алгебра. Обрешков (Висша алгебра. Учебник Физ.-матем. фак. Софийски унив., 4 изд. Обрешков Н. София, Наука и изкуство, 1958, X, 604 с., 17.65 лв.), Бълг. книгопис, 1959, 63, № 1, 7 (болг.)

7225 К. Высшая алгебра. Основы: множества и операции, делимость, линейные пространства, квадратичные формы. Фрода (Algebra superioară. Fundamente: mulțimi și operații, divizibilitate, spații liniare, forme patratice. Froda Alexandru. București, Acad. RPR, 1958, 455 p., 24, 50 lei), Bibliogr. RPR, 1958, 7, № 15, 523 (рум.)

7226 К. Основы алгебры. Ч. II. Общая теория колец и полей. Луговский, Вейнерт (Grundzüge der Algebra. Teil 2. Allgemeine Ring- und Körpertheorie. Lugowski Herbert, Weinert Hanns Joachim. Leipzig, Teubner, 1958—1959, 250 S., ill., 11.—DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, **A**, № 10, 794 (нем.)
Ч. I см. РЖМат, 1959, 3509.

7227 К. Введение в алгебру. Лонстра (Inleiding tot de algebra. Loonstra F. Groningen, P. Noordhoff, 1959, VII, 241 blz., 19.50 fl.), Nieuwe uitgaven Nederl., 1959, **21**, № 3, 34 (гол.)

7228 К. Элементы высшей алгебры. Мостовский, Штарк (Elementy algebry wyższej. Mostowski Andrzej, Stark Marceli. Warszawa, PWN, 1958, 368 s., 32 zł.), Przew. bibliogr., 1958, **14**, № 29, 376 (польск.)

7229 К. Дополнения к алгебре. Годьо (Compléments d'algèbre. 4e éd. Gaudiot Paul. Paris, Eyrolles, 1957, 188 p., ill., 750 fr.), Bibliogr. France, 1959, **148**, № 7, 158 (франц.)

7230 К. Алгебра. Для индустриальных техникумов. Гурский (Algebra. Dla techników przemysłowych. Cz. 2. Wyd. II. Górski Józef. Warszawa, Państw. Wydawn. Szkoln. Zawod., 1958, 275 s., il., 11.50 zł.), Przew. bibliogr., 1958, **14**, № 27, 357 (польск.)

7231 К. Избранное из современной абстрактной алгебры. Андри (Selections from modern abstract algebra. Andree Richard Vernon. London, Constable, 1959, XII, 212 pp. ill., 42 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1959, № 480, 8 (англ.)

7232 К. Высшая алгебра. Т. 2. Уравнения высших степеней. Хассе (Höhere Algebra. Bd 2. Gleichungen höheren Grades. 4. durchges. Aufl. Hasse Helmut. Berlin, de Gruyter, 1958, 156 S., ill., 3.60 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, **A**, № 14, 1158 (нем.)

7233 К. Алгебра для колледжа. Питерсон (College algebra. 2nd ed. Peterson Thurman Stewart. New York, Harper and Brothers Publ., 1958, 421 pp., ill., 4.00 doll.), Publishers' Weekly, 1958, **174**, № 25, 103 (англ.)

7234 К. Алгебра. Руководство и сборник задач. Леман, Штели (Algebra. Leitfaden und Aufgabensammlung. Aufgabensammlung. 10. durchges. Aufl. Bearb. Lehmann H., Stähli F. Zürich, Orell Füssli, 1959, 59 S., 9.—Sfr.), Schweiz. Buch, 1959, **A59**, № 12, 279 (нем.)

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

7235. Линейная алгебра. Дынкин Е. Б. В сб.: Матем. в СССР за 40 лет. 1917—1957. Т. I. М., Физматгиз, 1959, 207—212

7236. О некоторых комбинаторных проблемах. Эрдёш, Реньи (On some combinatorical problems. Erdős P., Rényi A.), Publs math., 1956, **4**, № 3-4, 398—405 (англ.)

Через $C_k(n)$ авторы обозначают наименьшее число таких сочетаний по k элементов из n (различных) элементов, что любые два элемента содержатся по крайней мере в одном сочетании. Такая совокупность сочетаний называется (k, n)-системой. Очевидно, что $\binom{k}{2} C_k(n) \geqslant \binom{n}{2}$ и, следовательно,

$$C_k(n) \geqslant \frac{n(n-1)}{k(k-1)}. \qquad (1)$$

Если для некоторых значений k и n в (1) имеет место знак равенства, то говорят, что существует оптимальная (k, n)-система. Сколем доказал, что при $k = P + 1$ и $n = P^r + P^{r-1} + \ldots + P + 1$, где P — степень простого числа и $r \geqslant 1$, оптимальная система существует. Известно также, что существует оптимальная (P, P^r)-система. Эти результаты используются в строительных расчетах. В статье рассматривается асимптотическое поведение $C_k(n)$, а именно, доказывается, что при $k = P$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C_k(n)}{n(n-1)} = \frac{1}{k(k-1)}. \qquad (2)$$

Таким образом, если k — степень простого числа, то существует последовательность асимптотически оптимальных (k, n)-систем. Доказательству предложения (2) предшествует ряд лемм комбинаторного и теоретико-числового характера (относящихся к оценке разности и отношения двух последовательных простых чисел). Если положить

$$c_k(n) = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} C_k(n),$$

то (2) может быть записано в виде:

$$\lim_{n\to\infty} c_k(n) = 1, \text{ если } k = P.$$

В случае, если k — любое, то утверждается, что

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, c_k(n) = 1.$$

В заключение рассматривается следующая проблема. Через $D_k(n)$ обозначается длина кратчайшей последовательности, образованной из цифр 1, 2, ..., n, в которой любые две цифры i и j $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ хотя бы один раз находятся в таком положении, что разделены самое большее k цифрами. Реньи (РЖМат, 1960, 4900) доказал, что

$$\frac{1}{2k-2} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{D_k(n)}{n^2} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{D_k(n)}{n^2} \leqslant \frac{1}{k}.$$

Было доказано существование $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{D_k(n)}{n^2}$ при $k = 2$ и $k = 3$. В настоящей статье доказывается, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{D_k(n)}{n^2}$ существует при любом k. При этом используется (2) и следующая принадлежащая Селе (Szele T., Math.-phys. lapok, 1943, **50**, 223—256) лемма: Если последовательность действительных чисел $\{a_n\}$ ограничена снизу и „почти монотонно убывает", т. е. если $a_n \leqslant a_m(1 + \varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$ и любого $m \geqslant m_0(\varepsilon)$, при $n > n_0(\varepsilon, m)$, то $\{a_n\}$ сходится. А. Г. Школьник

7237. Графическое изображение знака и свойств уравнений второй степени. Вуорио (Ilmaisteen yhtälön juurien laatu ja etumerkki graafisesti kuvattuna. Vuorio Viljo), Mat. aineiden aikakauskirja, 1959, **23**, № 2, 52—55 (финск.)

7238. Наличие рационального множителя и его определение. Сунь Мэй-цзэн, Шусюэ тунбао, 1957, № 11, 12—20 (кит.)

Пусть $F(x_1, \ldots, x_s)$ — многочлен от s переменных с целыми коэффициентами. Пусть $n_1, \ldots, n_s$ и $a_1, \ldots, a_s$ — данные положительные целые числа. Автор объясняет, каким образом найти такой многочлен $G(x_1, \ldots, x_s)$, что $F(a_1^{1/n_1}, \ldots, a_s^{1/n_s})\ G(a_1^{1/n_1}, \ldots, a_s^{1/n_s})$ — целое число. Wang Yuan

7239. Об интерполяции многочленов от нескольких переменных. Стоякович (Sur l'interpolation par polynomes à plusieurs variables. Stojaković Mirko), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 22, 3091—3093 (франц.)

Указывается способ построения многочлена от нескольких переменных, принимающего определенные значения при заданных значениях неизвестных. Пусть A_n — $n \times n$-матрица. Положим $\mathfrak{L}_m A_n = [a_{ij}]$, где $a_{ij} = \delta_{ij} A_n$ ($i, j = 1, 2, \ldots, m$, δ_{ij} — символ Кронекера). В частности, для скаляра α $\mathfrak{L}_m \alpha$ — диагональная $m \times m$-матрица. Обозначим далее через $\mathfrak{M}_m A_n$ матрицу, полученную из A_n применением $\mathfrak{L}_m$ ко всем ее элементам.

Основным результатом работы является формула для получения многочлена $\varphi(x, y, z)$ такого, что $\varphi(x_i, y_j, z_k) = u_{ijk}$ ($0 \leqslant i \leqslant p-1$, $0 \leqslant j \leqslant q-1$, $0 \leqslant k \leqslant r-1$); $\varphi(x, y, z) = U^T (\mathfrak{M}_{qr} A_p^{-1})(\mathfrak{L}_p \mathfrak{M}_r B_q^{-1})(\mathfrak{L}_{pq} C_r^{-1}) U_0$, где U и U_0 — векторы-столбцы, составленные из величин соответственно $x^\nu y^\mu z^\theta$ и $u_{\nu\mu\theta}$, упорядоченных лексикографически; а A_p, B_q, C_r — вандермондовы матрицы для величин x_i, y_j, z_k (формулы их обращения получены в предыдущей работе автора, РЖМат, 1959, 879).

И. З. Розенкноп

7240. Исследование корней кубического уравнения без использования формул Кардано. Кужель А. В., Матем. просвещение, Вып. 4, 1959, 208—209

7241. Решение алгебраических уравнений второй и третьей степени в квадратичном и кубическом полях. Спампинато (La risoluzione delle equazioni algebriche del secondo e terzo grado nel campo biduale e tripotenziale. Spampinato Nicolò. Ricerca, 1954, 5, № 1-2, 15—26; № 3, 12—22; № 4, 13—17) (итал.)

7242. Извлечение квадратного корня из комплексного числа. Стрейчи (On taking the square root of a complex number. Strachey C.), Comput. J., 1959, 2, № 2, 89 (англ.)

7243. Об эквивалентности трех критериев устойчивости многочленов. Гаек (Über die Äquivalenz der drei Stabilitätskriterien. Hájek J.), Z. angew. Math. und Mech., 1959, 39, № 7-8, 332—333 (нем.)

Как известно, вопрос об устойчивости многочлена с действительными коэффициентами $F(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^{n-k}$ можно решить непосредственно (критерий Гурвица) или свести к тому же вопросу о многочлене меньшей степени (критерии Шура и Рауса). Доказывается, что устойчивость многочлена не изменится, если все его коэффициенты с четными (или нечетными) номерами умножить на фиксированное число $b > 0$. Совершенно не применяя комплексных чисел, путем элементарных преобразований детерминантов Гурвица H_m для многочлена $F(x)$ автор показывает, что при $a_1 > 0$

$$\operatorname{sign} H_m = \operatorname{sign} H_{m-1}^*, \quad 1 < m \leqslant n,$$

где все H_{m-1}^* — детерминанты Гурвица для многочлена

$$f(x) = a_0 x^{n-1} + (a_1 a_2 - a_0 a_3) x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + (a_1 a_4 - a_0 a_5) x^{n-4} + \ldots$$

Если же теперь $f_1(x)$ — многочлен, о котором идет речь в критерии Шура, то, делая в нем подстановку $y = x^{-1}$ и деля все коэффициенты с четными номерами на a_0, получаем многочлен $f_1(y) = a f(x)$, где a — положительное действительное число. Так же легко получается критерий Рауса. Имеются опечатки.

Г. В. Дорофеев

7244. Системы линейных уравнений. Грейфф-Браво (Sistemas de ecuaciones lineales. Greiff Bravo Luis de), Dyna (Colombia), 1956, 23, № 72, 75—85 (исп.)

Даются известные необходимые и достаточные условия совместности системы линейных уравнений.

Э. Апарисио

7245. Некоторые замечания о линейных преобразованиях. Дионизиу (Some remarks on linear transformations. Dionísio J. J.), Rev. Fac. ciênc. Univ. Coimbra, 1957, 26, 109—112 (англ.)

Дается более простое доказательство некоторых уже известных теорем о линейных преобразованиях. Интерес представляет распространение одного результата, известного ранее для эрмитовых матриц, на более широкий класс матриц.

Теорема. Пусть A — квадратная матрица порядка n над полем комплексных чисел. Если $\rho(A^2) = \rho(A)$, где $\rho(A)$ — ранг матрицы A, то A содержит главный минор, отличный от нуля, порядок которого равен $\rho(A)$.

А. Ф. Голубчиков

7246. Об одном классе билинейных форм. Осборн (A class of bilinear forms. Osborn Howard A.), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, 90, № 3, 485—498 (англ.)

Пусть K — произвольное поле, характеристика которого $\neq 2$; E — конечномерное линейное пространство над полем K; A — произвольное линейное преобразование пространства E; $C(A)$ — пространство таких билинейных форм $f(u, v)$ над E, что $f(Au, v) = f(u, Av)$ для всех $u, v \in E$; $S(A)$ ($Q(A)$) — пространство таких симметричных (соответственно альтернирующих) форм $f(u, v)$, что форма $f(u, Av)$ также является симметричной (соответственно, альтернирующей). Доказывается, что $C(A) = S(A) \oplus Q(A)$. Пусть R — кольцо всех эндоморфизмов пространства E, $Z(A)$ — централизатор эндоморфизма A в кольце R, а L — подкольцо этого кольца, порожденное элементами $\lambda \in K$ и преобразованием A. Тогда $C(A)$, $Z(A)$, $S(A)$ и E можно рассматривать как L-модули. Пространство E (как L-модуль) разлагается в прямую сумму циклических L-модулей $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_t$, где аннулирующие идеалы $J(E_i) \subseteq L$ модулей E_i удовлетворяют условию $J(E_i) \supseteq J(E_j)$ при $j \geqslant i$. Оказывается, что L-модули $C(A)$ и $Z(A)$ изоморфны, причем каждый из этих модулей разлагается в прямую сумму t^2 циклических L-модулей, $(2t-2j+1)$ из которых изоморфны модулю E_j', сопряженному с модулем E_j ($j = 1, \ldots, t$). В качестве следствия получается результат Фробениуса

$$\dim_K Z(A) = \sum_{j=1}^{t} (2t - 2j + 1) \dim_K E_j'.$$

Доказывается, что имеет место прямое разложение $Z(A) = Z_1(A) \oplus Z_2(A)$, где L-модуль $Z_1(A)$ замкнут относительно йорданова умножения ($\{b, c\} = bc + cb$), а L-модуль $Z_2(A)$ — относительно умножения Ли ($[b, c] = bc - cb$). Более того, $Z_1(A)$ является прямой суммой $\frac{1}{2} t(t+1)$ циклических L-модулей, $(t - i + 1)$ из которых изоморфны модулю E_i ($i = 1, \ldots, t$), а $Z_2(A)$ — прямой суммой $\frac{1}{2}(t-1)t$ циклических L-модулей, $(t-i)$ из которых изоморфны E_i' ($i = 1, \ldots, t-1$). Если E — циклический L-модуль, то L-модули $S(A)$ и L изоморфны, а $Q(A)$ — нулевой L-модуль. В заключение доказан ряд теорем о матричных представлениях модуля $C(A)$.

С. Д. Берман

7247. Количественная формулировка закона инерции Сильвестра. Островский (A quantitative formulation of Sylvester's law of inertia. Ostrowski A. M.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1959, 45, № 5, 740—744 (англ.)

Доказывается следующая теорема, обобщающая известный закон инерции Сильвестра:

Пусть H — эрмитова матрица порядка n, $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ — ее собственные значения, S — произвольная действительная невырожденная матрица того же порядка, $\Lambda_1 \leqslant \Lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \Lambda_n$ — собственные значения матрицы S^*HS, p_1 и p_n — минимальное и максимальное собственные значения положительно определенной матрицы S^*S. Тогда $\Lambda_\nu = \theta_\nu \lambda_\nu$, где $p_1 \leqslant \theta_\nu \leqslant p_n$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$.

Показывается, что этот результат лучший и при фиксированной матрице S, и при фиксированной матрице H. Кроме того, если S — вырожденная матрица, то теорема остается верной по непрерывности и дает в этом случае аналог закона инерции для вырожденных матриц. Г. В. Дорофеев

7248. Относительно ограниченные по норме матричные алгебры и группы. Мотт, Шнейдер (Matrix algebras and groups relatively bounded in norm. Mott J. L., Schneider Hans), Arch. Math., 1959, **10**, № 1, 1—6 (англ.)

В алгебре C_n всех комплексных $n \times n$-матриц норма $\nu(A)$ определяется постулатами: 1) $\nu(A) > 0$, если $A \neq 0$, 2) $\nu(\lambda A) = |\lambda| \nu(A)$, 3) $\nu(A+B) \leqslant \nu(A) + \nu(B)$, 4) $\nu(AB) \leqslant \nu(A)\nu(B)$. Доказывается, что всегда $\nu(A) \geqslant \rho(A)$, где $\rho(A)$ — наибольший из модулей характеристических чисел матрицы A. Некоторая норма называется минимальной для подмножества из C_n, если на этом подмножестве всегда $\nu(A) = \rho(A)$. Минимальность нормы выясняется путем исследования отношения $\nu(A)/\rho(A)$. Если это отношение ограничено на некотором подмножестве из C_n, то это подмножество называется относительно ограниченным, причем это понятие не зависит от выбора индивидуальной нормы (РЖМат, 1956, 6305).

В дополнение к результату Хаусхолдера (РЖМат, 1958, 6811) устанавливаются необходимые и достаточные условия минимальности нормы по отношению к отдельной матрице A. Доказывается существование минимальной нормы для любой относительно ограниченной матричной алгебры и для некоторых относительно ограниченных матричных групп. Показывается, что матричная алгебра является относительно ограниченной лишь тогда, когда она состоит из матриц, одновременно приводящихся к диагональному виду. Ф. Р. Гантмахер

7249. Добавление к работе «Метод анализа устойчивости, основанный на теории характеристических чисел матриц». Шварц (Nachtrag zu «Verfahren zur Stabilitätsfrage bei Matrizen-Eigenwertproblemen». Schwarz Hans-Rudolf), Z. angew. Math. und Phys., 1958, **9**, № 1, 79—80 (нем.)

Отмечается что цитированный в работе (РЖМат, 1958, 8785) критерий цепных дробей был первоначально высказан и доказан Уоллом для многочленов с действительными коэффициентами (Wall H. S., Amer. Math. Monthly, 1945, **52**, 308—32). Обобщение на случай многочленов с комплексными коэффициентами было сделано Франком (Frank E., Bull. Amer. Math. Soc., 1946, **52**, 144—158). И. З. Розенкноп

7250. Матрицы все элементы и миноры которых равны 1, —1 или 0. Сидербаум (Matrices all of whose elements and subdeterminants are 1, — 1 or 0. Cederbaum I.), J. Math. and Phys., 1958, **36**, № 4, 351—361 (англ.)

Прямоугольную или квадратную матрицу, все элементы и миноры которой равны 1, —1 или 0, автор называет E-матрицей. Такие матрицы играют важную роль в теории электрических сетей и ряде других вопросов. В работе устанавливаются следующие свойства E-матриц:

1. Обратная матрица для неособенной E-матрицы является также E-матрицей.

2. Прямая сумма E-матриц является E-матрицей.

3. Чтобы матрица A была E-матрицей, необходимо и достаточно, чтобы в предположении, что $(n-1)$ координата из $2n$ координат x_i, y_i $(i = 1, \ldots, n)$ равна нулю, можно найти такую пару векторов $x = (x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, которая удовлетворяет уравнению $y = Ax$, причем остальные координаты x_i, y_i $(i = 1, \ldots, n)$ равны 1, — 1 или 0.

4. Если A — квадратная E-матрица, представимая в виде $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, где A_{22} — неособенная подматрица, то матрица

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}, & A_{12}A_{22}^{-1} \\ A_{21}A_{22}^{-1}, & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

является также E-матрицей.

Далее автор рассматривает структурные свойства E-матриц, важнейшими из которых являются следующие:

5. Пусть дана неособенная E-матрица. Фиксируем две какие-либо ее строки (столбца). Тогда существует по меньшей мере один такой столбец (строка), что на пересечении его с одной из фиксированных строк (столбцов) находится элемент, равный нулю, а с другой — отличный от нуля.

6. В E-матрице не может существовать 3×4 подматрицы вида

$$F = f_{ij} = \begin{bmatrix} x & x & 0 & x \\ x & x & x & 0 \\ x & 0 & x & x \end{bmatrix},$$

где x обозначает элемент, отличный от нуля.

В заключение работы рассматривается представление матриц в форме $K = ADA'$, где A — E-матрица и D — диагональная матрица с постоянными и положительными элементами по диагонали. Устанавливаются следующие предложения:

7. Необходимым условием представимости симметрической матрицы в форме $K = ADA'$ является следующее: любой главный минор матрицы K не меньше, чем модуль любого другого минора, образованного теми же строками (или столбцами).

8. Два представления $K = ADA' = BFB'$, где D и F — диагональные матрицы с положительными элементами, A и B — неособенные E-матрицы могут отличаться лишь порядком и знаком столбцов матриц A и B и порядком элементов матриц D и F.

А. Ф. Голубчиков

7251. Принципы максимума в теории матриц. Мирский (Maximum principles in matrix theory. Mirsky L.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1958, **4**, № 1, 34—37 (англ.)

Для $n \times n$-матрицы $A = \| a_{ij} \|_1^n$ вводятся обозначения: $s_1(A) \geqslant s_2(A) \geqslant \ldots \geqslant s_n(A)$ — характеристические числа матрицы AA^*, $[A]_k = \| a_{ij} \|_1^k$, $E_j(z_1, \ldots, z_n)$ — j-ая элементарная симметрическая функция от $z_1, \ldots, z_n$ и $E_j(A)$ — j-ая элементарная симметрическая функция от характеристических чисел матрицы A. Устанавливаются теоремы:

Теорема 1. Если $A_1, \ldots, A_m$ — заданные $n \times n$-матрицы и $\sigma_i = s_i(A_1) \ldots s_i(A_m)$ $(i = 1, \ldots, n)$, то

$$\sup | E_j([U_1 A_1 \ldots U_m A_m U_{m+1}]_k | = E_j(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$$
$$(j, k = 1, \ldots n),$$

где верхняя граница берется относительно любой совокупности унитарных матриц $U_1, \ldots, U_{m+1}$.

Теорема 2. Если $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ — характеристические числа нормальной матрицы N и $|\omega_1| \geqslant |\omega_2| \geqslant \ldots \geqslant |\omega_n|$, то

$$\sup_{U,V} E_j([V^*(N^*U^*)^r(UN)^rV]_k) = E_j(|\omega_1|^{2r}, \ldots, |\omega_k|^{2r})$$
$$(j, k = 1, \ldots, n),$$

где r — произвольное целое положительное число, а верхняя граница берется относительно всех пар унитарных матриц U и V.

Теорема 3. Если H — неотрицательная эрмитова матрица с характеристическими числами $\omega_1 \geqslant \omega_2 \geqslant \ldots \geqslant \omega_n$, то $\sup E_j([U^*HU]_k) = E_j(\omega_1, \ldots, \omega_k)$ $(j, k = 1, \ldots, n)$, где верхняя граница берется относительно всех унитарных матриц U.

Теорема 1 для случаев $k = 1$ и $k = n$ была установлена Фань Цюем (Fan Ky, Proc. Nat. Acad. Sci., 1949, 35, 65—655; 1950, 36, 31—35), а для любого $k \leqslant n$ Маркусом и Мойлсом (РЖМат, 1955, 4054). Здесь дается более элементарное доказательство. Теорема 2 для случая $j = 1$ и теорема 3 для случаев $j = 1$ и $j = k$ содержатся в упомянутых работах. Ф. Р. Гантмахер

7252. Об устойчивости полиномов и матриц. Пассакуиндичи (Sulla stabilità dei polinomi e delle matrici. Passaquindici Maria), Ann. Scuola norm. super. Pisa Sci. fis. e mat., 1959, 13, № 1, 77—88 (итал.)

Пусть A и M — действительные квадратные матрицы. Для их суммы A' в ряде частных случаев (когда заданы те или другие соотношения между элементами матриц A и M) получены достаточные условия для того, чтобы матрица A' была положительно определенной, и достаточные условия для того, чтобы A' была устойчивой (т. е. чтобы ее характеристический полином был полиномом Гурвица). Рассматривается также вопрос о том, в каком случае полином Гурвица остается таковым, если увеличить значение одного из его коэффициентов на величину ν; необходимые и достаточные условия для этого состоят в том, чтобы некоторые полиномы относительно ν имели положительные значения. В. К. Туркин

7253 К. Элементы теории определителей, матриц и тензоров для инженеров. Стайгант (The elements of determinants, matrices and tensors for engineers. Stigant Stanley Austen. London, Macdonald, (1959, XI, 433 pp., 60 sh.) Brit. Nat. Bibliogr., 1959, № 510, 7 (англ.)

7254 К. Матрицы и определители. По соответствующим лекциям по высшей математике, прочитанным в Высшей школе тяжелого машиностроения. Мантёйффель (Matrizen und Determinanten. Nach d. entsprechenden Kap. d. Vorlesg Höhere Mathematik geh. an d. Hochschule f. Schwermaschinenbau, Magdeburg. Manteuffel Karl. Berlin, Dtsch. Verl. Wiss., 1957, 70 S.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, B, № 24, 2202 (нем.)

7255 К. Элементарная матричная алгебра. Хон (Elementary matrix algebra. Hohn Franz E. New York, Macmillan Co., 1958, 316 pp., ill., 10.00 doll.), Publishers' Weekly, 1958, 174, № 25, 95 (англ.)

7256 К. Теория матриц. Часть 2. Гантмахер (Matrizenrechnung. Teil 2. Spezielle Fragen und Anwendungen. Gantmacher F. R. Übers. aus dem Russ. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1959, VIII, 244 S., ill., 26 DM) (нем.)

Перевод с русского (РЖМат, 1953, 5053К).

7257 К. Основы теории матриц. Каэн (Eléments de calcul matriciel. 2-e éd. Cahen Gilbert. Paris, Dunod, 1959, VI, 104 p., ill.) (франц.)

Второе издание книги (РЖМат, 1955, 9787).

7258 К. Курс специальной математики. I. Линейная алгебра, дополнение к тому I, программа 27 июня 1956 г. Каньяк (Cours de mathématiques spéciales. I. Algèbre linéaire, complément du tome 1-er, programme du 27 juin 1956. Cagnac Georges. Paris, Masson et Cie, 1958, 187 p., ill., 2250 fr.), Bibliogr. France. 1958, 147, № 24, 638 (франц.)

7259 К. Векторная алгебра. Системы линейных уравнений. Ташнади, Керменди (Műszaki matematikai gyakorlatok. A. IX. Vektoralgebra lineáris egyenletrendszerek. Tasnády István, Körmendi István. Budapest, Tankönyvkiadó, 1954, 187 l., ill., 26 Ft.) (венг.)

Сборник задач для втузов. Нужные понятия и теоремы излагаются в начале глав. Большинство задач подробно разработано. Содержание: Решение геометрических задач векторно-алгебраическим путем без помощи и с помощью координат; Приложения к статике; Системы линейных уравнений. J. Bognár

ГРУППЫ

7260. О неразложимых представлениях конечной группы. Грин (On the indecomposable representations of a finite group. Green J. A.), Math. Z., 1959, 70, № 5, 430—445 (англ.)

Пусть G — конечная группа порядка $h \equiv 0 \pmod p$, а K — поле характеристики p. Если H — подгруппа группы G, то G-K-модуль, индуцированный H-K-модулем $\mathfrak{M}$, обозначается через $\mathfrak{M}^G$, а H-K-модуль, индуцированный G-K-модулем $\mathfrak{N}$, обозначается через $\mathfrak{N}_H$. G-K-модуль $\mathfrak{N}$ называется H-проективным, если $\mathfrak{N}$ является прямым слагаемым индуцированного модуля $\mathfrak{M}^G$, где $\mathfrak{M}$ — H-K-модуль. Как показал Хигман (РЖМат, 1955, 4051), каждый G-K-модуль $\mathfrak{N}$ H-проективен, если подгруппа H содержит силовскую p-подгруппу группы G. Автор доказывает, что каждому неразложимому G-K-модулю $\mathfrak{N}$ соответствует определенная с точностью до сопряженности p-подгруппа $P = G$ (вертекс модуля $\mathfrak{N}$) такая, что $\mathfrak{N}$ — P-проективный модуль, и для любой подгруппы $H \supset P$ модуль $\mathfrak{N}$ не является H-проективным. Неразложимый P-K-модуль $\mathfrak{N}_1$ называется источником G-K-модуля $\mathfrak{N}$, если P — вертекс модуля $\mathfrak{N}_1$, и $\mathfrak{N}$ является прямой компонентой модуля $\mathfrak{N}_1^G$. Доказывается, что два источника $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$, соответствующие одному и тому же неразложимому G-K-модулю $\mathfrak{N}$ и вертексу P, удовлетворяют условию $\mathfrak{N}_1 \cong g\mathfrak{N}_2$, где $g \in G$ — некоторый элемент нормализатора подгруппы P в G. Если $\mathfrak{N}$ — неразложимый G-K-модуль, P' — силовская p-подгруппа группы G, и разложение индуцированного модуля $\mathfrak{N}_P$ в прямую сумму неразложимых P'-K-модулей имеет вид $\mathfrak{N}_{P'} = \mathfrak{N}_1 + \ldots + \mathfrak{N}_r$, то вертекс каждого из модулей $\mathfrak{N}_i$ принадлежит вертексу модуля $\mathfrak{N}$ и при этом вертекс по крайней мере одного из P'-K-модулей $\mathfrak{N}_i$ совпадает с вертексом G-K-модуля $\mathfrak{N}$. Этот результат показывает, что нахождение вертексов неразложимых модулей для любой группы сводится к такой же задаче для p-групп. Отсюда, в частности, вытекает, что $\{1\}$-проективные G-K-модули (т. е. прямые компоненты регулярного представления группы G над полем K) разлагаются в прямую сумму P'-K-модулей (P'-силовская p-подгруппа группы G), изоморфных групповой алгебре $R(P', K)$. Следствием этого факта является известный результат Диксона (Dickson L. E., Trans. Amer. Math. Soc., 1907, 8, 389—398):

Степени неразложимых компонент регулярного представления группы G над полем K делятся на порядок силовской p-подгруппы этой группы. Показывается, что каждая p-подгруппа группы G является вертексом некоторого неразложимого G-K-модуля. Если G — p-группа, H — подгруппа группы G, K — алгебраически замкнутое поле, а $\mathfrak{M}$ — неразложимый H-K-модуль, то индуцированный G-K-модуль $\mathfrak{M}^G$ также неразложим. (Автор

отмечает, что ему известен пример, опровергающий эту теорему для произвольного поля K). В качестве следствия доказывается, что транзитивная p-группа подстановок, рассматриваемая как группа линейных преобразований над полем характеристики p, неразложима. (Это утверждение является очевидным следствием того факта, что любой идеал групповой алгебры p-группы над полем характеристики p неразложим в прямую сумму идеалов. *Реф.*). Далее показывается, что размерность неразложимого G-K-модуля $\mathfrak{M}$ над полем K, где K — алгебраически замкнутое поле, делится на индекс вертекса модуля $\mathfrak{M}$ в силовской p-подгруппе группы G. Каждому неразложимому представлению Γ группы G над полем K можно поставить в соответствие комплексный модулярный характер $\varphi(g)$, определенный на множестве p-регулярных элементов группы. Если P_1 и P_2 — две p-подгруппы группы G, то через $s(P_1 : P_2)$ обозначается наибольшее из таких чисел n, что p^n делит индекс $(P_1 : g^{-1}P_2 g \mid P_1)$ для всех $g \in G'$. Автор доказывает, что для модулярного характера $\varphi(g)$, соответствующего неразложимому представлению Γ группы G над алгебраически замкнутым полем K, выполняется сравнение $\varphi(g) \equiv 0 \pmod{p^{s(P : P'_g)}}$, где P — силовская p-подгруппа группы G, а P'_g — силовская p-подгруппа нормализатора элемента g в группе G. Далее рассматривается теория блоков для неразложимых представлений группы G над полем K. Каждый неразложимый G-K-модуль $\mathfrak{M}$ определяет представление $z \to \Gamma(z)$ центра Z групповой алгебры $R(G, K)$, где все собственные числа матрицы $\Gamma(z)$ равны одному и тому же числу $\lambda_z \in K$. Тогда функция $\varphi(z) = \lambda(z)$ является линейным характером подалгебры Z над полем K. Множество неразложимых G-K-модулей $\mathfrak{M}$, определяющих один и тот же линейный характер центра $\varphi(z)$, называется блоком B_φ, ассоциированным с этим характером.

Доказывается следующее обобщение упомянутого выше результата Хигмана: Пусть K_α — сумма элементов класса сопряженных элементов C_α в алгебре $R(G, K)$, а P_α — силовская p-подгруппа нормализатора элемента $g_\alpha \in C_\alpha$ (дефектная подгруппа класса C_α). Если $\varphi(K_\alpha) \neq 0$, то модуль $\mathfrak{M} \in B_\varphi$ является P_α-проективным. Дефектом блока B_φ называется такое наименьшее целое число d, что p^{a-d} делит степени всех неприводимых представлений, принадлежащих этому блоку (p^a — порядок силовской p-подгруппы группы G). Согласно результатам Р. Брауэра (РЖМат, 1957, 128) блоку B_φ с дефектом d соответствует определенная с точностью до сопряженности дефектная группа блока — дефектная подгруппа P_α такого p-регулярного класса C_α, что $\varphi(K_\alpha) \neq 0$ и $(p_\alpha : 1) = p^d$. Доказывается, что дефектная подгруппа P_α блока B_φ является вертексом хотя бы одного неприводимого G-K-модуля $\mathfrak{M} \in B_\varphi$ и что вертексы всех G-K-модулей $\mathfrak{M} \in B_\varphi$ содержатся в этой дефектной подгруппе.

С. Д. Берман

7261. О числе неприводимых характеров конечной группы в одном блоке. Брауэр, Фейт (On the number of irreducible characters of finite groups in a given block. Brauer Richard, Feit Walter), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1959, **45**, № 3, 361—365 (англ.)

Пусть неприводимые комплексные характеры $\chi_1, \ldots, \chi_m$ конечной группы G порядка g образуют p-блок B с дефектом d. Если $p^r l$ — наибольшая степень простого числа p, на которую делится степень n_l характера χ_l, то положим $\lambda_l = a_l - d$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Доказаны следующие результаты: 1) $m < \frac{1}{4} p^{2d} + 1$; 2) если $d \geqslant 2$, то $\lambda_l = d - 2$ $(i = 1, \ldots, m)$, а при $d = 0, 1, 2$ $\lambda_l = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$; 3) если хотя бы для одного i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ $\lambda_l > 0$, то $m \leqslant \frac{1}{2} p^{2d-2}$; 4) $m < p^d$, если $d = 0, 1, 2$, и $m < p^{2d-2}$ при $d > 2$.

Если дефектная группа D блока B циклична (см. Алгебр. реф. сб. М., Изд-во ин. лит., 1948, реф. 536, 537), то $m \leqslant p^d$; 5) если B — блок с максимальным дефектом a $(g = p^a q\,(q, p) = 1)$ и если центр силовской p-подгруппы группы G содержит элемент порядка p^β, то $\lambda_l \leqslant a - \beta$.

Высказывается предположение, что имеет место неравенство $m \leqslant p^d$.

С. Д. Берман

7262. Диэдральные группы и типы неабелевых конечных групп. Амато (Gruppi diedrali e tipi dei gruppi non abeliani finiti. Amato Vincenzo. Matematiche, 1955, **10**, 149—152) (итал.)

7263. Другое доказательство теоремы Коши о группах. Мак-Кей (Another proof of Cauchy's group theorem. McKay James H.), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 2, 119 (англ.)

7264. О задаче Артина. Брауэр, Рейнолдс (On a problem of E. Artin. Brauer Richard, Reynolds W. F.), Ann. Math., 1958, **68**, № 3, 713—720 (англ.)

Артин (РЖМат, 1956, 2679; 1957, 118) предположил, что простые группы порядка g, где $g \equiv 0 \pmod{p}$ (p—простое) и $p > q^{3/2}$ принадлежат к известным типам простых групп. Авторы доказывают теорему, подтверждающую гипотезу Артина: Неабелева простая группа с указанным выше свойством изоморфна или группе $L_2(p)$ ($p > 3$ — простое), или группе $L_2(p-1)$, где $p > 3$ — простое число вида $2^n + 1$. ($L_2(m)$ — группа унимодулярных коллинеаций дезаргова проективной плоскости над полем из m элементов). Эта теорема является следствием следующего предложения: Если G—группа порядка pq $((p, q) = 1$; p — простое), совпадающая со своим коммутантом, то число подгрупп порядка p группы G равно $1 + rp$, где $r = (hup + u^2 + u + h)/(u+1)$ (u, h— натуральные числа), за исключением тех случаев, когда G допускает эпиморфизм на группу $L_2(p)$ ($p > 3$) или группу $L_2(p-1)$ ($p = 2^n + 1$; $p > 3$). Для доказательства существенно используются результаты о „первом блоке" характеров группы G, полученные в предыдущих работах Брауэра (Алгебраич. реф. сб., 1948, реф. 532, 535).

С. Д. Берман

7265. Семейство разностных множеств. Стантон, Спротт (A family of difference sets. Stanton R. G., Sprott D. A.), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 1, 73—77 (англ.)

Подмножество D конечной группы $\mathfrak{G}$ называется разностным множеством и обозначается через $(\mathfrak{G}, D)$ если каков бы ни был элемент $x \in \mathfrak{G}$, $x \neq 1$, существуют λ различных пар (d_1, d_2) таких, что $x = d_1^{-1} d_2$, и λ различных пар (d_3, d_4) таких, что $x = d_3 d_4^{-1}$. Разностное множество $(\mathfrak{G}, D)$ называется абелевым, соответственно циклическим, если группа $\mathfrak{G}$ абелева, соответственно циклическая. Числа λ, порядок v группы $\mathfrak{G}$ и число k элементов из D называются параметрами разностного множества $(\mathfrak{G}, D)$.

В работе строятся абелевы разностные множества с параметрами $v = p^n(p^n + 2)$, $k = \frac{1}{2}(v-1)$, $\lambda = \frac{1}{4}(v-3)$, где $p^n + 2 = q^m$, а p и q — простые числа. В качестве группы $\mathfrak{G}$ берется прямая сумма полей $GF(p^n)$ и $GF(q^m)$. Далее рассматриваются частные примеры для $p = 3, 5, 7$. Второй пример совпадает с примером Холла (РЖМат,

1960, 3781). Третий пример не тождественен примеру Холла циклического разностного множества с теми же параметрами. В. Д. Белоусов

7266. Нормальные делители в структурных гомоморфизмах между конечными группами. Цакер (Sottogruppi normali negli omomorfismi strutturali tra gruppi finiti. Zacher Giovanni), Rend. Semin. mat. Univ. Padova, 1958, **28**, № 2, 221—224 (итал.)

Пусть G, $\overline{G}$ — конечные группы, φ — структурный гомоморфизм между ними. Исследуется вопрос, при каких условиях этот гомоморфизм нормальному делителю одной из упомянутых групп ставит в соответствие нормальный делитель другой группы? Как известно (РЖМат, 1957, 5371), $G = N|H$, где N — нормальный делитель группы G, для которого $\varphi(N)$ совпадает с $\overline{1}$ группы $\overline{G}$; порядок H взаимно прост с порядком N. $H = C|K$, где K — нормальный делитель H, порядки C и K взаимно просты. H содержит нормальный делитель R порядка 2 или 1, причем структурному гомоморфизму φ между G и $\overline{G}$ соответствует структурный изоморфизм ψ между K/R и $\overline{K} = \varphi(K)$. Доказаны теоремы:

1. Если T — нормальный делитель группы G, то $\varphi(T)$ является нормальным делителем группы $\varphi(G)$ в том и только в том случае, если $\varphi(T|K)$ является нормальным делителем группы $\varphi(K)$.

2. Пусть φ — структурный гомоморфизм между конечными группами G, $\overline{G}$; $\overline{T}$ — нормальный делитель группы $\overline{G}$. Группа G содержит такой нормальный делитель T, что $\varphi(T) = \overline{T}$ в том и только в том случае, если $\psi^{-1}(\overline{T}|\overline{K})$ является нормальным делителем группы K/R. В. К. Туркин

7267. О структуре метабелевых групп. Такэта (Über die Struktur der metabelschen Gruppen. Taketa Kiyosi), Proc. Internat. Sympos. Algebr. Number Theory, 1955, Tokyo, 1956, 257—259 (нем.)

Краткий обзор исследований автора, посвященных изучению инвариантов фактор-группы G/A максимальной метабелевой группы G, для которой A является заданным максимальным абелевым нормальным делителем. Применяемый метод использует представления абелевых p-групп треугольными матрицами с элементами из конечного поля. Подробное изложение результатов с их доказательствами содержится в другой статье (РЖМат, 1960, 1381). З. И. Боревич

7268. О транзитивных импримитивных группах с радикалом в четырехмерном комплексном пространстве. Заботин Я. И., Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1958, № 6, 73—85

В предыдущей работе (РЖМат, 1960, 3816) автором найдены все полупростые транзитивные импримитивные группы преобразований комплексного четырехмерного пространства; здесь он исследует возможность расширения этих групп путем присоединения к ним радикала, причем используется прием, примененный в трехмерном случае Ким Сен Еном и референтом (РЖМат, 1957, 1171). В конце работы приведена таблица всех возможных полупростых транзитивных импримитивных групп преобразований четырехмерного комплексного пространства и для каждой из них указаны возможные присоединения радикалов; эта таблица резюмирует результаты реферируемой и цитированной работ автора. Точка зрения всюду инфинитезимальная; группы преобразований задаются их операторами (алгебрами Ли дифференциальных операторов). В. В. Морозов

7269. О группах, совпадающих со своим коммутантом. Патер (Despre grupuri care coincid cu grupul lor comutator. Pater Z.), Studii şi cercetări mat. Acad. RPR Fil. Cluj, 1958, **9**, № 1-4, 245—247 (рум.; рез. русск., франц.)

Теорема. Группа является совершенной тогда и только тогда, когда она не содержит нормальных делителей простого индекса.

Следствие. Если конечная группа A содержит отличную от единичного элемента совершенную подгруппу то она содержит и последовательность подгрупп $A = A_1 = A_2 = \ldots = A_k$ со свойством, что каждый член последовательности является нормальным делителем предыдущего, а последний член — совершенной группой.

Конечная группа разрешима тогда и только тогда, когда она не содержит совершенных подгрупп, за исключением тривиальной подгруппы, состоящей из единичного элемента. Резюме автора

7270. Замечания к работе «Поляритеты и прямые разложения групп». Коржинек (Bemerkung zu der Arbeit: «Die Anwendung der Polarität auf die direkten produktzerlegungen einer Gruppe» von František Sik. Kořínek Vladimír), Чехосл. матем. ж., 1956, **6**, № 1, 139 (нем.)

См. РЖМат, 1957, 1213.

7271. О полноте голоморфа. Переманс (Volledigheit van holomorfen. Peremans W.), Rapp. Math. centrum, 1957, № ZW-016, 1—7 (гол.)

Группа называется полной или совершенной, если ее центр совпадает с единичным элементом и всякий ее автоморфизм является внутренним. Как известно, полная группа, являющаяся нормальным делителем какой-либо группы, является также прямым множителем этой группы. Приведены (без доказательства) формулировки следующих теорем:

1. Группа G в том и только в том случае является прямым множителем своего голоморфа, если G или полная группа или прямое произведение группы порядка 2 и полной группы, не имеющей подгрупп индекса 2.

2. Абелева (аддитивная) группа G, допускающая автоморфизм 2 (т. е. $x \to 2x$), имеет голоморф, не являющийся полной группой, в том и только в том случае, если G является прямым произведением своих подгрупп B и C, причем 1) $B \neq 0$; 2) $\mathrm{Hom}(C, B) = 0$; 3) существует изоморфное отображение $x \to \delta(x)$ B группы B на $\mathrm{Hom}(B, C)$; 4) существует такая функция $f(x)$ ($x \in B$, $f(x) \in B$), дающая отображение B на B, что $\delta(x)+y = \delta(y)+f(x)$ для всех x, $y \in B$. (Под $\mathrm{Hom}(G_1, G_2)$ подразумевается совокупность гомоморфных отображений G_1 в G_2).

3. Абелева группа G, допускающая автоморфизм 2, имеет голоморф, являющийся полной группой, в том и только в том случае, если выполняется по крайней мере одно из следующих условий: A) G неразложима в прямую сумму; B) G является прямой суммой циклических групп; C) $G = nG$ для любого натурального n. В. К. Туркин

7272. К теории бесконечных разрешимых групп. Мухаммеджан Х. Х., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, **4**. М., АН СССР, 1959, 12—13

7273. *FN*-подгруппы бесконечных групп. Гольберг П. А., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 4, 226—227

7274. Характеристика одномерной унимодулярной группы над конечным полем. Брауэр, Судзуки, Уолл (A characterization of the onedimensional unimodular projective groups over finite fields. Brauer R., Suzuki M., Wall G. E., Illinois J. Math., 1958, **2**, № 4B, 718—745 (англ.)

Пусть q — степень простого числа, а $LF(2, q)$ — группа всех дробно-линейных преобразований вида $z' = \dfrac{az+b}{cz+d}$, где a, b, c, d — элементы конечного поля $GF(q)$ и $ad - bc = 1$. При $q \geqslant 4$ группа $LF(2, q)$ проста.

Доказывается теорема. Пусть Γ — конечная группа четного порядка, удовлетворяющая двум следующим условиям: 1) если A и B — циклические подгруппы четно-

го порядка группы Γ, причем $A, B \neq 1$, то в Γ существует циклическая подгруппа C, содержащая A и B; 2) коммутант группы Γ совпадает с Γ. Тогда группа Γ изоморфна группе $LF(2, q)$, где $q \geqslant 4$.

Д. А. Супруненко

7275. О применении бинарных моделей в теории характеров симметрической группы. Комет (Über die Anwendung von Binärmodellen in der Theorie der Charaktere der symmetrischen Gruppen. Comét Stig), Numer. Math., 1959, **1**, № 2, 90—109 (нем.)

Выводится ряд формул, связанных с разбиением натурального числа n, позволяющих осуществить вычисление характеров симметрической группы S_n на электронной счетной машине.

С. Д. Берман

7276. Полиномы Холла и характеры групп $GL(n, q)$. Грин (Les polynomes de Hall et les caractères des groupes $GL(n, q)$. Green J. A.), Colloque d'algèbre supérieure tenu à Bruxelles du 19 au 22 décembre 1956. Centre belge rech. math., Louvain, ets. Ceuterick, 1957, 207—215 (франц.)

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ $(\lambda_i \geqslant 0)$ — разбиение натурального числа n, p — простое число, а C_λ — прямая сумма циклических групп порядков $p^{\lambda_1}, \ldots, p^{\lambda_n}$. Разбиение λ называется типом группы G_λ. Каждой невозрастающей цепочке подгрупп

$$G_\lambda = G^{(0)} \supseteq G^{(1)} \ldots \supseteq G^{(k)} = 0 \qquad (1)$$

группы G_λ можно сопоставить последовательность разбиений $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$, характеризующих тип факторов $G^{(0)}/G^{(1)}, \ldots, G^{(k-1)}/G^{(k)}$. Обозначим через $g^{(\lambda)}_{\alpha, \beta, \ldots, \gamma}(p)$ число цепей вида (1) в группе G_λ, факторы которых соответственно имеют типы $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$. Холл показал, что $g^{(\lambda)}_{\alpha, \beta, \ldots, \gamma}(p)$ при фиксированных разбиениях λ, α, β, $\ldots$, γ является целочисленным полиномом от p. Полиномы Холла определяют градуированную алгебру конечных p-групп, где закон умножения задается формулой $G_\alpha \cdot G_\beta = \sum_\lambda g^{(\lambda)}_{\alpha\beta}(p)\, G_\lambda$.

В предыдущей работе автора полиномы Холла были применены для вычисления характеров группы $GL(n, q)$ (РЖМат, 1957, 119). В настоящей заметке автор показывает, что изучение соотношений между характерами этой группы позволяет получить для алгебры Холла ряд формул, прямое доказательство которых неизвестно.

С. Д. Берман

7277. Анализ характеров линейных представлений полной линейной группы. Фаулкс (The analysis of the characters of the Lie representations of the general linear group. Foulkes H. O.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 3, 497—501 (англ.)

Пусть K — свободное кольцо Ли с n образующими, а R — модуль, порожденный формами степени m от этих образующих. Тогда каждая невырожденная матрица степени n естественным образом определяет линейное преобразование $L_m(A)$ модуля R, а соответствие $A \xrightarrow{\Gamma} L_m(A)$ называется m-м линейным представлением полной линейной группы G. Брандт (Алгебр. реф. сб. М., Изд-во ин. лит., 1948, реф. 353) получил формулу для характера представления Γ:

$$\gamma_m(A) = \frac{1}{m} \sum_{d \mid m} \mu(d)\, S_d^{m/d},$$

где $\mu(d)$ — функция Мёбиуса, а S_d — сумма d-х степеней собственных чисел матрицы A. Известно, что $S_d^{m/d} = \sum_\lambda \chi^\lambda_{d^{m/d}}\{\lambda\}$, где λ — разбиение числа n, $\{\lambda\}$ — S-функция, а χ^λ_ρ — значение неприводимого характера χ^λ симметрической группы S_n, соответствующего разбиению λ, на классе (ρ) (ρ — разбиение). Автор указывает метод вычисления характеров $\chi^\lambda_{d^{m/d}}$ и выводит некоторые соотношения для коэффициентов a_λ, с которыми S-функции $\{\lambda\}$ входят в разложение характера γ_m.

С. Д. Берман

7278. Лекция профессора Робинсона о представлениях симметрических групп. Сугаку, 1959, **10**, № 3, 190—192 (японск.)

7279. Теория групп Ли. Дынкин Е. Б. В сб.: Матем. в СССР за 40 лет. 1917—1957. Т. 1. М., Физматгиз, 1959, 213—227

7280. Полупростые подгруппы вещественных групп. Карлелевич Ф. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 10—11

7281. Отношения включения между транзитивными компактными группами преобразований. Онищик А. Л., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 2, 223—224

7282. Пространство петель на группе Ли. Ботт (The space of loops on a Lie group. Bott Raoul), Michigan Math. J., 1958, **5**, № 1, 35—61 (англ.)

Пусть K — связная компактная группа Ли, $\Omega' K$ — связная компонента единицы в пространстве ΩK всех петель на K, выходящих из единицы e, $s(t)$ — однопараметрическая подгруппа группы K, для которой $s(1) = e$, K_s — централизатор подгруппы s в K. Тогда соответствие $k \to ks(t)k^{-1}s(t)^{-1}$ $(k \in K)$ определяет отображение g^s многообразия $K^s = K/K_s$ в $\Omega' K$. Пусть T — максимальный тор группы K, содержащий $s(t)$, F — его универсальное накрывающее пространство. Обозначим через s конец пути в F, выходящего из нуля и накрывающего $s(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, а через Λ_s решетку в F, порожденную образами элемента s при действии группы Вейля. Подгруппа s называется порождающей, если каждая гиперплоскость диаграммы группы K пересекается с Λ_s. Через $H_*(X)$ и $H^*(X)$ обозначаются соответственно группы гомологий и когомологий пространства X с целыми коэффициентами. Опираясь на результаты своей совместной с Самельсоном работы (РЖМат, 1957, 7767), автор доказывает, что если s — порождающая окружность, то образ гомоморфизма $g^s_*: H_*(K^s) \to H_*(\Omega' K)$ порождает кольцо Понтрягина $H_*(\Omega' K)$. Далее доказывается, что всякая компактная группа Ли без центра обладает порождающей окружностью. С помощью этих результатов дается описание кольца $H^*(\Omega' K)$. В частности, эффективно вычисляются кольца $H^*(\Omega SU(n))$ и $H_*(\Omega SU(n))$ (последнее оказывается изоморфным кольцу многочленов) и находятся примитивные элементы этих колец. Результаты применяются к вычислению стабильных гомотопических групп унитарных групп (РЖМат, 1958, 9672), а также к доказательству того, что сферические классы гомологий размерности $2n$ в классифицирующем пространстве группы $U(n)$ $(m \geqslant 2n)$ делятся в точности на $(n-1)!$. Отсюда выводится, что $\pi_{2n}(U(n)) \cong Z_{n!}$. Кольца $H^*(\Omega' K)$ и $H_*(\Omega' K)$ вычисляются также в случаях $K = SO(n)$, $\mathrm{Sp}(n)$, G_2.

А. Л. Онищик

7283. О локальных сечениях в локально компактных группах. Карубэ (On the local cross-sections in locally compact groups. Karube Takashi), J. Math. Soc. Japan, 1958, **10**, № 4, 343—347 (англ.)

Пусть G — локально компактная топологическая группа, H — ее замкнутая подгруппа. Доказывается, что существуют такая открытая подгруппа $K \subset G$ и такой компактный нормальный делитель $Z \subset K$, что K/Z — группа Ли и что из существования сечения для подгруппы $H_1 Z$ в H следует существование локального сечения для подгруппы H в G. Отсюда выводится, что если G—

сепарабельная метрическая, то в G существует локальное сечение для H в следующих случаях: G конечномерна; H не имеет произвольно малых нетривиальных подгрупп; все достаточно малые подгруппы группы G содержатся в H. А. Л. Онищик

7284. Неабелевы упорядоченные группы. Конрад (Non-abelian ordered groups. Conrad Paul), Pacif. J. Math., 1959, 9, № 1, 25—41 (англ.)

Используя понятия и результаты своей предшествующей работы (РЖМат, 1958, 137), автор указывает методы построения неабелевых упорядоченных (уп.) групп. Пусть N и N' — две уп. группы. Уп. группа G называется уп. расширением группы N посредством группы N', если существует сохраняющий упорядочение гомоморфизм группы G на группу N' с ядром N. Уп. расширение группы G считается центральным, если N содержится в центре группы G. Показано, что для каждой группы A сохраняющих упорядочение автоморфизмов уп. группы G, являющейся упорядочиваемой, может быть построена новая уп. группа H, содержащая группы A и G. Изучаются уп. расширения подгрупп аддитивной группы вещественных чисел. Отображение g множества $N' \times N'$ в группу N называется билинейным, если для всех x, y, z из группы N' имеем $g(x+y, z) = g(x, z) + g(y, z)$ и $g(x, y+z) = g(x, y) + g(x, z)$. Установлена связь между центральными расширениями и билинейными отображениями. Показано, что каждая кососимметрическая вещественная матрица может быть использована для построения уп. групп. Изучаются уп. группы (по терминологии автора) ранга 2. А. А. Виноградов

7285. Соединение упорядочений в абелевых частично упорядоченных группах. Рибенбойм (Conjonction d'ordres dans les groupes abéliens ordonnés. Ribenboim P.), Anais Acad. brasil. cienc., 1957, 29, № 2, 201—224 (франц.)

Пусть G — абелева структурно упорядоченная группа, P — множество всех ее положительных элементов и F — совокупность всех ее нитей в смысле Жаффара (РЖМат, 1955, 3635). Группа G называется вполне разложимой, если для всякой нити $\bar{a} \in F$ и произвольного $f \in P$ существуют элементы $\overline{f(a)}$, $\overline{f'(a)} \in P$ такие, что $f = \overline{f(a)} + \overline{f'(a)}$ и $\overline{f(a)} \leqslant \bar{a}$, $\overline{f'(a)} \wedge \bar{a} = 0$ ($\bar{a}$ обозначает нить, содержащую элемент a). Включение (реализация) группы G в прямое кардинальное произведение множества I упорядоченных групп $(G_\alpha)_{\alpha \in I}$ называется хаусдорфовым, если существует изоморфизм σ структуры F нитей группы G на подструктуру структуры всех частей множества I, удовлетворяющий следующему условию: для любых различных элементов $\alpha, \beta \in I$ существуют $f, g \in P$ такие, что $\alpha \in \sigma(\overline{f})$, $\beta \in \sigma(\overline{g})$ и $\sigma(\overline{f \wedge g}) = \sigma(\overline{f}) \wedge \sigma(\overline{g}) = \varnothing$.

Основным результатом работы является доказательство теоремы о том, что всякая вполне разложимая группа G обладает реализацией Хаусдорфа. Используя эту теорему, автор устанавливает связь между преупорядочениями группы G и фильтрами определенной подструктуры структуры всех частей множества ультрафильтров совокупности F нитей группы G (Терминологию см. РЖМат, 1960, 4930). А. А. Виноградов

7286. Проблема ДНК-белкового кодирования. Розен (The DNA-protein coding problem. Rozen Robert), Bull. Math. Biophys., 1959, 21, № 1, 71—95 (англ.)

Следуя Бурбаки, множество с одной всегда выполнимой бинарной операцией, удовлетворяющей закону ассоциативности, и содержащее единицу называется моноидом. Обычным образом конструируется свободный моноид M_n как множество слов в некотором алфавите из n букв — свободных образующих. Через $\lambda(w)$ обозначается длина слова w, а через $\lambda_i(w)$ обозначается число вхождений i-го свободного образующего в слово w, т. е. длина слова w относительно i-го свободного образующего. В теореме 2 доказывается, что свободный моноид с конечным или счетным множеством свободных образующих изоморфен свободному подмоноиду свободного моноида M_2 с двумя свободными образующими. Теореме 2 предшествует теорема 1, являющаяся ее частным случаем и утверждающая возможность вложения M_{20} в M_4. Теорема 2 (и теорема 1) была известна раньше (см., например Ev ns T., Proc. Amer. Math. Soc., 1952, 3, 614—6 0). Для моноидов доказывается теорема, аналогичная известной теоретикогрупповой теореме Нильсена — Шрейера: всякий подмоноид свободного моноида (с конечным или счетным множеством свободных образующих) свободен.

Пусть дано n рациональных чисел p_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), где $0 < p_i < 1$ и $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Множество всех слов w в моноиде M_n, удовлетворяющих условию $\lambda_i(w)/\lambda(w) = p_i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ обозначается через E_{p_i}.

Теорема 4. E_{p_i} — подмоноид в M_n. Он называется эргодическим).

Теорема 5. Эргодический подмоноид свободного моноида с конечным множеством образующих имеет бесконечное (счетное) множество свободных образующих.

Теорема 6. Если подмоноид $N = M_m$ эргодичен, то он будет эргодическим и в M_2 при (изоморфном) вложении M_m в M_2.

Изложение вышеотмеченных алгебраических результатов проведено в связи с указанной в заголовке биофизической задачей и рассмотрены приложения к решению этой задачи. Ю. И. Соркин

7287. Ассоциативные обобщенные системы мультигруппоидов со скалярным несингулярным элементом. Сад (Système demosien associatif de multigroupoïdes avec un scalaire non singulier. Sade M. A.), Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1959, Sér. 1, 73, № 2, 231—234 (франц.)

Множество M называется мультигруппоидом, если каждой упорядоченной паре элементов $x, y \in M$ ставится в соответствие подмножество $x\varphi y \subseteq M$; в этом случае мультигруппоид обозначается через $M(\varphi)$. Элемент s называется скалярным, если множества $x\varphi s$ и $s\varphi x$ состоят из одного элемента для любого $x \in M$, а если, кроме того, отображения $x \to x\varphi s$, $x \to s\varphi x$ являются взаимно однозначными отображениями множества M на себя, то s называется несингулярным элементом. Мультигруппоид $M(\varphi)$ называется ассоциативным, если $(x\varphi y)\varphi z = x\varphi(y\varphi z)$ для любых x, y, z.

Основной результат: Если четыре мультигруппоида $M(\varphi_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, с общим несингулярным элементом связаны соотношением

$$(x\varphi_1 y)\varphi_2 z = x\varphi_3(y\varphi_4 z) \qquad (1)$$

для всех x, y, z, то все $M(\varphi_i)$ изотопны одному и тому же ассоциативному мультигруппоиду. Система мультигруппоидов $M(\varphi)$ с общим скалярным несингулярным элементом, где φ пробегает некоторое множество Φ, удовлетворяет обобщенному ассоциативному закону, если для каждой пары $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ существует пара $\varphi_3, \varphi_4 \in \Phi$ такая, что имеет место равенство (1) для любых x, y, z. Тогда все мультигруппоиды такой системы изотопны некоторому ассоциативному мультигруппоиду. В случае, если они обладают общей скалярной единицей, т. е. таким элементом u, что $x\varphi u = u\varphi x = x$ для любого x и любого $\varphi \in \Phi$, то все

$M(\varphi)$ изоморфны некоторому ассоциативному мультигруппоиду. В. Д. Белоусов

7288. **Характеристика нетеровых целозамкнутых полугрупп. Мори** (Une caractérisation des demi-groupes noethériens intégralement clos. Maury Guy), C. r. Acad. sci., 1959, 248, № 23, 3260—3261 (франц.)

Найдено необходимое и достаточное условие, при котором нетерова полугруппа является целозамкнутой (РЖМат, 1959, 5589). Это условие аналогично соответствующему результату в теории колец (РЖМат, 1956, 7188). Л. М. Глускин

7289. **Некоторые вопросы теории квазигрупп и луп. Белоусов В. Д.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, 4, М., АН СССР, 1959, 9

7290 Д. **Структурные изоморфизмы некоторых классов бесконечных групп. Пекелис А. С.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Уральский ун-т, Свердловск, 1958

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

7291. **Теоремы о связи между представлениями в факторкольце и в кольце для модулярных представлений. Грин** (A lifting theorem for modular representations. Green J. A.), Proc. Roy. Soc., 1959, **A252**, № 1268, 135—142 (англ.)

Пусть K — кольцо целых $\mathfrak{p}$-адических чисел, где $\mathfrak{p}$ — простой идеал поля алгебраических чисел; $\mathfrak{p}_1$ — максимальный идеал в K; $F = K/\mathfrak{p}_1$; G — конечная группа; H — подгруппа группы G; $H_v = H_{\mid} vHv^{-1}$ $(v \in G)$; Λ — G-F-модуль, в котором реализуется представление Γ группы G над полем F; Λ_H — индуцированный H-F-модуль; Λ_v — F-H_v-модуль, индуцированный G-F-модулем Λ. Будем говорить что представление Γ и модуль Λ обладают свойством (L), если Γ получается из представления Γ' группы G над кольцом K в результате приведения по модулю $\mathfrak{p}_1$. Известно (Алгебр. реф. сб., 1948, 880), что свойством (L) обладают компоненты регулярного представления группы G над полем F.

Автор доказывает следующее обобщение этого результата: G-F-модуль Λ, для которого $\mathrm{Ext}^2(\Lambda, \Lambda) = 0$ обладает свойством (L). (Обозначения см. РЖМат, 1959, 6731). В конце работы доказываются следующие утверждения.

Теорема. Если индуцированный модуль Λ_H обладает свойством (L) и, кроме того, $\mathrm{Ext}^1(\Lambda_v, \Lambda_v) = 0$ для всех $v \notin H$ и $\mathrm{Ext}^2(\Lambda, \Lambda) = 0$, то Λ также обладает этим свойством.

Следствие. Если пересечение любых двух (различных) силовских p-подгрупп группы G равно 1, то G-F-модуль Λ тогда и только тогда обладает свойством (L), когда этим свойством обладает индуцированный модуль Λ_H, где H — нормализатор фиксированной силовской p-подгруппы группы G.

Для доказательства используется теория относительных гомологий (РЖМат, 1959, 6731). С. Д. Берман

7292. **Теорема Грюнвальда и ее приложения. Ван Сян-хао** (Grunwald's theorem and its applications. Wang Shiang-haw), Algebr. Geom. Conf. Notes. Univ. Chicago. Chicago, s. a., 49—54 (англ.)

Согласно теореме Грюнвальда, над полем алгебраических чисел F существует циклическое расширение K заданной степени n и с заданными $\mathfrak{p}$-адическими замыканиями $K_{\mathfrak{p}}$ для конечного числа простых $\mathfrak{p}$. Оказывается, однако, что это утверждение не совсем точно. Когда n есть степень двойки, то теорема Грюнвальда верна лишь при выполнении дополнительных условий, сформулированных в реферируемой работе. Аналогичные условия найдены также для абелевых расширений. А. И. Кострикин

7293. **О ранге пространства модулярных форм для гильбертовой группы, регулярных в вершинах фундаментальной области. Герман** (Über den Rang der Schar der Spitzenformen zu Hilbertschen Modulgruppen beliebiger totalreeller Körper. Herrmann Oskar), Arch. Math., 1957, 8, № 5, 322—326 (нем.)

Основной результат: Пусть k — абсолютно вещественное поле алгебраических чисел степени n, Γ — модулярная группа Гильберта. Обозначим через $r(k, \Gamma, -m)$ размерность пространства модулярных форм веса m, регулярных в вершинах фундаментальной области. Имеет место следующее асимптотическое неравенство:

$$\lim_{m \to \infty} \frac{r(k, \Gamma, -m)}{m^n} \geqslant \frac{R \mid \sqrt{d} \mid}{2(\pi e)^n},$$

где R — регулятор поля k, d — дискриминант поля k. И. И. Пятецкий-Шапиро

7294. **Об одной задаче погружаемости для поля с расширенной группой икосаэдра. Волнина Н. В.**, Уч. зап. Калининградск. гос. пед. ин-та, 1958, вып. 5, 11—33

Расширенная группа икосаэдра G содержит нормальный делитель H порядка 2, фактор-группа по которому изоморфна знакопеременной группе A_5. Доказываются необходимые и достаточные условия погружаемости поля алгебраических чисел k, нормального над подполем k_0 с группой Галуа $G/H \cong A_5$ в поле K соответственно с группами Галуа G и H над k_0 и k.

Примечание референта. Доказательства, приведенные автором, не корректны, так как они основаны на ошибочном использовании формул для минимальных идемпотентов центра комплексной групповой алгебры Γ группы G, определяющих неприводимые представления этой группы степени 2. Легко заметить, что идемпотенты центра e_2 и e_2^1, указанные автором, не являются минимальными (они определяют двусторонние идеалы алгебры Γ размерности 8). С. Д. Берман

7295. **Якобиевы многообразия и числовые поля. Танияма**, Сугаку, 1956, **7**, № 4, 218—220 (японск.)

См. РЖМат, 1957, 6327.

7296. **О чисто вещественном расширении пятой степени поля рациональных чисел с наименьшим дискриминантом. Потапкин В. К., Фаддеев Д. К.**, Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, 4, М., АН СССР, 1959, 7

7297. **Аппроксимация рациональными выражениями решений алгебраических дифференциальных уравнений. Колчин** (Rational approximation to solutions of algebraic differential equations. Kolchin E. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 2, 238—244 (англ.)

Известная теорема Лиувилля об отсутствии „хороших" аппроксимаций целых алгебраических чисел рациональными числами обобщается на дифференциальные поля. Пусть F — дифференциальное поле, нормированное с помощью неединичной упорядоченной группы G так, что существуют элементы α и β из G, удовлетворяющие для любого элемента f из F с нормой меньшей, чем единица, соотношениям:

$$\alpha \mid f \mid \leqslant \mid f' \mid \leqslant \beta \mid f \mid .$$

Рассмотрим любое ненулевое дифференциальное подкольцо Z поля F, у которого все отличные от нуля элементы имеют норму, большую или равную единице. Пусть U — любой элемент из F, дифференциально-алгебраический над Z, $P(y)$ — дифференциальный полином над Z, обращающийся в нуль при подстановке в

него U. Для любого натурального числа s назовем s-степенью полинома P максимальную из сумм $\sum_k (k+s)n_k$, взятых для всех составляющих $P(y)$ дифференциальных одночленов $ay^{n_0}(y^1)^{n_1}\dots(y^{(x)})^{n_k}$. Если d_s — минимальная возможная s-степень полинома $P(u)$, то, как доказывается в работе, существует такой элемент $\gamma \in G$, что $\left|u-\frac{a}{b^s}\right| \geqslant \frac{\gamma}{|b|^{d_s}}$ для всех элементов a, b из Z, удовлетворяющих условиям: $b \neq 0$ и $u \neq \frac{a}{b^s}$.

В. М. Глушков

7298. Аппроксимация полных нормированных полей характеристики $p \neq 0$ полными нормированными полями характеристики 0. Краснер (Approximation des corps valués complets de caractéristique $p \neq 0$ par ceux de caractéristique nulle. Krasner Marc M.), Colloque d'algèbre supérieure tenu à Bruxelles du 19 au 22 décembre 1956. Centre belge rech. math., Louvain, ets. Ceuterick, 1957, 129—206 (франц.)

Устанавливается связь между разбиениями полны нормированных полей, осуществляемыми с помощью мультипликативных дивизоров, и решетками их расширений, у которых числа ветвления (nombres de ramification) имеют определенный порядок: совпадение достаточно тонких разбиений двух полей влечет за собой наличие одинаковой структуры Галуа и их решеток расширений данного порядка. Можно рассматривать два вида аппроксимации полного нормированного поля k последовательностью полных нормированных полей $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$. Метрическая аппроксимация состоит в том, что с ростом n все более и более тонкие разбиения поля k, стремящиеся к его дискретному разбиению, совпадают с соответствующими разбиениями поля k_n. Аппроксимация в смысле теории Галуа (galoisienne) заключается в том, что с ростом n решетки расширений все более и более высокого порядка поля k, стремящиеся к решетке всех его сепарабельных расширений, могут быть поставлены в некоторое каноническое соответствие, сохраняющее их структуру Галуа с решетками расширений этого же порядка поля k_n. В силу вышесказанного аппроксимация в смысле теории Галуа имеет место, если имеет место метрическая аппроксимация. Всякое поле характеристики $p \neq 0$ может быть аппроксимировано последовательностью полей нулевой характеристики (этот результат в реферируемой работе лишь формулируется, но не доказывается). Таким образом, представляется возможным сводить некоторые проблемы, касающиеся полей характеристики $p \neq 0$, к аналогичным проблемам для полей нулевой характеристики (например, это относится к локальной теории полей классов). Обратно, можно изучать свойства достаточно удаленных членов последовательности k_n, исходя из свойств предела k. Однако этой последней возможности автор касается лишь мимоходом. Очерченный круг идей получает в реферируемой работе в общем весьма детализированную разработку. Важнейшие результаты, помещенные здесь, были уже ранее опубликованы автором в C. r. Acad. sci., 1947, 224, 173—175, 434—436 и в Algèbre et théorie de nombres, Colloques internationaux du CNRS, Paris, 1949, стр. 29—40.

В. С. Ленский

7299. О нормированиях, подчиненных некоторому нормированию поля при его специализациях. Санчо-де-Сан-Роман (Sobre valoraciones subordinadas de una valoracion de un cuerpo, en las especializaciones de este. Sancho de San Roman J.), Rev. mat. hisp.-amer., 1958, 18, № 5-6, 244—251 (исп.; рез. франц.)

Пусть $\sum$ — некоторое поле и R — такое его подкольцо, для которого $\sum$ является полем частных. Через R' обозначается фактор кольцо кольца R по его некоторому простому идеалу P, а через $\sum'$ — поле частных кольца R'. Если v — нормирование поля $\sum$ при помощи упорядоченной абелевой группы, то через R_v обозначается соответствующее кольцо нормирования, а через P_v — его максимальный простой идеал. Доказывается что нормирование v поля $\sum$ определяет некоторое нормирование v' поля Σ' такое, что кольцо нормирования $R_{v'}$ состоит из элементов вида $(\alpha+P\cdot R_P) \in \sum'$ где $\alpha \in R_v$ и R_P — кольцо частных кольца R относительно идеала P. Нормирование v' называется нормированием, подчиненным нормированию v. Изучается подчиненное нормирование в зависимости от соотношения между идеалами P_v и $P\cdot R_P$. Например, если $P\cdot R_P \subset P_v$, то v' тривиальное. Доказывается, что если v' задано, то существует нормирование v, которому v' подчинено.

В. П. Елизаров

7300. Аналог теоремы о дискриминанте в несепарабельных расширениях. Барбилян (Ein Analogon des Diskriminantensatzes in inseparablen Erweiterungen. Barbilian D.), Leonhard Euler 250. Geburtstag. Berlin, Akad. Verl., 1959, 1—20 (нем.; рез. русск.)

7301. О мультипликативной группе поля алгебраических чисел. Ене (Über die Multiplikationsgruppe eines algebraischen Zahlkörpers. Jehne W.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 30—31 (нем.)

7302. О строении колец в полях алгебраических чисел и функций. Грель Г., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 144—146

7303. Трактат о 14-й проблеме Гильберта. Нагата (A treatise on the 14-th problem of Hilbert. Nagata Masayoshi), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1956, A-Math., 30 № 1, 57—70 (англ.)

14-я проблема Гильберта рассматривается в следующей обобщенной формулировке: Пусть K — нормальное аффинное кольцо над основным кольцом I и L' — поле функций над I; будет ли $K_{|}L'$ аффинным кольцом? Показывается, что ответ будет утвердительным, если $\dim L' \leqslant 2$.

Основной инструмент исследования — понятие J-образа. Если K — область целостности, L — её поле частных и J — идеал в K, то $\bigcup_{n=1}^{\infty}(K:J^n)$ называется J-образом кольца K. В заключение приводятся некоторые соображения об изменении основного кольца. Показывается, что при исследовании проблемы достаточно ограничиться случаем, когда K — регулярное расширение основного кольца (или алгебраически замкнутого основного поля). Формулировка автора обобщает формулировку Зариского (Zariski O., Bull. Sci. math., 1954, 78, 155—168), рассматривавшего случай, когда I — поле, и получившего тот же результат.

В. В. Морозов

7304. Об одной проблеме Зариского. Рис (On a problem of Zariski. Rees D.), Illinois J. Math., 1958, 2, № 1, 145—149 (англ.)

Дается отрицательное решение следующей проблемы поставленной Зариским (Bull. sci. math., 1954, 78, 155—168) и обобщающей 14-ю проблему Гильберта:

Пусть F — поле с конечным числом образующих над основным полем k, S — целозамкнутая область целостности также с конечным числом образующих над k и такая, что ее поле частных F' содержит F. Будет ли кольцо $R = S_{|}F$ конечно порождаемым над k?

Поля, для которых ответ на этот вопрос положителен при любом выборе S, автор называет полями Зарискоro. Зариским было доказано, что поля степеней трансцендентности 1 и 2 над k все являются такими. Пример поля степени трансцендентности 3 и не являющегося полем Зарискоro строится следующим образом: пусть k — поле комплексных чисел, (x_0, x_1, x_2) — проективная общая точка неособенной эллиптической кривой. Тогда поле $k(x_0, x_1, x_2, t)$, где t — независимая неизвестная, является искомым. При доказательстве используется результат Нагата (реф. 7303), дающий необходимое и достаточное условие того, что поле является полем Зарискоro. А. И. Узков

7305. Замечание к теореме о пересечении. Голди (A note on the intersection theorem. Goldie A. W.), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 1, 47—48 (англ.)

Доказывается следующее утверждение: Пусть I, J, K — некоторые идеалы и x — некоторый элемент нетерова кольца R. Тогда, если существует такая последовательность элементов $i_1, i_2, \ldots \in I$, что $x - i_n x \in (J+K)^n$ для $n = 1, 2, \ldots$, то существует такая последовательность элементов $p_1, p_2, \ldots \in I + J$, что $x - p_n x \in K^n$ для $n = 1, 2, \ldots$. Отмечается, что это утверждение равносильно теореме Крулля о том, что если элемент x нетерова кольца R содержится в пересечении $\bigcap_{i=1}^{\infty} I^n$ всех степеней некоторого идеала I, то существуют такие элементы $p_n \in I^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, что $x = p_n x$. Е. Г. Шульгейфер

7306. Примарные пересечения для двусторонних идеалов нетерова матричного кольца. Феллер (Primary intersections for two sided ideals of a Noetherian matrix ring. Feller Edmund H.), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **90**, № 2, 336—339 (англ.)

Опираясь на результаты предыдущей работы (РЖМат, 1958, 8632) и рассматривая при этом произвольное ассоциативное кольцо M с единицей как A-R-модуль, где A — кольцо левых умножений, а R—кольцо правых умножений кольца M, автор показывает, как по разложениям идеалов нетерова кольца D в несократимые пересечения примарных идеалов строятся разложения произвольного двустороннего идеала кольца D_n квадратных матриц n-го порядка над нетеровым кольцом D в несократимые пересечения неприводимых правых идеалов. Правый идеал кольца D_n, состоящий из всех матриц, у которых все элементы k-й строки принадлежат некоторому идеалу I кольца D, обозначается через (I, k). Каждый правый идеал кольца D_n, содержащий идеал (I, k), имеет вид (I', k), где I' — некоторый идеал кольца D, содержащий идеал I. Централизатором $V^* = V^*(I, k)$ (в смысле указанной выше работы) правого идеала (I, k) является подкольцо (I, D, k) всех матриц (a_{ij}), у которых $a_{ij} \in D$, $i \neq k$, $a_{kj} \in I$, $j \neq k$ и $a_{kk} \in D$. V^*-радикалом правого идеала (I, k) является идеал (I, P, k) всех матриц (a_{ij}), у которых $a_{ij} \in D$, $i \neq k$, $a_{kj} \in I$, $j \neq k$ и $a_{kk} \in P$, где P — радикал идеала I в кольце D. Произвольный двусторонний идеал кольца D_n имеет вид I_n, где I — некоторый идеал кольца D. Если $I = I_{1\alpha} \cap \ldots \cap I_{r\alpha}$ — множество всех представлений идеала I кольца D в виде несократимых пересечений неприводимых примарных идеалов (индекс α пробегает некоторое множество E, вообще говоря, бесконечной мощности), то $I_n = \bigcap_{i=1}^{r} \bigcap_{k=1}^{r} (I_{i\alpha_k}, k)$ (где α_k — некоторые индексы из E) являются представлениями двустороннего идеала I_n кольца D_n в виде несократимых пересечений неприводимых правых идеалов. Правые идеалы $(I_{i\alpha_k}, k)$ можно рассматривать как $(I \setminus D)$-примарные правые идеалы где

$$(I \setminus D) = \bigcap_{i=1}^{r} \bigcap_{k=1}^{n} \bigcap_{\alpha_k \in E} V^*(I_{i\alpha_k}, k)$$

— подцентрализатор идеала I_n, которых состоит из всех матриц (a_{ij}), у которых $a_{ij} \in I$, $i \neq j$ и $a_{ii} \in D$. При этом $(I \setminus D)$-радикалы примарных компонент, входящих в одно из указанных разложений идеала I_n, являющиеся сильно простыми двусторонними идеалами кольца $(I \setminus D)$, между собою различны и для любых двух таких разложений идеала I_n множества (I/D)-радикалов примарных компонент между собою совпадают. Е. Г. Шульгейфер

7307. Обобщенное кольцо частных. I. Финдли, Ламбек (A generalized ring of quotients. I. Findlay G. D., Lambek J.), Canad. Math. Bull., 1958, **1**, №2, 77—85 (англ.)

Пусть R — произвольное кольцо, A и B — правые R-модули и D — любой правый R-подмодуль модуля B. R-гомоморфизм φ модуля D в A называется частичным гомоморфизмом B в A. Частичный гомоморфизм φ неприводим, если он не может быть продолжен до частичного R-гомоморфизма B в A с областью определения, содержащей D в качестве собственного подмодуля.

Авторы ставят перед собой задачу с помощью этого понятия распространить конструкцию Утуми левого кольца частных (РЖМат, 1959, 5621) на произвольный модуль с кольцом операторов.

Пусть C — правый R-подмодуль модуля B, и каждый гомоморфизм C в A может быть продолжен единственным образом до неприводимого частичного гомоморфизма B в A, тогда пишут $C \leqslant B(A)$. Исследуются свойства отношения $\leqslant$. Без доказательства утверждается, что если $I = R + N$, где N — кольцо целых чисел, то $C \leqslant B(A)$ тогда и только тогда, когда для любого $a \in A$, $a \neq 0$, и любого $b \in B$ существует такой элемент $i \in I$, что $ai \neq 0$, $bi \in C$.

Модуль B называется рациональным расширением модуля C, если $C \leqslant B(B)$. Доказывается, что для произвольного модуля C существует максимальное рациональное расширение M. Авторы утверждают, что расширение M определено однозначно с точностью до изоморфизма над C. Доказательство должно содержаться во второй части работы. Указывается связь понятий рационального и максимального рационального расширений с понятиями существенного (РЖМат, 1954, 2870) и максимального существенного (РЖМат, 1959, 8873) расширений. В. П. Елизаров

7308. Обобщенное кольцо частных. II. Финдли, Ламбек (A generalized ring of quotients. II. Findlay G. D., Lambek J.), Canad. Math. Bull., 1958, **1**, №3, 155—167 (англ.)

Терминологию и обозначения см. реф. 7307. Частичный гомоморфизм φ модуля B в модуль A называется дробным гомоморфизмом, если $\mathrm{dom}\,\varphi \leqslant B(A)$, где $\mathrm{dom}\,\varphi$ — область определения φ. Неприводимые дробные гомоморфизмы модуля B в модуль A образуют модуль $\mathrm{Fr}(B, A)$, содержащий $\mathrm{Hom}(B, A)$ в качестве подмодуля. Если S и R — ассоциативные кольца и $S \sqsupseteq R$, то S и R можно рассматривать как правые R-модули, которые обозначаются S_R и R_R. Кольцо $S \sqsupseteq R$ называется кольцом правых частных кольца R, если S_R является рациональным расширением R_R. Кольцо $Q \sqsupseteq R$ называется максимальным кольцом правых частных кольца R, если Q_R — максимальное рациональное расширение R_R. Доказывается, что всякое ассоциативное кольцо R

имеет максимальное кольцо правых частных Q, которое определено однозначно с точностью до изоморфизма над R. При этом $Q_R = \mathrm{Fr}(I_R, R_R)$. Любое кольцо правых частных для кольца R изоморфно над R единственному подкольцу кольца Q. Для колец без левых полных делителей нуля кольцо правых частных совпадает с правым кольцом частных в смысле Уцуми (РЖМат, 1959, 56 1). На примере коммутативного кольца показывается, что кольцо частных в смысле реферируемой работы не всегда совпадает с кольцом частных в обычном смысле. Кольцо R называется алгебраическим над полем F, если F—подкольцо из центра кольца R и каждый элемент из R удовлетворяет некоторому полиномиальному соотношению с коэффициентами из F. Доказывается, что элемент алгебраического кольца R, не являющийся левым или правым делителем нуля, имеет в R двусторонний обратный. В. П. Елизаров

7309. О кольце частных булевского кольца. Брейнерд, Ламбек (On the ring of quotients of a Boolean ring. Brainerd B., Lambek J.), Canad. Math. Bull., 1959, 2, № 1, 25—29 (англ.)

В работах Финдли и Ламбека (реф. 7307, 7308) показано, что конструкция, аналогичная той, которая применяется при образовании рациональных чисел из целых, может быть проведена для любого ассоциативного кольца. С другой стороны, известна конструкция образования действительных чисел из рациональных, которая может быть проведена для любого частично упорядоченного множества построением его пополнения. Целью реферируемой работы является доказательство того, что для булевских колец обе эти конструкции совпадают. Доказывается, что максимальное кольцо частных в смысле Финдли и Ламбека для булевского кольца также является булевским. В булевском кольце R вводится соотношение частичной упорядоченности: $r \leqslant r'$ тогда и только тогда, когда $rr' = r$, где $rr' \in R$. Если S — булевское кольцо, содержащее R, то S называется пополнением R, если каждое подмножество из S имеет верхнюю грань относительно соотношения $\leqslant$ и для любого элемента $s \in S$ имеет место $s = \sup\{r \in R, r \leqslant s\}$. Доказывается, что булевское кольцо S — пополнение булевского кольца R тогда и только тогда, когда S — максимальное кольцо частных кольца R.
В. П. Елизаров

7310. Об алгебрах Фробениуса. Джанс (On Frobenius algebras. Jans J. P.), Ann. Math., 1959, **69**, № 2, 392—407 (англ.)

Конечномерная алгебра A над полем K называется алгеброй Фробениуса, если правое регулярное представление этой алгебры эквивалентно левому. Автор называет произвольную (вообще говоря, бесконечную) алгебру A над полем K алгеброй Фробениуса, если в A можно задать невырожденную билинейную форму (x, y), удовлетворяющую условию $(xy, z) = (x, yz)$ для всех $x, y, z \in A$, и при этом A обладает таким автоморфизмом α (автоморфизм Накаямы), что $(x, y) = (y, x^\alpha)$. Форма (x, y) индуцирует две топологии в алгебре A (База пространства A в точке нуль в одной из этих топологий состоит из всевозможных подмножеств $U_y = \{x, (x, y) = 0; (x, y \in A)\}$. Существование автоморфизма Накаямы равносильно эквивалентности этих топологий. В алгебре Фробениуса A правое и левое умножение на элементы $x \in A$ являются непрерывными отображениями пространства A в себя. Если A — алгебра Фробениуса по отношению к двум скалярным произведениям (x, y) и $\langle x, y\rangle$, которым соответствуют автоморфизмы α и β, и если топологии, индуцированные этими формами, эквивалентны, то существует такой обратимый элемент $c \in A$, что $\langle x, y\rangle = (x, yc)$ и $x^\beta = cx^\alpha c^{-1}$ для всех $x, y \in A$. Пусть для любого подмножества $S \subseteq A$ $l(S) = \{y; ys = 0$ для всех $s \in S\}$, $r(S) = \{y; sy = 0$ для всех $s \in S\}$. Топологическая алгебра A над полем K называется квазифробениусовой, если для каждого замкнутого левого идеала $L \subseteq A$ и для каждого замкнутого правого идеала $R \subseteq A$ выполняются условия $l(r(L)) = L$; $r(l(R)) = R$. Всякая алгебра Фробениуса A является квазифробениусовой. Показывается, что пересечение F всех максимальных правых замкнутых идеалов алгебры A, которые как подпространства пространства A над K имеют конечный индекс, совпадает с пересечением максимальных замкнутых двусторонних идеалов конечного индекса, причем условие $F \neq A$ эквивалентно существованию конечномерных ненулевых двусторонних идеалов алгебры A. Имеет место равенство $S = S' = S'' = F^1$, где S (соответственно S', S'') — идеал, порожденный конечномерными минимальными левыми (соответственно правыми, двусторонними) идеалами алгебры A, а $F^1 = \{y \in A; xy = 0$ для всех $x \in F\}$. Если I — замкнутый двусторонний идеал алгебры Фробениуса A и $I = Ac = cA$ для некоторого элемента $c \in A$, то факторалгебра A/I — также алгебра Фробениуса. Если R и R' — два правых идеала фробениусовой алгебры A, то всякий гомоморфизм $\psi: R \to R'$ модулей R и R' непрерывный в индуцированной топологии, задается формулой $\varphi(x) = cx$ (для всех $x \in R$) ($c \in R$). С. Д. Берман

7311. О проблеме Бернсайда. Кострикин А. И., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1959, **23**, № 1, 3—34

Решается в утвердительном смысле ослабленная проблема Бернсайда для любого простого показателя p. Доказывается основная теорема: Произвольное кольцо Ли L, удовлетворяющее n-му условию Энгеля и имеющее характеристику $p \geqslant n$ (или $p = 0$), локально нильпотентно. В силу существующей связи между периодическими группами и кольцами Ли из основной теоремы вытекает следствие: среди конечных групп с данным числом k образующих и тождественным соотношением $x^p = 1$ (p — простое) существует группа некоторого максимального порядка, зависящего только от k и p. Доказательство ведется от противного с использованием введенного ранее автором понятия радикала в энгелевом кольце Ли. Предполагается существование локально регулярного кольца Ли L характеристики p, удовлетворяющего n-му условию Энгеля, $n < p$, L можно считать полупростым, в частности L будет кольцом без центра и, следовательно, изоморфным с кольцом DL внутренних дифференцирований, это позволяет отождествить кольца L и DL, сохранив за лиевым умножением обозначение $[uv] = uv - vu$. Противоречие с исходными предпосылками достигается посредством доказательства существования в L коммутативного главного идеала $\mathfrak{N} = \{c\}$, $\mathfrak{N}^2 = 0$. Любой элемент $h \in \mathfrak{N}$ можно записать в виде: $h = \sum [cu_i^{k_i}]$, $0 \leqslant k_i \leqslant n-1$, поэтому требование коммутативности идеала $\mathfrak{N}$ эквивалентно соотношениям: $cu^\alpha c = 0$, $0 \leqslant \alpha \leqslant n-1$, $u \in L$. Доказательство существования в L элемента $c \neq 0$ с такими свойствами распадается на ряд этапов, каждому из которых соответствует конструирование отдельного члена в последовательности элементов $c(m) \in L$, характеризуемых условиями: $c(m) \neq 0$, $c(m) u^\alpha c(m) = 0$, $\alpha = 0, 1, \ldots, 2m-1$, $m \geqslant 1$, $u \in L$. Существование $c(1)$ доказывается особо, переход от $c(1)$ к $c(2)$ представляет основную трудность в работе; использование своеобразного итерационного процесса уже без особых затруднений позволяет перейти от $c(z)$ к искомому элементу $c = c\left[\frac{n-1}{2}\right]$.
В. И. Латышев

7312. Простые кольца без делителей нуля и лиевы кольца с делением. Кон (Simple rings without zero-divisors, and Lie division, rings. Cohn P. M.), Mathematica, 1959, **6**, № 1, 14—18 (англ.)

Продолжая свои исследования (РЖМат, 1960, 177), автор доказывает следующую теорему: Любая ассоциативная алгебра A без делителей нуля над полем F может быть вложена в такую ассоциативную же алгебру A^* без делителей нуля над тем же полем, в которой всякое уравнение вида $ax - xb = c$, где элементы a и b не являются алгебраическими, имеет решение. Если, кроме того, в алгебре A не было единицы, то в качестве алгебры A^* можно выбрать алгебру, не имеющую алгебраических элементов.

С помощью этого результата доказывается, что каждое ассоциативное кольцо R без делителей нуля вложимо в простое ассоциативное кольцо R^* без делителей нуля. Если при этом в кольце R имеется такой элемент f, что $f^2 = nf$ (n — целое число), то кольцо R^* имеет единицу; в противном случае в качестве кольца R^* можно выбрать кольцо без единицы.

В конце работы доказывается, что всякое лиево кольцо, вложимое в кольцо с делением (не обязательно лиево), можно вложить и в лиево кольцо с делением. А. И. Ширшов

7313. О полупростоте групповых алгебр. II. Вильямайор (On the semisimplicity of group algebras. II. Villamayor Orlando E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 1, 27—31 (англ.)

Пусть G — группа, S — нормальный делитель этой группы, K — ассоциативное кольцо с единицей, $R(G, K)$ — групповое кольцо группы G над кольцом K. Будем говорить, что пара (G, S) обладает свойством (A) (обозначения: $(G, S)_K \in A$), если радикал Джекобсона кольца $R(G, K)$ индуцируется радикалом подкольца $R(S, K)$.

Теорема 1. Если факторгруппа G/S локально конечна и уравнения $nx = 0$, где n пробегает порядки всех элементов группы G/S, имеют в кольце K только нулевые решения, то $(G, S)_K \in A$.

Следствие. Условие локальной конечности в формулировке теоремы 1 можно заменить требованием, чтобы группа G/S обладала нормальной системой, все факторы которой локально конечны.

Теорема 2. $(G, S)_K \in A$, если K — коммутативная алгебра над полем рациональных чисел, а факторгруппа группы G/S по ее центру локально конечна.

Следствие. Если K — полупростая коммутативная алгебра над полем рациональных чисел, а G — группа, обладающая нормальной системой, все факторы которой локально конечны над своим центром, то $(G, S)_K \in A$.

Теорема 3. Пусть K — коммутативная полупростая алгебра над полем рациональных чисел. Если кольцо $R(S, K)$ полупросто для каждой такой группы S, что $S = [S, S]$, то кольцо $R(G, K)$ также полупросто.

Полученные автором результаты о радикале группового кольца обобщают результаты предыдущей заметки автора (РЖМат, 1959, 9818) и содержат в себе также результаты других авторов о радикале групповых колец конечных групп. С. Д. Берман

7314. Центры групповых колец симметрических групп. Фарахат, Хигман (The centres of symmetric group rings. Farahat H. K., Higman G.), Proc. Roy. Soc., 1959, **A250**, № 1261, 212—221 (англ.)

Доказывается, что центр K_n целочисленного группового кольца симметрической группы S_n порождается элементами, $Z_1, \ldots, Z_n$, где $Z_l = \sum_{l(\alpha)=l} \alpha$ ($\alpha \in S_n$), а число $l(\alpha)$ равно числу циклов (включая 1-циклы) в разложении подстановки α. Отмечается, что на основании этой теоремы можно просто доказать указанный Накаяма (Алгебр. реф. сб., 1948, 543) критерий принадлежности двух неприводимых комплексных представлений группы S_n к одному p-блоку. С. Д. Берман

7315. Характеризация обобщенно однорядных алгебр. Уолл (Characterizations of generalized uniserial algebras. Wall Drury W.), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **90**, № 1, 161—170 (англ.)

Рассматривается конечномерная алгебра A с единицей над некоторым полем K. Примитивный левый идеал Ae (РЖМат, 1956, 4376), двойственный некоторому правому примитивному идеалу fA, называется доминирующим левым идеалом. Говорят, что левый примитивный идеал Af подчинен левому примитивному идеалу Ae, если он как левый A-модуль A-изоморфен некоторому подидеалу идеала Ae. Говорят что левый примитивный идеал Af слабо подчинен левому примитивному идеалу Ae, если идеал Ae содержит конечное число таких подидеалов $L_1, \ldots, L_n$, что идеал Af A-изоморфен некоторому левому идеалу прямой суммы $L_1 + \ldots + L_n$. Алгебра A называется QF-3*-алгеброй, если каждый ее (левый или правый) примитивный идеал либо сам является доминирующим, либо слабо подчинен некоторому доминирующему идеалу. Опуская из этого определения слово „слабо“, мы получим определение QF-2-алгебры. Доказывается, что алгебра A тогда и только тогда является обобщенно однорядной, когда для каждого двустороннего идеала Z алгебры A факторалгебра A/Z является QF-3*-алгеброй. Далее, если для всех двусторонних идеалов Z алгебры A факторалгебры A/Z являются QF-3*-алгебрами, то в действительности эти факторалгебры являются QF-2-алгебрами и, следовательно, в силу предыдущего утверждения, алгебра A является обобщенно однорядной. В качестве одной из лемм доказывается, что каждая факторалгебра произвольной обобщенно однорядной алгебры является обобщенно однорядной алгеброй. Приводится также другое доказательство теоремы Осимы (РЖМат, 1956, 6448) о том, что если для каждого двустороннего идеала Z алгебры A факторалгебра A/Z является квазифробениусовой, то алгебра A является однорядной. На примере показывается, что в этой теореме требование, что все факторалгебры A/Z являются квазифробениусовыми (квазифробениусовы алгебры можно охарактеризовать как алгебры, у которых каждый примитивный идеал является доминирующим), нельзя заменить требованием, что все факторалгебры A/Z являются QF-2- алгебрами. Е. Г. Шульгейфер

7316. Характеризация обобщенно однорядных алгебр. II. Уолл (Characterizations of generalized uniserial algebras. II. Wall Drury W.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 6, 915—919 (англ.)

Ч. I см. реф. 7315. Говорят, что левый примитивный идеал $\mathfrak{A}f$ конечномерной алгебры $\mathfrak{A}$ с единицей слабо подчинен конечной совокупности левых примитивных идеалов $\mathfrak{A}e_1, \ldots, \mathfrak{A}e_m$, если идеал $\mathfrak{A}f$ $\mathfrak{A}$-изоморфен некоторому левому идеалу прямой суммы $\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{D}_i$, где $\mathfrak{D}_i$ — некоторый подидеал одного из идеалов $\mathfrak{A}e_j$. Алгебра $\mathfrak{A}$ называется QF-3-алгеброй или $UMFR$-алгеброй (алгеброй с единственным минимальным точным представлением), если каждый ее примитивный идеал либо сам является доминирующим либо слабо подчинен некоторой конечной совокупности доминирующих идеалов. Доказывается, что если QF-3-алгебра $\mathfrak{A}$ не является QF-3*-алгеброй, то в алгебре $\mathfrak{A}$ существует по крайней мере один такой двусторонний идеал $\mathfrak{Z}$, что факторалгебра $\mathfrak{A}/\mathfrak{Z}$ не является QF-3-алгеброй. Из этого утверждения и результатов первой части вытекает, что алгебра $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда является обобщенно однорядной, когда для каждого двустороннего идеала $\mathfrak{Z}$ алгебры $\mathfrak{A}$ факторалгебра $\mathfrak{A}/\mathfrak{Z}$ является QF-3-алгеброй. Е. Г. Шульгейфер

7317. Об идеалах полукольца. Исэки (On ideals in semiring. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 8, 507—509 (англ.)

Пусть R — полукольцо. Идеал P полукольца R называется вполне простым, если из ab P следует $a \in P$ или $b \in P$. Идеал M называется сдавленным, если для всякого n из $a_1^2 a_2^2 \dots a_n^2 \in M$ следует $a_1 a_2 \dots a_n \in M$. Доказывается ряд теорем о свойствах идеалов и их радикалов полукольца R:

1. Если M — сдавленный идеал полукольца, то из того, что $a_1 a_2 \dots a_n \in M$ всегда следует, что $a_1^{l_1} a_2^{l_2} \dots a_n^{l_n} \in M$, каковы бы ни были целые рациональные $l_1, l_2, \dots, l_n$, и наоборот.

2. Сдавливающий радикал идеала M (РЖМат, 1958, 161) есть пересечение всех сдавленных идеалов, содержащих M.

3. Радикал Мак-Коя (McCoy N. H., Amer. J. Math., 1949, **71**, № 4, 823—833) идеала M полукольца R содержится в сдавливающем радикале идеала M.

4. Всякий минимальный простой идеал P сдавленного идеала M является в M вполне простым идеалом.

5. Сдавливающий радикал идеала M есть пересечение всех минимальных вполне простых идеалов, принадлежащих M.

6. Всякий сдавленный идеал идеала M есть пересечение всех минимальных вполне простых идеалов, принадлежащих M.

Последние две теоремы приводятся без доказательства.

Б. М. Уразбаев

7318. Обобщение кольца. Бомонт (Generalized rings. Beaumont Ross A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 6, 876—881 (англ.)

Аддитивная абелева группа R, замкнутая относительно некоторой операции умножения называется (m, n)-дистрибутивным кольцом, если для фиксированных целых чисел $m \geqslant 2$ и $n \geqslant 2$ и произвольных элементов a_i, $b_j \in R$ выполняются условия

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum_{i,j=1}^{m,n} a_i b_j \text{ и } a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

Теоремами 1—3 устанавливаются различные необходимые и достаточные условия того, чтобы (m, n)-дистрибутивное кольцо было обычным кольцом. Идеалом I в (m, n)-дистрибутивном кольце R называется такая подгруппа аддитивной группы R, что $ra \in I$ и $ar \in I$ для всех $r \in R$ и $a \in I$.

Теорема 4. Если I — идеал в R, то отношение $\equiv$, определяемое как $r \equiv s \bmod I$, если $r - s \in I$ является отношением конгруэнтности.

Теорема 5. Если I — идеал в R, то $R - I$ — кольцо (под $R - I$ понимается множество смежных классов по I с естественно определяемыми операциями сложения и умножения). R называется степенным (m, n)-дистрибутивным кольцом, если главный идеал (0) состоит только из одного нуля 0.

Теорема 6. Отображение $R \to R - (0)$ есть отображение множества всех степенных (m, n)-дистрибутивных колец на множество всех колец.

Теорема 7. Если R — ассоциативное (m, n)-дистрибутивное кольцо такое, что 0 является его центром, то R изоморфно прямой сумме $R - (0)$ и (0).

Ю. И. Соркин

7319. Алгебры, возникшие из генетики. Гоншор (Algebras arising from genetics. Gonshor H.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 17 (англ.)

7320. Кольцо непрерывных отображений биортогональных пространств. Плесс (The continuous transformation ring of biorthogonal bases spaces. Pless Vera), Duke Math. J., 1958, **25**, № 2, 365—371 (англ.)

Рассматриваются биортогональные базисные пространства, т. е. такие дуальные векторные пространства M и N над некоторым телом D, что в M и N существуют равномощные базисы $\{x_t\}$ и $\{f_t\}$, причем $(x_t, f_t) = \delta_{tt}$. Преобразование a на M называется непрерывным (в N топологии пространства M), если существует такое преобразование a' на N, что $(xa, f) = (x, a'f)$ для всех $x \in M$ и $f \in N$. Пусть $L(M, N)$ обозначает кольцо всех непрерывных линейных преобразований пространства M, $L(M)$ — кольцо всех линейных преобразований пространства M, а $F(M, N)$ — кольцо всех линейных преобразований конечного ранга в $L(M, N)$. Пусть M и N — биортогональные базисные пространства. Доказываются следующие теоремы:

1) Если u и v — преобразования из $L(M, N)$, $\dim Mu = \aleph' \geqslant \aleph_0$ и $\dim Mv \leqslant \dim Mu$, то в $L(M, N)$ существуют такие элементы u_1 и u_2, что $u_1 u u_2 = v$.

2) Если для каждого бесконечного кардинального числа $\aleph' \leqslant \dim M$ определить $I_{\aleph'}$ как множество всех линейных преобразований ранга $< \aleph'$, то $I_{\aleph'}$ будет собственным двусторонним идеалом в $L(M, N)$ и всякий собственный двусторонний идеал совпадает с одним из $I_{\aleph'}$.

3) Если I_1 и I_2 — такие двусторонние идеалы в $L(M, N)$, что $I_1 > I_2$, то I_1/I_2 будет примитивным кольцом без минимальных односторонних идеалов.

4) Если I_1 и I_1' — двусторонние идеалы (не обязательно собственные) в $L(M, N)$ и соответственно в $L(M)$, I_2, I_2' — двусторонние идеалы в $L(M, N)$ и соответственно в $L(M)$, строго содержащиеся в I_1 и I_1', то I_1/I_2 не является регулярным кольцом (в смысле Неймана), а I_1'/I_2' будет регулярным кольцом. Следовательно, факторкольца I_1/I_2 и I_1'/I_2' неизоморфны.

В. А. Андрунакиевич

7321. Конечность инъективной оболочки. Розенберг, Зелинский (Finiteness of the injective null. Rosenberg Alex, Zelinsky Daniel), Math. Z., 1959, **70**, № 4, 372—380 (англ.)

Если не оговорено особо, то под R-модулем в дальнейшем понимается левый модуль над некоторым ассоциативным кольцом R с единицей. R-модуль, обладающий конечным композиционным рядом, мы будем называть модулем конечной длины. В работе Экмана и Шопфа (РЖМат, 1954, 2870) было показано, что для любого R-модуля A существует единственный минимальный инъективный R-модуль $\hat{A}$, содержащий модуль A; модуль $\hat{A}$ называется инъективной оболочкой модуля A. Работа связана с вопросом, при каких условиях инъективная оболочка $\hat{A}$ R-модуля A конечной длины является R-модулем конечной длины. Этот вопрос сводится к случаю, когда R-модуль A является простым. Среди других утверждений отметим следующие:

1) Пусть N — такой нильпотентный идеал кольца R, что фактор-кольцо R/N является полупростым кольцом с условием минимальности. Тогда простой R-модуль A тогда и только тогда имеет инъективную оболочку конечной длины, когда R-модули $\mathrm{Hom}_R(N^i/N^{i+1}, A)$ $(i = 0, 1, \dots)$ имеют конечную длину. Отмечается, что условие: R-модули $\mathrm{Hom}_R(N^i/N^{i+1}, A)$ имеют конечную длину для каждого простого R-модуля A, достаточно проверить лишь для $i = 1$.

2) Следующие два свойства равносильны: а) для некоторого кольца R с условием минимальности для левых и правых идеалов существует простой R-модуль A,

инъективная оболочка которого не имеет конечной длины; б) для некоторого простого кольца E с условием минимальности существует такое простое подкольцо T с условием минимальности, содержащее единицу кольца E, что E имеет конечное число образующих как правый T-модуль и не имеет конечного числа образующих как левый T-модуль. На примере показано существование кольца R с условием минимальности для левых идеалов и некоторого простого R-модуля, инъективная оболочка которого не имеет конечной длины.

3) Если инъективная оболочка каждого простого R-модуля имеет конечную длину, то джекобсоновский радикал N кольца R является нильидеалом и $\sum_{i=1}^{\infty} N^i = 0$; если, кроме того, существует лишь конечное число неизоморфных между собой простых R-модулей, то радикал N нильпотентен. Приводится пример, показывающий, что последнее предположение для нильпотентности радикала N является существенным.

4) Пусть R — произвольное коммутативное кольцо и M — некоторый его максимальный идеал. Инъективная оболочка простого R модуля R/M тогда и только тогда имеет конечную длину, когда кольцо отношений R_M кольца R относительно простого идеала M удовлетворяет условию минимальности. R-модуль R/M тогда и только тогда сам является инъективным модулем, когда кольцо отношений R_M является полем. В качестве следствия первого из этих утверждений доказывается, что если кольцо R является областью целостности и некоторый простой R-модуль имеет инъективную оболочку конечной длины, то R является полем.

5) Передоказывается утверждение Капланского о том, что коммутативное кольцо R тогда и только тогда регулярно (в смысле Неймана), когда каждый простой R-модуль инъективен. Е. Г. Шульгейфер

7322. Исправление к моей статье «Системы уравнений над модулями». Кертес (Correction to my paper «Systems of equations over modules». Kertész A.), Acta scient. math., 1958, **19**, № 3-4, 251—252 (англ.)

Автор отмечает, что в теореме 8 (РЖМат, 1959, 10835) о совместности и разрешимости системы линейных уравнений над полупростым кольцом параметры не могут быть выбраны произвольно, и дает исправленные формулировки этой теоремы и ее следствий 1 и 2.

С. Н. Черников

7323. Максимальность и ультраполнота нормированных модулей. Флейшер (Maximality and ultracompleteness in normed modules. Fleischer Isidore), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 1, 151—157 (англ.)

R — модуль M называется нормированным в некотором линейно упорядоченном множестве Λ с наименьшим элементом 0, если определена такая функция $V: M \to \Lambda$, что $V(x) = 0 \leftrightarrow x = 0$, $V(x \pm y) \leqslant \max(V(x), V(y))$ и $V(\alpha, x) \leqslant V(x)$ для любого $\alpha \in R$. С каждым элементом $\lambda \in \Lambda$ ассоциируется подмодуль M_λ модуля M состоящий из всех элементов $x \in M$, для которых $V(x) \leqslant \lambda$. Модуль M называется ультраполным, если он полон в каждой (не обязательно сепарабельной) топологии, полная система окрестностей нуля которой состоит из некоторых подмодулей M_λ. Последовательность $\{x_\lambda\}$ ($x_\lambda \in M$ и индекс λ пробегает некоторое подмножество множества Λ) называется псевдосходящейся, если $V(x_\mu - x_\lambda) \leqslant \lambda$ для всех $\mu < \lambda$; элемент x называется псевдопределом псевдосходящейся последовательности $\{x_\lambda\}$, если $V(x - x_\lambda) \leqslant \lambda$. Нормированный модуль M тогда и только тогда ультраполон, когда каждая псевдосходящаяся последовательность элементов модуля M имеет в M псевдопредел. Фактор-модуль $\overline{M}_\lambda$ модуля M_λ по подмодулю $\bigcup_{\mu<\lambda} M_\mu$ называется Λ-μ фактор-модулем модуля M. Норма V модуля M определяет некоторую норму на произвольном подмодуле N модуля M. Если при этом для произвольного элемента $\lambda \in \Lambda$ имеет место равенство $\overline{N}_\lambda = \overline{M}_\lambda$, то модуль M называется непосредственным расширением модуля N. Нормированный модуль M называется максимальным, если для него не существует собственного непосредственного расширения. Для каждого нормированного модуля существует по крайней мере одно максимальное непосредственное расширение. Строится пример, показывающий, что максимальное непосредственное расширение определяется в общем случае не однозначно. Каждый ультраполный модуль максимален. Если R — кольцо главных идеалов, то каждый максимальный R-модуль ультраполон. Далее рассматривается случай, когда M является векторным пространством над полем K с оценкой v, принимающей значения в некоторой линейно упорядоченной мультипликативной группе Γ, пополненной наименьшим элементом 0. Предполагается также, что группа Γ действует на множестве Λ как группа операторов, сохраняющих отношение порядка. При этом векторное пространство M называется нормированным, если наряду с первыми двумя условиями, входящими в определение нормированного модуля, выполняется условие $V(\alpha x) = v(\alpha) V(x)$ для каждого $\alpha \in K$.

Имеет место следующая теорема: Пусть M и M^* — два нормированных векторных пространства над полем K, нормы которых принимают значения соответственно в множествах Λ и Λ^* и пусть $\Phi: \Lambda \to \Lambda^*$ — некоторое Γ-отображение, сохраняющее порядок. Тогда, если пространство M^* максимально, то любой гомоморфизм f произвольного подпространства пространства M в пространство M^*, удовлетворяющий условию $V^*(f(x)) \leqslant \Phi(V(x))$, можно продолжить до некоторого гомоморфизма всего пространства M в пространство M^*, удовлетворяющего тому же условию.

Из этой теоремы вытекает, что для нормированных векторных пространств максимальные непосредственные расширения строятся однозначно с точностью до изоморфизма. В заключение несколько более детально исследуются нормированные векторные пространства и, в частности, максимальные векторные пространства над полем степенных рядов. Е. Г. Шульгейфер

7324. О постулатах структур. Калман (On the postulates for lattices. Kalman J. A.), Math. Ann., 1959, **137**, № 4, 362—370 (англ.)

Структуры обычно определяются как множества двумя бинарными операциями ($\wedge$ и $\vee$), удовлетворяющими множеству аксиом ω:

(1) $x \wedge (x \vee y) = x$, (5) $x \vee (x \wedge y) = x$,

(2) $x \vee (y \wedge x) = x$, (6) $x \wedge (y \vee x) = x$,

(3) $(y \vee x) \wedge x = x$, (7) $(y \wedge x) \vee x = x$,

(4) $(x \wedge y) \vee x = x$, (8) $(x \vee y) \wedge x = x$,

(A) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, (B) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$,

(C) $x \wedge y = y \wedge x$, (D) $x \vee y = y \vee x$,

(I) $x \wedge x = x$, (J) $x \vee x = x$.

Множество аксиом ω не является множеством независимых аксиом. Референтом (Укр. матем. ж., 1951, **3**, 85—97) было описано множество всех подмножеств множества ω, каждое из которых состоит лишь из не-

зависимых аксиом. В работе решается аналогичная задача для каждого подмножества $\xi \subseteq \omega$, т. е. описаны все подмножества из ξ, состоящие лишь из независимых аксиом, из которых вытекают все остальные аксиомы множества ξ. Ю. И. Соркин

7325. О структурах топологий. Хартманис (On the lattice of topologies. Hartmanis Juris), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 4, 547—553 (англ.)

Изучаются структуры $LT(S)$ всех топологий и $LT_1(S)$ всех T_1-топологий на данном множестве S. (Отношение порядка для топологий R_1 и R_2 вводится естественным образом: $R_1 \leqslant R_2$, если совокупность R_1-замкнутых подмножеств содержится в совокупности R_2-замкнутых подмножеств). Показано, что если S содержит более двух элементов, то $LT(S)$ обладает лишь тривиальными гомоморфизмами; если S бесконечно, то структура полных гомоморфизмов структуры $LT_1(S)$ изоморфна структуре, состоящей из всех конечных подмножеств множества S и самого S, упорядоченных при помощи теоретико-множественного включения. Если множество S конечно, то $LT(S)$ — структура с дополнениями, причем, если S содержит более двух элементов, то дополнение единственно только у 0 и J (единицы структуры $LT(S)$). Если S состоит не более чем из двух элементов или бесконечно, то группа всех автоморфизмов структуры $LT(S)$ изоморфна симметрической группе на множестве S. Если множество S конечно и содержит более двух элементов, то группа всех автоморфизмов структуры $LT(S)$ изоморфна прямому произведению симметрической группы на S и циклической группы второго порядка, если же S бесконечно, то группа всех автоморфизмов структуры $LT_1(S)$ изоморфна симметрической группе на S.

В заключение дается без доказательства следующая теоретико-структурная характеристика структур $LT(S)$ для конечных множеств S. Пусть A — некоторое множество точек структуры L. Через $\overline{A}$ обозначается минимальное множество точек, содержащее A и вместе с любыми двумя точками p и q содержащее все точки $r \leqslant p \mid q$. Структура L называется высокой (tall), если для каждого A множество $\overline{A}$ состоит из всех точек p, для которых $p \leqslant a$, где a является объединением всех точек из A. Структура $LT(S)$ является высокой тогда и только тогда, когда множество S конечно. И. В. Стеллецкий

7326. Структурная теория обобщенных подразделений. Хартманис (Lattice theory of generalized partitions. Hartmanis Juris), Canad. J. Math., 1959, **11**, № 1, 97—106 (англ.)

Пусть S — множество, содержащее n или более элементов. Подразделением типа n множества S назовем такую систему Σ подмножеств множества S (будем называть их блоками), что любые n элементов из S содержатся в одном и только в одном блоке, а каждый блок содержит не менее, чем n элементов. Скажем, что $\Sigma_1 \leqslant \Sigma_2$, если каждый блок из Σ_1 содержится в некотором блоке из Σ_2. Оказывается, что это определение превращает множество подразделений в полную структуру $LP_n(S)$. Эта структура изоморфна структуре подпространств некоторой геометрии в смысле автора (РЖМат, 1 57, 3850). Выводятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы структура подпространств некоторой геометрии была изоморфна структуре всех подразделений типа 2 (т. е. геометрий) некоторого множества S. Устанавливаются и некоторые другие свойства структур $LP_n(S)$. Л. А. Скорняков

7327. Свободные монадические алгебры. Халмош (Free monadic algebras. Halmos Paul R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 2, 219—227 (англ.)

Монадической (булевой) алгеброй называется булева алгебра A, на которой определен оператор $\exists$, называемый квантором (существования), такой, что $\exists 0 = 0$, $p \leqslant \exists p$ и $\exists (p \wedge \exists q) = \exists p \wedge \exists q$, где p и q — произвольные элементы из A. Монадическая алгебра A называется свободным монадическим расширением булевой алгебры B, если: 1) B — булева подалгебра A, 2) A (монадически) порождается множеством B, 3) каждый булев гомоморфизм g, отображающий B на произвольную монадическую алгебру C, имеет (необходимо единственное) продолжение до монадического гомоморфизма f, отображающего A на C. Работа посвящена конструктивному построению свободных монадических расширений булевых алгебр. Основной результат работы — теорема, описывающая свободные монадические расширения булевых алгебр. Ю. И. Соркин

7328. Композит, уравнения и свободно порожденные алгебры. Нерод (Composita, equations, and freely generated algebras. Nerode A.), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **91**, № 1, 139—151 (англ.)

V-композитом называется алгебра T, состоящая не менее чем из двух элементов, содержащая непустое подмножество V и обладающая таким множеством S отображений множества T в себя, что 1) S содержит тождественное отображение и замкнуто относительно умножения отображений, 2) каждое отображение множества V в T имеет и притом единственное продолжение в S.

Пусть в алгебре T подмножество V составляет систему образующих и S — множество всех ее эндоморфизмов. Алгебра T называется свободной над V, если всякое отображение V в T имеет продолжение в S. Вводятся понятия гомоморфизма, эпиморфизма, мономорфизма, эндоморфизма композитов, свободного композита и т. д. Исследуются различные свойства этих и других понятий для композитов. В качестве следствия одной из теорем решается 68-я проблема Биркгофа (Биркгоф, Теория структур, М., Изд-во ин. лит., 1952, стр. 208):

Пусть G — непустое множество; $P(G)$ — множество всех его подмножеств; $P(P(G))$ — множество всех подмножеств множества $P(G)$; W_g — множество всех подмножеств множества G, содержащих элемент g, где $g \in G$; и пусть W — множество всех W_g для $g \in G$; тогда дистрибутивная подструктура в $P(P(G))$, порожденная множеством W, свободна над W. Ю. И. Соркин

7329. Связи между структуроподобными алгебрами и множествами с отношениями. Фельшер (Beziehungen zwischen verbands-ähnlichen Algebren und geregelten Mengen. Felscher Walter), Math. Ann., 1958, **135**, № 5, 369—387 (нем.)

Под структуроподобной алгеброй (v-алгеброй) на множестве E понимают тройку $(E, \mid\mid, \mid_\mid)$, где $\mid\mid$ и $\mid_\mid$ — бинарные, однозначные операции, определенные, вообще говоря, не для любых пар элементов из E. Рассматриваются v-алгебры на фиксированном множестве E, в которых выполняется условие: $(K_3^\vee)$, если $x' \mid y$ и $y' \mid x$ существуют, то $x' \mid y = y' \mid x$. Устанавливаются отображения φ, сопоставляющие каждой такой v-алгебре на множестве E, некоторое антисимметричное бинарное отношение на том же множестве E и ψ, сопоставляющее каждому антисимметричному бинарному отношению на E некоторую v-алгебру на E, удовлетворяющую условию $(K_3^\vee)$. Соответствия φ и ψ являются естественным обобщением известной связи между понятиями структуры как частично упорядоченного множества и как универсальной алгебры с двумя операциями. Даются внутренние характеристики совокупностей Φ тех v-алгебр A на E, для которых $\varphi\psi A = A$ и Ψ тех отношений B на E, для которых $\varphi\psi B = B$. Естественным образом вводится отношение порядка на множестве всех изучаемых v-алгебр на E. Доказывается, что для

любого отношения B из Ψ совокупность всех v-алгебр A на E, удовлетворяющих условиям:

$(K_1^{12\vee})$ если $x'|y$ существует, то $y'|x$ существует и $x'|y = y'|x$;

$(K_1^{12\wedge})$ если $x_1|y$ существует, то $y_1|x$ существует и $x_1|y = y_1|x$, и $\psi\varphi A \geqslant A$, для которых $\varphi A = B$ образует полную структуру, единичным элементом которой является v-алгебра $\psi\varphi A \in \Phi$.

Указанная теорема является обобщением соответствующей теоремы Ю. И. Соркина (РЖМат, 1955, 13). Далее внутренним образом характеризуются классы v-алгебр на E которые взаимно однозначно соответствуют классам рефлексивных и транзитивных отношений на E. В последнем разделе работы рассматриваются некоторые вопросы аксиоматически следующих классов v-алгебр на E: Σ-структуры; Σ_1-класс v-алгебр на E, которому соответствуют те частичные упорядоченности множества E, при которых два элемента только тогда имеют общий следующий (предыдущий) элемент, когда они имеют точную верхнюю (нижнюю) грань; Σ_2-структуроиды в смысле Ю. И. Соркина.

И. В. Стеллецкий

7330. Теорема существования для функционально полных универсальных алгебр. Фостер (An existence theorem for functionally complete universal algebras. Foster Alfred L.), Math. Z., 1959, **71**, № 1, 69—82 (англ.)

Пусть $S_p = (n_1, n_2, \ldots)$ — данная специя и $\mathfrak{A} = (A, o_1, o_2, \ldots)$ — универсальная алгебра этой специи, где через $A = (\ldots, \varsigma, \ldots)$ обозначается множество элементов алгебры $\mathfrak{A}$, а через $o_1, o_2, \ldots$ — примитивные операции, причем o_i является n_i-арной операцией, $i = 1, 2, \ldots$. Алгебра $\mathfrak{A}$ называется функционально полной, если для каждого целого положительного числа k каждое отображение $f(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k)$ множества A^k (k-й картановой степени A) во множество A может быть представлено как $\mathfrak{A}$-функция, т. е. как некоторая примитивная композиция k неизвестных $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ и (возможно пустого) множества констант. Если каждое отображение $f(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k)$ может быть представлено как строгая $\mathfrak{A}$-функция, т. е. как $\mathfrak{A}$-функция, не содержащая констант, то алгебра $\mathfrak{A}$ называется строго функционально полной. Алгебра $\mathfrak{P} = (P, o_1, o_2, \ldots)$, являющаяся строго функционально полной и не изоморфная с одноэлементной алгеброй, называется первичной алгеброй специи Sp.

В работе доказывается существование широкого класса первичных алгебр специи (2, 1), который содержит все до сих пор известные примеры этой специи. Под бинарной алгеброй (B, x) понимается универсальная алгебра специи (2), которая обладает нулем и единицей: $0, 1 \in B$, $0 \neq 1$; $0 \times \zeta = \zeta \times 0 = 0$; $1 \times \zeta = \zeta \times 1 = \zeta$ ($\zeta \in B$). Операция $\times$, вообще говоря, не является ни коммутативной, ни ассоциативной. Алгебра $(B, \times, \frown)$ специи (2, 1) называется цикличной системой, если: 1) $(B, \times)$ есть бинарная алгебра; 2) $\zeta\frown$ есть циклическая перестановка множества B; 3) $0\frown = 1$. Конечная циклическая система $(B, \times, \frown)$, которая строго функционально полна (а следовательно, является первичной алгеброй), называется первичной системой.

Основная теорема утверждает существование первичных систем.

I. Пусть $(B, \times)$—конечная бинарная алгебра, не изоморфная с 4-элементной алгеброй $(H_4, \times)$, указанной ниже, а в остальном совершенно произвольная. Тогда существует по крайней мере одна такая циклическая перестановка $\frown$ множества B, что $(B, \times, \frown)$ является первичной системой.

II. Пусть $(H_4, \times)$ есть бинарная алгебра, задаваемая следующей таблицей:

$\times$	0	1	α	β
0	0	0	0	0
1	0	1	α	β
α	0	α	α	0
β	0	β	0	β

Тогда не существует перестановки $\frown$ множества H_4 такой чтобы $(H_4, \times, \frown)$ была первичной системой.

Л. А. Каролинская

7331. Алгебраические расслоенные пространства. Серр, Сугаку, 1956, **7**, № 4, 255—256 (японск.)

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СХЕМ СВЯЗИ И УПРАВЛЕНИЯ

7332. Логика автоматов. Беркс, Ван Хао (The logic of automata. Part I, II. Burks Arthur W., Wang Hao), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, **4**, № 2, 193—218; № 3, 279—297 (англ.)

Предлагается теория автоматов, основанная на использовании методов математической логики. Формулируется понятие «растущего» автомата, частными случаями которого являются машина Тьюринга и самовоспроизводящаяся машина. Даются методы анализа детерминистических автоматов в терминах их состояний. Эти методы позволяют создать алгорифм для определения того, будут ли два соединения автоматов вести себя одинаково или нет. Рассматриваются также сети автоматов и сравниваются с нервными сетями. Особое внимание обращается на анализ циклов. Библ. 17 назв.

Г. Н. Поваров

7333. Инженерные применения булевой алгебры. Часть I. Язык и законы булевой алгебры. Бейзер, Лейбхолз (Language and laws of boolean algebra. Beizer Boris, Leibholz Stephan W.), Electr. Manufact., 1958, **61**, № 5, 129—138 (англ.)

Популярная статья. Объясняются основные понятия булевой алгебры и ее применение к контактным схемам, а также к вентильным сеткам, электронно ламповым, транзисторным и криотронным переключательным схемам. Библ. 6 назв.

Г. Н. Поваров

7334. Инженерные применения булевой алгебры. Часть 2. Анализ однотактных схем с помощью булевых матриц и карт Карно. Бейзер, Лейбхолз (Engineering applications of boolean algebra. Part 2. Analyzing combinational circuits by boolean matrices and Karnaugh maps. Beizer Boris, Leibholz Stephen W.), Electr. Manufact., 1958, **61**, № 6, 98—108, 326, 328 (англ.)

Ч. I см. реф. 7333. Рассматриваются булевы матрицы (матрицы соединений узлов схемы) как средство систематизации процесса прослеживания всех путей в релейной схеме с целью получить алгебраическое выражение, представляющее проводимость схемы. Излагаются правила, определяющие регулярный процесс сведения матрицы соединений n-го порядка к матрице низшего порядка с удалением неполюсных узлов. Сведение с помощью этого процесса матрицы n-го порядка к матрице 2-го порядка дает возможность получить алгебраическое выражение двухполюсной схемы. Показывается на примерах, что иногда можно упростить схему с помощью исключения некоторых узлов. Приводится порядок понижения числа узлов, позволяющий с большей вероятностью достичь успеха в упрощении схемы. Полностью задача решается путем перебора всех вариантов. Отдается предпочтение минимизации сложных выражений булевых функций с помощью карт Карно (РЖМат, 1955, 2427), позволяющих визуально определять соседние конституенты единицы, содержащиеся в

булевой функции, и объединять их для удаления некоторой переменной. Рассмотрены карты Карно для различного числа переменных. Карта для четырех переменных является основной. Более сложные карты являются комбинациями основных, более простые — их частями. Объединение «соседей» (соседних конституэнтов) в группы различным образом дает функционально-эквивалентные алгебраические выражения, различающиеся числом букв или самими буквами. Наименьшее число букв в выражении дают наиболее крупные группы соседей, взятые в наименьшем возможном количестве. Ю. Л. Томфельд

7335. Алгебра маршрутов. Давите (L'algebra degli itinerari. Davite Adelmo), Ingegneria ferroviaria, 1958, 13, № 11, 999—1002 (итал.; рез. франц., англ., нем.)

Излагается два метода определения независимости маршрутов на железнодорожных узлах по матрице инциденций. В одном методе независимость определяется с помощью булевой алгебры, в другом — с помощью определителя Грама в векторном пространстве. Используются работы П. С. Александрова (РЖМат, 1957, 7779К). Г. Н. Поваров

7336. Совместимые маршруты. Потхофф (Verträgliche Fahrwege. Potthoff Gerhart), Wiss. Z. Hochschule Verkehrswes. Dresden, 1957—1958, 5, № 6, 809—811 (нем.; рез. русск., англ., франц.)

Используются отрицание и конъюнкция для символической записи В-таблиц исключения несовместимых маршрутов. Этот способ записи дает возможность простой оценки трех и больше одновременно используемых и, таким образом, совместимых маршрутов. Описанный способ применим в эксплуатации железных дорог и при организации автомобильного транспорта. По резюме автора

7337. Фреге и алгебра переключений. Хёринг (Frege und die Schaltalgebra. Hoering W.), Arch. math. Logik und Grundlagenforsch., 1957, 3, № 3-4, 125—126 (нем.)

Отмечается, что известный немецкий логик XIX в. Фреге (Frege G., Begriffsschrift, Halle, 1879) предложил для записи формул исчисления высказываний графические схемы, которые фактически весьма близки к принципиальным изображениям контактных схем. Таким образом, Фреге как бы предчувствовал одно из наиболее важных современных применений алгебры логики — логический синтез этих схем. Г. Н. Поваров

7338. Применение алгебры логики к двоичной технике. II, III. Субье-Ками (L'algèbre logique appliquée aux techniques binaires. II, III. Soubies-Camy Henri), Automatisme, 1958, 3, № 8, 303—310; № 9, 338—345 (франц.)

Ч. I см. РЖМат, 1960, 4990.

Описываются схемы элементов, выполняющих основные логические операции, и избирательные схемы на диодах и электронных лампах, транзисторах, газоразрядных приборах, ферритовых сердечниках и трансфлюкторах. Илл. 15. А. В. Шилейко

7339. Применение алгебры логики к двоичной технике. IV. Часть 3. Применение логических схем в цифровых вычислительных машинах. Субье-Ками (L'algèbre logique appliquée aux techniques binaires. IV. 3e-partie. Les circuits logiques appliqués aux calculateurs numériques. Soubies—Camy Henri), Automatisme, 1958, 3, № 10, 385—393 (франц.)

Третья часть работы, посвященной использованию алгебры логики к расчету и анализу схем, использующих двоичные цифровые элементы (РЖМат, 1960, 4990; реф. 7338). Кратко описывается структура электронной цифровой вычислительной машины. Описываются с помощью логических соотношений блок-схемы полусумматоров, полного сумматора, элемента накапливающего счетчика и т. д. А. В. Шилейко

7340. Применение теории дистрибутивных структур к анализу схем автоматических устройств для передачи сигналов. I, II. Кардо (Application de l'algèbre des treillis distributifs aux transmetteurs automatiques à programmes. I, II. Cardot Claude), Automatisme, 1959, 4, № 1, 3—13; № 2, 68—71 (франц.)

Рассматриваются основные положения теории дистрибутивных структур и, в частности, связь ее с алгеброй Буля. Описываются методы применения этой теории к задачам анализа и синтеза устройств для передачи сигналов. В качестве примера приводится схема устройства для автоматической передачи сигналов кодом Морзе. Комбинация знаков Морзе, соответствующая данной букве, формируется автоматически при нажатии клавиши. Библ. 6 назв. А. В. Шилейко

7341. Логическая машина большой емкости для анализа релейных схем. Пархоменко П. П., Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Энерг. и автоматика, 1959, № 3, 179—180

Излагаются принципы работы машины для анализа релейных схем в трех основных режимах: 1) проверки схемы при всех наборах ее элементов; 2) получения таблицы включения многотактной схемы; 3) проверки соответствия схемы заданной для нее таблице включения. Основным является принцип разложения схемы на конституенты единицы, естественный для однотактных схем. Представление многотактной схемы в виде однотактного эквивалента позволяет применить тот же принцип также и к анализу многотактных схем. Приводится блок-схема машины. Дается краткое описание функций и взаимосвязей блоков при работе машины. Ю. Л. Томфельд

7342. Операция «мост» в булевой алгебре. Сантос, Аранго (La operación puente del álgebra de Boole. Santos J., Arango H.), Cienc. y técn., 1958, 125, № 628, 168—175 (исп.; рез. англ.)

Рассматривается операция „мост“

$$A,\ B\hat{P}C,\ D = AC \cup APD \cup BD \cup BPC$$

над 5 элементами булевой алгебры. С помощью этой операции авторы рассчитывают получить адекватное представление структуры мостиковых контактных схем через формулы булевых функций. Подробно исследуются свойства операции (коммутативность, выполнение теоремы Де Моргана и др.).

Примечание референта. Аналогичная попытка принадлежит Ю. Васильеву (РЖМат, 1960, 4995). Однако, согласно А. В. Кузнецову (РЖМат, 1959, 889), такие „мостиковые“ операции не позволяют охватить алгебраической записью все возможные структуры мостиковых контактных схем. Г. Н. Поваров

7343. Письмо в редакцию. Поваров Г. Н., Докл. АН СССР, 1958, 123, № 5, 774

Поправка, см. РЖМат, 1955, 459.

Примечание редакции. В поправке опечатка: вместо $2_n \cdot n$ следует читать $2^n \cdot n$.

См. также: 7182, 7188, 7190, 7346, 7380, 7428, 7451, 7780, 7890, 8155, 8156, 8270.

ТОПОЛОГИЯ

Редактор *П. С. Александров*

7344. Элементарная теорема о графах. Харари (An elementary theorem on graphs. Harary Frank), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 5, 405—407 (англ.)

Если в связном графе r перешеечных вершин и n_i — число компонент связности после удаления i-й из этих вершин, то число компонент после удаления всех перешеечных вершин есть $N = \sum_1^r (n_i - 1) + 1$.

Ф. Я. Ветухновский

7345. Теория обобщенных конфигураций. Чулик (Theorie zobecněných konfigurací. Čulik Karel), Práce Brněnské základ. ČSAV, 1957, **29**, № 5, 225—255 (чешск.; рез. нем., русск.)

k-мерной обобщенной конфигурацией (или просто конфигурацией) $M = \{f, M^{(i)}\}_{i=1}^k$ называется конечный или бесконечный граф M вместе с разложением его на конечное число непересекающихся множеств $M^{(i)}$, каждое из которых может состоять из вершин, не связанных между собой ребрами. Здесь функция $f(x, y)$, где x и y — вершины графа M, есть инциденция конфигурации, т. е. она равна единице, если x и y связаны ребром, и нулю в противном случае. В работе строится теория таких конфигураций. Вводится понятие подконфигурации, получающейся из данной конфигурации уменьшением числа множеств $M^{(i)}$ с сохранением порядка их нумерации и отбрасыванием части их элементов, но без изменения функции $f(x, y)$. Тогда каждую конфигурацию можно описать с помощью ее главных (т. е. максимальных) двумерных подконфигураций, которые в случае конечной конфигурации можно задавать таблицами инциденций, т. е. системами матриц инциденций. Далее вводится понятие K-гомоморфизма φ конфигурации $M = \{f, M^{(i)}\}_{i=1}^k$ на конфигурацию $N = \{g, N^{(i)}\}_{i=1}^l$ как такого отображения графа M на граф N, при котором $M^{(i)}$ отображаются на $N^{(i)}$, причем выполняется тождество $f(x, y) = g(\varphi(x), \varphi(y))$. Такой K-гомоморфизм естественно определяет факторконфигурацию данной конфигурации, отвечающую притом тому же графу, что и данная. Конфигурация называется простой, если она не имеет собственных факторконфигураций. Доказываются некоторые свойства простых конфигураций. Показывается, что при K-гомоморфизме образ и прообраз связной конфигурации (т. е. конфигурации со связным графом) тоже связны, за исключением случая тривиальных конфигураций, состоящих из одного множества изолированных вершин. Рассматривается ряд других свойств связных, а также локально связных конфигураций. Далее, для множества непересекающихся конфигураций вводится понятие суммы и декартова произведения, для которых оказываются справедливыми коммутативный, ассоциативный и дистрибутивный законы. Эти операции изучаются для случая простых, связных и других специальных конфигураций. Изучаются также группы внутренних и внешних автоморфизмов конфигурации и доказываются некоторые их свойства. Под внутренним автоморфизмом конфигурации при этом понимается всякий ее изоморфизм, т. е. взаимно однозначный K-гомоморфизм на себя, а под внешним автоморфизмом — ее изоморфизм на конфигурацию, полученную из нее изменением нумерации множеств $M^{(i)}$. Изучаются еще некоторые классы специальных конфигураций (симметричных, правильных), относительно которых доказывается ряд теорем.

М. Ф. Бокштейн

7346. К теории графов. Чулик (Zur Theorie der Graphen. Čulik Karel), Časop. pěstov. mat., 1958, **83**, № 2, 133—155 (нем.; рез. чешск., русск.)

Автор, пользуясь общими алгебраическими конструкциями на произвольном множестве, последовательно излагает элементарные предложения теории графов. Если f — бинарное отношение на множестве F, то гомоморфное отображение φ графа определяется как отображение $F \to G$ при условии $f[a, b] = f[\varphi(a), \varphi(b)]$ $a, b \in F$. С помощью этого понятия и вводятся различные определения, как, например, в теории групп, подграфа, фактор-графа и т. д. Граф называется простым, если он допускает только тождественный гомоморфизм и, конечно, стягивание в одну точку. Таким образом граф можно характеризовать гомоморфным простым фактор-графом и системой мощностных характеристик прообразов вершин этого простого фактор-графа. Столь абстрактное изложение теории графов параллельно другим алгебраическим теориям; так, например, теория неориентированных графов имеет много общего с теорией упорядоченных множеств и с теорией отношений математической логики.

Р. Е. Кричевский

7347. О критических графах. Чулик (O kritických grafech. Čulik Karel), Časop. pěstov. mat., 1958, **83**, № 4, 472—473 (чешск.)

Заметка содержит основные понятия и определения, связанные с хроматической функцией на графе, и понятие критического графа.

Ф. Я. Ветухновский

7348. Об одном комбинаторном свойстве выпуклых множеств. Берж (Sur une propriété combinatoire des ensembles convexes. Berge Claude), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 19, 2698—2699 (франц.)

С помощью аналога леммы Шпернера для векторного топологического пространства и одной теоремы Рамсея (Ramsey F., Proc. London Math. Soc., 1930, **30**, 264) выводится следующее утверждение:

Пусть $C_1, C_2, \ldots, C_p$ — семейство выпуклых компактных множеств такое, что: 1) объединение любых $(n+1)$ множеств семейства покрывает выпуклое компактное множество X; 2) из любых r множеств семейства можно выбрать n множеств, имеющих непустое пересечение; 3) $p > \rho_n(r, s)$, где $\rho_n(r, s)$ — число Рамсея порядка n. Тогда существуют s множеств семейства, имеющих непустое пересечение.

Эта теорема применяется для доказательства принципа минимакса Шиона.

Ф. Я. Ветухновский

7349. О характеристике χ-однородных симплициальных комплексов. Ваккаро (Sulla caratteristica dei complessi simpliciali χ-omogenei. Vaccaro Michelangelo), Ann. mat. pura ed appl., 1956, **41**, 1—20 (итал.)

n-мерный симплициальный комплекс K^n называется χ-однородным на своем r-мерном симплексе e^r, если эйлерова характеристика симплициальной звезды этого симплекса равна $(-1)^n$, т. е. совпадает с эйлеровой характеристикой n-мерной клетки. В работе доказывается, что эйлерова характеристика нечетномерного комплекса, χ-однородного на всех своих симплексах четной размерности (что, очевидно, является ослаблением условия, определяющего топологические и даже гомологические многообразия), равна нулю. Выводится также выражение эйлеровой характеристики через одни только $a^{2\nu}$ для комплексов K^n четной размерности, χ-однородных на своих симплексах четной или нечетной размерности. Такое выражение оказывается одинаковым в обоих случаях, и его коэффициенты не зависят от n. Все вычисления проведены до конца.

М. Ф. Бокштейн

7350. Об эквивалентности различных систем аксиом сходимости в пространстве. Харбарт (Über die Äquivalenz verschiedener Axiomensysteme für Limesräume. Harbarth Klaus), Math. Nachr., 1959, 17, № 3-6, 261—272 (нем.)

Проверяется эквивалентность трех общеизвестных способов определения сходимости в топологическом пространстве с помощью понятий последовательности Моора — Смита (направленного множества), базы фильтра и фильтра. А. В. Архангельский

7351. Последовательности Моора—Смита и полные равномерные пространства. Ландсберг (Moore—Smith-Folgen und vollständige uniforme Räume. Landsberg Max), Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden, 1958—1959, 8, № 4, 675—677 (нем.)

С помощью обобщенных последовательностей Коши, последовательностей Моора — Смита, доказываются некоторые известные (как признает и автор) факты из теории полноты равномерных пространств.

Ю. М. Смирнов

7352. О проблемах теории размерности. Приятель (O problemu dimenzij. Prijatelj Niko), Obz. mat. in fiz., 1957—1958 (1959), 6, № 4, 145—152 (словенск.)

Популярное изложение первоначальных идей теории размерности.

7353. О пространствах типа G_δ. Фролик (On G_δ-spaces. Frolík Zdeněk), Чехосл. матем. ж., 1959, 9, № 1, 63—65 (англ.; рез. русск.)

Исследуются пространства, полные в смысле Чеха, т. е. являющиеся множествами типа G_δ в своих бикомпактных расширениях. Доказывается, что вполне регулярное X тогда и только тогда полно в смысле Чеха, когда оно имеет открытую базу $\mathfrak{B}$, обладающую следующим свойством: в базе $\mathfrak{B}$ содержатся такие базы $\mathfrak{B}_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, что $\mathfrak{B}_n - \mathfrak{B}_{n+1}$ и что для всякой центрированной системы $\xi = \{H\}$ открытых множеств H, содержащей элементы любой из баз $\mathfrak{B}_n$ (т. е. $\xi \ni \mathfrak{B}_n \neq \Lambda$), пересечение замыканий $[H]$ непусто.

П. С. Александров

7354. Одно свойство хьюитовского расширения νX топологических пространств. Мрувка (A property of Hewitt extension νX of topological spaces. Mrówka S.), Bull. Acad. polon. sci. sér. sci. math., astron. et phys., 1958, 6, № 2, 95—96, VII (англ.; рез. русск.)

Хьюитовское расширение νX характеризуется условиями: 1) νX является Q-пространством (функционально замкнуто) и содержит X в качестве плотного подмножества; 2) каждая функция $f \in R^X$ (R — прямая) допускает продолжение $f^* \in R^{\nu X}$. Доказывается теорема: Если Y — произвольное Q-пространство, то любая функция $f \in Y^X$ допускает продолжение $f \in Y^{\nu X}$. Указывается возможность обобщения этой теоремы. Б. Г. Левшенко

7355. Пространства, в которых максимальное равномерное строение метризуемо. Рейнуотер (Spaces whose finest uniformity is metric. Rainwater John), Pacif. J. Math., 1959, 9, № 2, 567—570 (англ.)

Доказываются две теоремы:

I. Равномерное строение метрического пространства является максимальным (среди всех строений, совместимых с топологией данного пространства) тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий: 1) каждая непрерывная ограниченная действительная функция равномерно непрерывна, 2) всякое дискретное подпространство равномерно дискретно. Ряд других эквивалентных условий даны Ацудзи (РЖМат, 1959, 3618).

II. Для метризуемого топологического пространства следующие условия эквивалентны: а) максимальное равномерное строение метризуемо, б) множество всех предельных точек бикомпактно, в, г) каждое (замкнутое) множество имеет бикомпактную границу, д) любой непрерывный и замкнутый образ пространства метризуем, е, ж) всякое хаусдорфово факторпространство метризуемо (обладает первой аксиомой счетности), з) каждое замкнутое множество имеет счетную базу окрестностей. Эквивалентные условия даны Нагата (J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. 1950, I, 28—38) и Б. Г. Левшенко (РЖМат, 1958, 8663). Ю. М. Смирнов

7356. Теорема о сумме метризуемых пространств. Врис (A sum theorem for metrizable spaces. Vries H. de), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1958, **A61**, № 2, 184—185; Indagationes math., 1958, **20**, № 2, 184—185 (англ.)

С помощью метризационных теорем Нагата и Смирнова доказывается следующая теорема: Топологическое пространство, являющееся локально конечным объединением семейства замкнутых метризуемых множеств, само метризуемо. Б. Г. Левшенко

7357. Метризация суммы пространств. Стоун (Metrisability of unions of spaces. Stone A. N.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 3, 361—366 (англ.)

Пусть $X = \bigcup A_t$, причем каждое A_t метризуемо. Ставится вопрос, когда будет метризуемым и пространство X. Этот вопрос в работе решается положительно в следующих случаях: 1) пространство X коллективно нормально, локально компактно, а все A_t замкнуты в X;) X регулярно, все A_t открыты в X, и граница каждого из них есть компакт; 3) X нормально, а все A_t — открытые F_σ. Если $X = \bigcup_\alpha A_\alpha$ (число слагаемых, вообще говоря, несчетно), аналогичный вопрос решается положительно в случае, когда система $\{A_\alpha\}$ точечно-счетная, а все A_α открыты в X и локально сепарабельны. Если $X = A_1 \cup A_2$, A_1 и A_2 метризуемы и открыты в X, то X метризуемо при выполнении хотя бы одного из следующих условий: а) одно из A_1 и A_2 имеет счетную базу, б) границы обоих имеют счетную базу; в) граница одного из них есть компакт. В. И. Пономарев

7358. Неполные подпространства хаусдорфова пространства. Уэстон (Incomplete subspaces of a Hausdorff space. Weston J. D.), Arch. Math., 1959, **10**, № 1, 40—41 (англ.)

Пространство X называется абсолютно неполным если оно неполно во всякой метрике, индуцирующей ту же топологию. Пусть хаусдорфово пространство X есть сумма $\bigcup X_\alpha$ (хотя бы двух дизъюнктных гомеоморфных между собой подпространств, каждое из которых плотно в X. Тогда каждое X_α — абсолютно неполно.

В. И. Пономарев

7359. Вложения предельных пространств обратных спектров. Исбелл (Embeddings of inverse limits. Isbell J. R.), Ann. Math., 1959, **70**, № 1, 73—84 (англ.)

I. Предельное пространство спектра из компактов, вложимых в E^n (E^k означает k-мерное евклидово пространство), вкладывается в E^{2n}, в частности предельное пространство спектра из подпространств E^1 является подпространством E^2.

Система $\{U^n\}$ покрытий пространства X звездно-ограничена, если для любого m и n существует такое натуральное число a_{mn}, что любой элемент из U^m пересекается не более чем с a_{mn} элементами из U^n.

II. Если метрическое равномерное пространство X имеет звездно-ограниченный базис равномерных покрытий, базис покрытий, нервы которых p-мерны, и базис покрытий, нерв которых имеет одномерный остов, равномерно эквивалентный подпространству E^q, тогда X равномерно эквивалентен подпространству E^n, где $n = \max(q, 2p + 1)$. Б. А. Пасынков

7360. Плоский континуум, никакие два невырожденных подконтинуума которого не гомеоморфны: приложение обратных спектров. Андерсон, Шоке (A plane continuum no two of whose nondegenerate subcontinua are homeomorphic: an application of inverse limits. Anderson R. D., Choquet Gustave), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 3, 347—353 (англ.)

Используя обратные спектры, авторы построили: 1) плоский континуум M со свойствами: а) никакой подконтинуум M не разбивает плоскости, б) никакие два различных невырожденных подконтинуума M не гомеоморфны, в) M не содержит несчетно много непересекающихся невырожденных подконтинуумов; 2) плоский континуум M' со свойствами: а) каждый невырожденный подконтинуум M' разбивает плоскость, б) никакие два различных невырожденных подконтинуума M' не гомеоморфны; 3) одномерный континуум M'' такой, что: а) никакой невырожденный подконтинуум M'' не вкладывается в плоскость; б) никакие два различных невырожденных подконтинуума M'' не гомеоморфны, в) M'' не содержит несчетно много непересекающихся невырожденных подконтинуумов.

Б. А. Пасынков

7361. Новое пространство замкнутых множеств и многозначные непрерывные отображения бикомпактов. Пономарев В. И., Матем. сб., 1959, **48**, № 2, 191—212

В статье содержится подробное изложение результатов, относящихся к общей теории многозначных отображений; основные из них анонсированы автором в предыдущей публикации (РЖМат, 1957, 474). Некоторые из новых предложений носят вспомогательный характер, но представляют и самостоятельный интерес. К ним относятся, например, свойства пространства $\varkappa X$: пусть $X = \Pi_\alpha X_\alpha$ — топологическое произведение бикомпактов, тогда $\Pi_\alpha \varkappa X_\alpha$ топологически содержится в $\varkappa X$; если X — бикомпакт и множество $\{F_\alpha\}$ бикомпактно в топологии $\varkappa X$ (или ψX), тогда $\cup_\alpha F_\alpha$ замкнуто в пространстве X. Подробно исследуются различные свойства (многозначных) отображений. В частности, класс непрерывных отображений, рассматриваемый Стротером (РЖМат, 1959, 9859), как указывает автор, является чересчур специальным и характеризуется в работе как естественно появляющийся класс сильно непрерывных отображений; этот класс рассматривается в связи с открытыми отображениями. Основные результаты относятся к отображениям бикомпактов. Если f — непрерывное бикомпактное отображение бикомпакта X на T_1-пространство Y, то Y бикомпактно. При непрерывном (многозначном) отображении f бикомпакта в себя всегда существует замкнутое множество A, для которого $fA = A$. Приведен пример многозначного отображения отрезка на себя, не обладающего неподвижной точкой. Для того чтобы отображения f бикомпакта X на бикомпакт Y и обратное отображение f' одновременно были открыты, достаточно, чтобы по крайней мере одно из однозначных отображений $\overline{f}$ и $\overline{f'}$ (соответственно на $\overline{f}X$ и $\overline{f'}Y$) было открыто, тогда открытым будет и второе из этих отображений.

Е. Г. Скляренко

7362. О замкнутых отображениях. Пономарев В. И., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 4, 203—206

Замкнутое отображение, при котором прообразы всех точек бикомпактны, называется бикомпактным отображением. Основные результаты работы следующие: если f есть бикомпактное отображение нормального пространства X на полное пространство Y (в смысле Чеха), то и само X есть полное пространство; если f — бикомпактное отображение нормального пространства X на нормальное пространство Y, то из бикомпактности Y следует бикомпактность X, из локальной бикомпактности Y следует локальная бикомпактность X. Эти теоремы обобщают соответствующие результаты И. А. Вайнштейна для метрических пространств (Уч. зап. Моск. ун-та, 1957, вып. 155, Матем. 5, 3—53). Следующая теорема является, по-видимому, окончательным обобщением теоремы Эйленберга—Уайберна (РЖМат, 1958, 36 3)

Пусть f — бикомпактное отображение нормального пространства X на хаусдорфово пространство Y; существует пространство K и бикомпактные отображения $\varphi: X \to K$ и $\psi: K \to Y$ такие, что $f = \psi\varphi$, φ монотонно, ψ нульмерно, причем K, φ, ψ определены однозначно с точностью до гомеоморфизма. Самостоятельный интерес представляет теорема, используемая для получения основных результатов: Если f — бикомпактное отображение T_1-пространства X на T_1-пространство Y, причем Y имеет тип G_δ в ωY, тогда X также есть G_δ в ωX (ωX — волмеровское расширение). Как отмечает автор, теорему о сохранении полноты (по Чеху) при бикомпактных отображениях другими методами доказал также А. Архангельский. Некоторые из результатов были независимо получены Хенриксеном и Исбеллом (РЖМат, 1959, 2462).

Е. Г. Скляренко

7363. Об открытых отображениях нормальных пространств. Пономарев В., Докл. АН СССР, 1959, **126**, № 4, 716—718

Доказываются следующие теоремы:

1. Пусть f — непрерывное одновременно открытое и замкнутое отображение нормального пространства X на нормальное пространство Y с бикомпактными прообразами точек; тогда единственное отображение βf чеховского расширения βX на βY, являющееся продолжением отображения f, открыто.

2. Если в тех же предположения, пространство X является функционально замкнутым, то функционально замкнуто и пространство Y.

Первое предложение является частным случаем результата, относящегося к теории многозначных отображений: если f — совершенное сильно непрерывное (РЖМат, 1959, 9858) открытое отображение пространства X на пространство Y, то единственное сильно непрывное отображение пространства βX на βY, являющееся продолжением отображения f, открыто. Доказательства этих предложений опираются на усиления теорем 1 и 2 из цитированной работы автора. Автор обращает внимание на следующие вопросы: нельзя ли в теореме 1 (и ее обобщении) отказаться от бикомпактности отображения f, сохраняется ли функциональная замкнутость при совершенных (но не открытых) отображениях?

Е. Г. Скляренко

7364. Теорема о неподвижной точке. О'Нилл, Штраус (A fixed point theorem. O'Neill B., Straus E. G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, № 6, 1148—1151 (англ.)

Пусть $T: X \to Y$ — многозначное отображение; через $T^{-1}: Y \to X$ обозначено такое отображение, что $x \in T^{-1}(y)$ тогда и только тогда, когда $y \in T(x)$. Отображение T непрерывно, если $T(x)$ замкнуто для каждого x и отображение T^{-1} одновременно открыто и замкнуто.

Непрерывное отображение $f: B \to E_n$ окружает точку x в евклидовом пространстве E_n, если $x \in f(B)$ и гомоморфизм $f_*: H_{n-1}(B) \to H_{n-1}(E_n \setminus x)$ ненулевой, при этом H_n — группа гомологий Чеха по некоторому полю коэффициентов. Пусть C — компактное связное подпространство пространства E_n, $T: C \to C$ — непрерывное многозначное отображение, B — некоторое компактное пространство, I — единичный интервал, а $h: B \times I \to E_n$ — такое отображение, что h_0 окружает каждую точку множества C, а h_1 не окружает ни одной. Тогда существует такое число t ($0 < t \leqslant 1$) и точка $Y \in C$, что $y \in h_t(B)$

и $h_t(B) = h(B, t)$ пересекается с $T(y)$. В качестве первого приложения рассматривается обобщение теоремы Какутани — Ямабе — Юдзебо (Yamabe H., Yujobo Z., Osaka Math. J., 1 50, 2, стр. 19).

Если $B \subset E_n$ и $C \subset E_n$ — концентрические $(n-1)$-мерные сферы, причем сфера C лежит внутри сферы B, и если деформация h_t переводит сферу B в множество внутри сферы C. Тогда найдется такое t, что множество $h_t(B)$ пересечет сферу в точках X и Y, находящихся друг от друга на расстоянии $d \leqslant \operatorname{diam} C$. (Для доказательства рассматриваются множества C_x точек, отстоящих от точки x на расстояние d, и многозначное отображение $T: C \to C$, определенное формулой $T(x) = C_x$).

В качестве второго приложения основной теоремы приводятся некоторые оценки, связанные со следующей задачей: В E_3 задана поверхность C; какова минимальная длина такой замкнутой кривой, что сквозь нее можно продеть поверхность C; оценки в пользу того, что такая кривая является минимальной геодезической.

С. С. Рышков

7365. Отображения компактов в евклидовы пространства. Болтянский В. Г., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1959, 23, № 6, 871—892

Отображение f компакта X в евклидово пространство называется k-регулярным $(k \geqslant 1)$, если для любых $k+1$ различных точек $x_0, x_1, \ldots, x_k$ компакта X точки $f(x_0)$, $f(x_1), \ldots, f(x_k)$ не лежат в одной $(k-1)$-мерной плоскости, т. е. являются вершинами k-мерного симплекса.

В работе рассматриваются следующие задачи: 1) найти такое (наименьшее) натуральное N, что любой n-мерный компакт X может быть k-регулярно вложен в евклидово пространство E при $\dim E \geqslant N$; 2) найти такое (наименьшее) натуральное N', что при $\dim E \geqslant N'$ множество всех k-регулярных вложений n-мерного компакта X в евклидово пространство E всюду плотно в множестве всех непрерывных отображений X в E.

При $k = 1$ всякое вложение регулярно. Поэтому в этом случае из классических результатов Понтрягина—Нёбелинга — Ван-Кампена следует, что $N = N' = 2n+1$. В работе доказывается, что $N' = nk+k+n$ для любого k. Для доказательства устанавливаются два неравенства: $N' \leqslant nk+k+n$ и $N' \geqslant nk+k+n$. Для доказательства первого из них используется предложение, являющееся усилением теоремы Понтрягина—Нёбелинга. Второе из них устанавливается с помощью нового понятия „индекса расположения", обобщающего понятие индекса пересечения. Устанавливается также, что любое отображение компакта X в гильбертово пространство можно аппроксимировать сколь угодно близким к нему вложением, k-регулярным для любого k. Относительно числа N не доказывается никаких теорем. Однако во введении автор отмечает, что при $k > 1$ N', вообще говоря, не совпадает с N.

Д. Б. Фукс

7366. О k-регулярных вложениях. Рышков С. С., Докл. АН СССР, 1959, 127, № 2, 272—273

Точка n-мерного компакта называется точкой размерной полноценности, если в любой ее окрестности содержится n-мерный размерно полноценный компакт. Доказывается, что ни один n-мерный компакт, имеющий $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ точек размерной полноценности, не может быть вложен k-регулярно (реф. 7365) в пространство E^N размерности $N < \left[\frac{k+1}{2}\right] \cdot n + \left[\frac{k}{2}\right]$. Доказательство проводится непосредственно из определения k-регулярности.

Примечание референта. Согласно данному в статье определению, автор называет k-регулярным вложением то, что В. Г. Болтянский называет $(k+1)$-регулярным вложением. Однако результаты Болтянского приводятся автором без учета этой разницы, и сама теорема автора доказывается им для k-регулярных вложений в смысле определения Болтянского.

Д. Б. Фукс

7367. О фи-семействах. Уотс (On phi-families. Watts Charles E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, 10, № 3, 369—371 (англ.)

Цель статьи — показать, что в теории пучков можно не употреблять аппарат сечений с носителями в фи-семействе (паракомпактифицирующем семействе), переходя вместо этого к соответствующему пучку над некоторым пространством X^*, определяемым базисным пространством X исходного пучка и семейством носителей $\mathfrak{F}$. Пространство X^* определяется для любого семейства носителей как пространство, получаемое присоединением к $X' = \bigcup_{F \in \mathfrak{F}} F \subset X$ „бесконечно удаленной" точки $\{\infty\}$, в котором открытыми будут множества, открытые в X, и множества с дополнением, принадлежащим $\mathfrak{F}$. Любому пучку $\mathfrak{A}$ над X и семейству носителей $\mathfrak{F}$ можно сопоставить пучок $\mathfrak{A}^*$ над X^*, совпадающий с $\mathfrak{A}$ над X' и тривиальный над $\{\infty\}$, отображению $f: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ можно сопоставить естественно определяемое отображение пучков $f^*: \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}^*$. Это сопоставление оказывается точным функтором; если $\mathfrak{A}$ — тонкий пучок, а $\mathfrak{F}$ — фи-семейство, то $\mathfrak{A}^*$ — тонкий пучок, $\Gamma(X^*, \mathfrak{A}^*)$ естественно изоморфен $\Gamma(X, \mathfrak{A})$.

В заключение автор показывает, что если F — фи-семейство и $\mathfrak{A}$ — пучок над X, то для любого $p \geqslant 0$ имеется естественный изоморфизм $H^p(X^*, \mathfrak{A}^*) = H^p(X, \mathfrak{A})$ и что аналогичные изоморфизмы имеют место, если группы когомологий понимаются в смысле Гротендика, для любого семейства носителей $\mathfrak{F}$, для которого $\bigcup_{F \in \mathfrak{F}} F = X$.

А. А. Иванов

7368. О топологии касательных пучков. Ауслендер, Мак-Кензи (On the topology of tangent bundles. Auslander L., MacKenzie R. E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, 10, № 4, 627—632 (англ.)

Возьмем касательный пучок $I(M)$ многообразия. Тогда компактно-открытая топология в соответствующем косом произведении характеризуется тем, что всякая другая топология, удовлетворяющая условиям: 1) отображение проекции и открытого множества из M в $I(M)$ непрерывны, 2) топология, индуцируемая в слое, совпадает, что и при компактно-открытой топологии, 3) $I(M)$ является регулярным пространством, 4) любая точка $I(M)$ имеет открытую окрестность в этой топологии, замыкание которой в смысле компактно-открытой топологии компактно, совпадает с ней. Строится пример топологии, которая отлична от компактно-открытой и удовлетворяет всем ее перечисленным свойствам, кроме последнего.

И. З. Розенкноп

7369. Комбинаторное определение гомотопических групп. Кан (A combinatorial definition of homotopy groups. Kan Daniel M.), Ann. Math., 1958, 67, № 2, 282—312 (англ.)

Полное изложение опубликованных ранее результатов (РЖМат, 1957, 4650; 1959, 5679, 216, 1330).

М. М. Постников

7370. Соотношение между группами когомологий и гомотопическими группами. Адамс (Une relation entre groupes d'homotopie et groupes de cohomologie. Adams J. F.), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 1, 24—25 (франц.)

Рассматривается вопрос о существовании элемента с нечетным инвариантом Хопфа в гомотопических группах сфер $\pi_{2n-1}(S^n)$ при $n = 2^i$, $i > 3$, а именно, если обе группы $\pi_{2n-1}(S^n)$ и $\pi_{4n-1}(S^{2n})$ содержат элемент с нечетным инвариантом Хопфа, то $n \leqslant 4$.

Для доказательства этой теоремы автор вводит метод изучения стационарных гомотопических групп

$\pi_m^s(x) = \varinjlim_{n\to\infty} \pi_{m+n}(S^n X)$, где S^n — итерированная надстройка над пространством X, связанный с изучением когомологий алгебры Стинрода $A \bmod Z_p$. Тогда существует спектральная последовательность $E_r^{s,t} = E_r^{s,t}(X)$, обладающая следующими свойствами:

1) $E_r^{s,t} = 0$ при $s < 0$ или $s > t$;

2) дифференциал d_r отображает $E_r^{s,t}$ в $E_r^{s+r,t+r-1}$;

3) $E_{r+1}^{s,t} = H_r^{s,t}(E_r; d_r)$;

4) $E_2^{s,t} = \mathrm{Ext}_A^{s,t}(H^*(X, Z_p); Z_p)$;

5) существует фильтрация $(B^{s,m+s})$ группы $B^{0,m} = \pi_m^s(x)$, такая, что $E_\infty^{s,t} = B^{s,t}/B^{s+1,t+1}$ и $\bigcap_{t-s=m} B^{s,m+s}$ содержит те и только те элементы, порядок которых взаимно прост с p.

Пусть теперь X обозначает сферу S^0. При этом условии $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(H^*(X, Z_p); Z_p)$ совпадает с $H^{s,t}(A)$, и существует ассоциативное произведение

$$E_r^{s,t} \otimes E_r^{\bar{s},\bar{t}} \to E_r^{s+\bar{s},t+\bar{t}}$$

такое, что $u \cdot v = (-1)^{(t-s)(\bar{t}-\bar{s})} v \cdot u$, $d_r(u \cdot v) = d_r(u) \cdot v + (-1)^{t-s} \cdot u \cdot d_r(v)$, $\{u \cdot v\} = \{u\} \cdot \{v\}$. При $r = 2$ это произведение совпадает (с точностью до знаков) с обычным произведением $H^{s,t}(A) \otimes H^{\bar{s},\bar{t}}(A) \to H^{s+\bar{s},t+\bar{t}}(A)$. При $r = \infty$ это произведение присоединено к композиционному умножению $\pi_m^s(S^0) \otimes \pi_{\bar{m}}^{\bar{s}}(S^0) \to \pi_{m+\bar{m}}^{s+\bar{s}}(S^0)$. В случае $p = 2$ группа $H^1(A) = \sum_t H^{1,t}(A)$ допускает Z_2-базис, состоящий из элементов $h_i \in H^{1,2^i}(A)$, $i = 0, 1, 2 \ldots$

Далее автор переходит к доказательству основного предложения с помощью следующей леммы: Если при $n = 2^i$ группа $\pi_{2n-1}(S^n)$ содержит элемент с нечетным инвариантом Хопфа, то элемент h_i является циклом всех дифференциалов спектральной последовательности. Из леммы следует, что элементы h_0, h_1, h_2, h_3 являются циклами всех дифференциалов. В члене E_∞ умножение на элемент $h_0 \in E_\infty^{1,1}$ присоединено к умножению на 2.

Далее автор доказывает, что в группе $H^3(A) = \sum_t H^{3,t}(A)$ элементы $h_0 \cdot h_i^2 \neq 0$ при $i \geqslant 3$. Пусть теперь оба элемента h_i и h_{i+1} при $i \geqslant 3$ являются циклами всех дифференциалов. Тогда элемент h_i в члене $E_\infty^{1,2^i}$ присоединен к некоторому элементу $\bar{h}_i \in \pi_{2^i-1}^{s}(S^0)$. Поскольку элемент $h_0 h_i^2$ также является циклом всех дифференциалов и число $2^i - 1$ нечетно, то элемент $h_0 h_i^2$, присоединенный к элементу $2\bar{h}_i^2 = 0$, должен быть образом дифференциала d_2. Отсюда необходимо следует, что $d_2(h_{i+1}) = h_0 h_i^2$, поскольку группа $H^{1,2^{i+1}}(A)$ не содержит элементов, кроме h_{i+1}. Это противоречие и доказывает первоначальное утверждение.

С. П. Новиков

7371. Примарные компоненты групп внутренних гомологий. Авербух Б. Г., Научн. докл. высш. школы. Физ-матем. н., 1958, № 5, 3—5

7372. Алгебраическое строение групп внутренних гомологий. Авербух Б. Г., Докл. АН СССР, 1959, 125, № 1, 11—14

Решена в отрицательном смысле известная проблема теории внутренних гомологий: имеются ли в группах внутренних гомологий элементы нечетных порядков? При доказательстве используется построение кольца внутренних гомологий Ω Томом (РЖМат, 1956, 291) и конструкция алгебры Стинрода как у Милнора (РЖМат, 1959, 10933). В первой заметке (реф 7371) доказывается, что группа $\mathfrak{D}^k(\Omega^k)$ не содержит элементов нечетного порядка p при $k < p^3 - 2$, во второй заметке (не зависимой от первой) результат получен во всей общности. Этот результат аннонсирован также Милнором (Milnor J., On the cobordism ring Ω^*, Notices Amer. Math. Soc., 1958, 5, 457), но доказательств еще не появилось.

В. А. Рохлин

7373. Гладкие вложения проективных пространств. Джеймс (Some embeddings of projective spaces. James I. M.), Proc. Cambridge Philos. Soc. 1959, 55, № 4, 294—298 (англ.)

Пусть M — гладкое замкнутое многообразие. Обозначим через $l(M)$ наименьшую размерность евклидова пространства, в которое может быть гладко вложено многообразие M (гладкое вложение многообразия M в многообразие N — это взаимно однозначное регулярное отображение многообразия M в многообразие N). Через $P_n(R)$, $P_n(C)$, $P_n(Q)$ обозначается n-мерное проективное пространство над полем действительных чисел R, полем комплексных чисел C или телом кватернионов Q, через $P_2(A)$ обозначается проективная плоскость над алгеброй чисел Кэли A. В заметке показывается с помощью прямого построения гладкого вложения, что при $n \geqslant 1$

$$l(P_n(R)) \leqslant 2n, \qquad l(P_{2n+1}(R)) \leqslant 4n + 1,$$
$$l(P_n(C)) \leqslant 4n - 1, \quad l(P_{2n+1}(C)) \leqslant 8n + 1,$$
$$l(P_n(Q)) \leqslant 8n - 3, \quad l(P_2(A)) = 25.$$

А. С. Шварц

7374. Компактные однородные пространства и первое число Бетти. Нагано (Compact homogeneous spaces and the first Betti number. Nagano Tadashi), J. Math. Soc. Japan, 1959, 11, № 1, 4—9 (англ.)

Пусть M — однородное пространство связной компактной группы Ли G, S — максимальная связная полупростая подгруппа в G, $S(p)$ — орбита точки $p \in M$ при действии S, B_1 — первое число Бетти многообразия M. Доказывается, что $\dim S(p) + B_1 = \dim M$. Отсюда, в частности, вытекают следующие известные результаты: если $B_1 = 0$, то S транзитивна на M; если $\dim M < B_1$, то M гомеоморфно тору, а если при этом G действует эффективно, то она просто транзитивна на M.

А. Л. Онищик

7375. Орбиты равномерной размерности. Коннер (Orbits of uniform dimension. Conner P. E.), Michigan Math. J., 1959, 6, № 1, 25—32 (англ.)

Пусть Γ — связная компактная группа Ли, действующая на локально компактном, линейно связном, локально связном, конечномерном, метрическом пространстве X со счетной базой, X/Γ — пространство орбит группы Γ. Обозначим через H_x связную компоненту единицы в стационарной подгруппе точки $x \in X$, через F_x — множество всех точек, неподвижных относительно H_x, через B_x — подгруппу всех элементов из Γ, переводящих в себя связную компоненту точки x в F_x. Предположим, что все орбиты группы Γ имеют одинаковые размерности. Доказывается, что если X односвязно, то существует каноническая спектральная последовательность (E_r), в которой $E_2 \cong H(\Gamma/B_x \times X/\Gamma) \otimes H(B_x/H_x)$, а E_∞ — градуированная алгебра, связанная с алгеброй $H(X)$, снабженной некоторой фильтрацией (через $H(Y)$ обозначается алгебра когомологий пространства Y с рациональными коэффициентами). Отсюда выводится, что если X односвязно и имеет такие же

рациональные когомологии, как n-мерная сфера, то выполнено одно из двух условий: $H(X/\Gamma)$ — тривиальна; Γ — группа ранга 1 и $H_x = \{e\}$. Доказывается также, что если X односвязно и подгруппы $H_x \subset \Gamma$ имеют максимальный ранг, то $B_x = H_x$ и X гомеоморфно $\Gamma/H_x \times X/\Gamma$. Эти результаты применяются к изучению того случая, когда орбиты размерность которых меньше максимальной, являются изолированными точками в X/Γ. В заключение доказывается следующий результат, принадлежащий Борелю (РЖМат 1953, 6569): Если группа $\Gamma = SU(2)$ эффективно действует на односвязном пространстве, имеющем такие же рациональные когомологии, как n-мерная сфера ($n \neq 3$), и если все стационарные подгруппы сопряжены, то Γ действует без неподвижных точек. А. Л. Онищик

7376. Заметка о действии $SO(3)$. Коннер, Флойд (A note on the action of $SO(3)$. Conner P. E., Floyd E. E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 4, 616—620 (англ.)

Рассмотрим $N \subset SO(3)$ — нормализатор максимального тора S' группы $SO(3)$. Отображение $\pi: C^n \to C^n/S'O(3)$ можно представить в виде $\pi = \beta\alpha$, где $\alpha: C^n \to C^n/N$; $\beta: C^n/N \to C^n/SO(3)$, $C^n/SO(3)$ — пространство траекторий. Как было доказано авторами ранее (РЖМат, 1959, 9876), $H^i(C^n/N; Z) = 0$ ($i > 0$). С помощью спектральной последовательности непрерывного отображения β доказывается, что $\beta^*: H^i(C^n/SO(3), Z) \to H^i(C^n/N, Z)$ — изоморфизм, откуда $H^i(C^n/SO(3), Z) = H^i(C^n/N, Z) = 0$. Г. Н. Тюрина

7377. Группы на R^n или на S^n. Монтгомери (Groups on R^n or S^n. Montgomery Deane), Michigan Math. J., 1959, **6**, № 2, 123—130 (англ.)

Пусть M — n-мерное евклидово пространство или n-мерная сфера и пусть G — компактная связная группа Ли, дифференцируемым образом действующая на M. Обозначим через U и D множества точек M, лежащих соответственно на неисключительных и на исключительных орбитах наивысшей размерности (РЖМат, 1953, 3615), а через U^* и D^* — пространства орбит, содержащихся в множествах U и D. Доказывается, что $U^* \cup D^*$ односвязно и что многообразие U^* ориентируемо. Отсюда выводится, что группы r-мерных гомологий орбит в U образуют постоянный пучок на U^* и что всякая орбита наивысшей размерности ориентируема. Если $n - r$ нечетно, то D не содержит изолированных орбит. А. Л. Онищик

7378. Однородные пространства алгебраических групп. Шевалле (Espaces homogènes de groupes algébriques. Chevalley C.), Sémin. C. Chevalley. École norm. supér., 1956—1958, 1. Paris, 1958, 8-1—8-13 (франц.)

Пусть U, V — алгебраические многообразия. Функцией на U со значениями в V называется регулярное отображение f открытого подмногообразия $D \subset U$ в V. Если $V = K$, то f называется числовой функцией на U. Обозначим через F_U и F_V поля числовых функций на U и V. Если $f(D) = V$, то отображение f порождает гомоморфизм $\varphi: F_V \to F_U$. Автор говорит, что V есть фактормногообразие многообразия U по f, если выполнены условия: всякий элемент поля F_U, радикальный над $\varphi(F_V)$, принадлежит $\varphi(F_V)$; если $v \in F_V$ и $\varphi(v)$ определена в точке $x \in U$, то v определена в точке $f(x)$. Пусть G — алгебраическая группа, H — ее замкнутая подгруппа, f — естественное отображение группы G на множество G/H. Доказывается, что на G/H существует строение фактормногообразия группы G по f. При этом $\varphi(F_{G/H})$ — поле всех числовых функций на G, инвариантных относительно всех автоморфизмов поля F_G, порожденных правыми сдвигами на элементы подгруппы H. Естественное отображение $G \times G/H \to G/H$ является регулярным. Если H — нормальный делитель, то вышеуказанное строение превращает G/H в алгебраическую группу. А. Л. Онищик

7379. О фундаментальной группе унирациональных преобразований. Серр (On the fundamental group of a unirational variety. Serre J.-P.), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 4, 481—484 (англ.)

Известные числовые инварианты (иррегулярности, кратные роды и т. д.) не позволяют отличать рациональные многообразия от унирациональных. В работе показано, что фундаментальная группа также не годится для этой цели: фундаментальная группа любого унирационального многообразия V (неособого, проективного) над полем комплексных чисел тривиальна. Доказательство получается из следующих соображений. Показано, что род Тодда $\chi(V)$ любого неособого унирационального многообразия V равен единице. Далее, универсальное накрывающее пространство V' многообразия V само представляет собой неособое унирациональное многообразие. Из теоремы Римана—Роха в форме Хирцебруха следует, что $\chi(V') = r\chi(V)$, где r — порядок фундаментальной группы многообразия V. Поэтому $r = 1$. Отсюда следует, в частности, что $H_1(V, Z) = 0$, а так как группа кручения Севери многообразия V двойственна группе кручения $H_1(Y, Z)$, то и кручение Севери унирационального многообразия тривиально. В случае конечной характеристики p не удается доказать, что $\chi(V) = 1$, ибо доказательство в классическом случае использует равенство $h^{q,0} = h^{0,q}$. Независимо от этого показано, что p-компонента группы Севери унирационального многообразия тривиальна. Ю. И. Манин

7380. Теория когомологий многообразий над кольцами. Чжоу Вэй-лян, Игуса (Cohomology theory of varieties over rings. Chow Wei-Liang, Igusa Jun-ichi), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1958, **44**, № 12, 1244—1252 (англ.)

Пусть Σ — фиксированное поле и A — его нетерово подкольцо, допускающее Σ как поле отношений. Множество колец отношений, образуемых из A по отношению к простым идеалам, называется комком (chunk). Локальное кольцо из Σ называется обобщенной точкой поля. Два комка U_1 и U_2 относительно A_1 и A_2 называются когерентными, если A_1A_2 — конечное расширение A_1 и A_2 в случае, если комок, определяемый A_1A_2, есть в точности пересечение U_1 и U_2. Непустое множество обобщенных точек поля X называется моделью, если оно может быть представлено как объединение конечного числа когерентных комков. Если $f \in \Sigma$, то множество обобщенных точек поля X, содержащих f, обозначается D_f. С помощью всевозможных D_f в X вводится топология Зариского. Для модели X можно рассматривать пучки, на которые переносится теория Серра (РЖМат, 1957, 5147).

Рассмотрим фиксированную нетерову область R такую, что Σ — конечное расширение ее поля отношений K. Проективной моделью X над R называется объединение расширений $A_i = R(x_0/x_i, \ldots, x_r/x_i)$, $i = 1, \ldots, r$, где $x_0, \ldots, x_r$ — элементы, порождающие Σ над K. Если R — регулярное локальное кольцо, X — проективная модель над R, то группы когомологий X с коэффициентами в когерентных пучках являются конечными R-модулями. Предположим, что R — кольцо дискретного нормирования, πR — его идеал не единиц и k — соответствующее поле вычетов. Обобщенные точки поля X, содержащие K, образуют открытое множество, являющееся проективной моделью Y над K. Предположим, что тензорное произведение $Y' = k \otimes_R X$ является моделью над k. Пусть F — когерентный пучок над X, $F' = k \otimes_R F$ — ко-

герентный пучок над X, который можно рассматривать и над Y'. Выписываются соотношения Кюннета в виде

$$0 \to k \otimes_R H(X, F) \to H(Y'F') \to \mathrm{Tor}_1^R(k, H, (X, F)) \to 0,$$

а также следующее фундаментальное соотношение:

$$\dim H^q(Y', F') - \dim H^q(Y, F_Y) =$$
$$= \dim_\pi H^q(X, F) + \dim_\pi H^{q+1}(X, F),$$

где F_Y — ограничение F на Y, ${}_\pi M$ обозначает совокупность элементов m R-модуля M таких, что $\pi^m = 0$ (здесь π — отображение точной последовательности $0 \to R \xrightarrow{\pi} R \to k \to 0$).

Отсюда вытекает следующий „принцип верхней полунепрерывности": Пусть V — проективное многообразие и V' — его специализация равной или неравной характеристики. Предположим, что V' — нормальное многообразие. Пусть E — векторное косое произведение над V, специализирующееся в E', $S(E)$ и $S(E')$ — пучки ростков сечений E и E'. Тогда $\dim H^q(V', S(E'))$ по крайней мере равна $\dim H^q(V, S(E))$, и мы имеем, что $\chi(V', S(E')) = \chi(V, S(E))$. И. З. Розенкноп

7381 К. Топологические пространства. Чех. С добавлением: Конструкция некоторых замечательных топологических пространств. Новак. Звездно-нормальные пространства. Катетов (Topologické prostory. Čech Eduard. Dodatky: Konstrukce některých význačných topologických prostorů. Novák Josef. Plně normální prostory. Katětov Miroslav, Praha, ČSAV, 1959, 525 s., 38 Kčs.) (чешск.)

В книге подробно и систематически излагается современная теория топологических пространств. Особенностью книги является то обстоятельство, что все утверждения доказываются при максимально общих предположениях. Интересным новшеством является последовательное употребление обобщенных топологических пространств (называемых в книге просто «топологическими»), в которых замыкание множества не обязано быть замкнутым. Приведены почти все замечательные результаты в области общей топологии, полученные чехословацкими топологами в период активной деятельности Общечехословацкого топологического семинара в Брно, которым руководил автор. Следует отметить, что не излагаются вопросы равномерной топологии.

В книге 12 параграфов и два добавления, написанных И. Новаком и М. Катетовым. К параграфам приложено много разнообразных задач. Кроме того, имеются предисловие, списки литературы, списки обозначений и терминов, а также некролог видного чешского тополога Б. Поспишилю, которому посвящена вся книга.

Строение книги следующее: Чистая теория множеств (§§ 1, 2, 3). Действия над множествами, отображения, теория мощностей, классическая теория порядковых чисел. Общая теория топологических пространств и непрерывных отображений (§§ 4, 5, 6, 7), проводимая в необычно сложных условиях ослабленной аксиоматики. Например, приходится расщеплять понятие непрерывного отображения на сильно непрерывное, обратно непрерывное и двусторонне непрерывное (см. § 7). Некоторые свойства типа компактности (§ 8): свойство Линделефа (всякая система открытых множеств содержит счетную подсистему с тою же суммой), обычная компактность и бикомпактность. Сюда же включены максимальные бикомпактные (чеховские) расширения и вполне регулярные пространства. Метризуемые пространства (§ 9): классические критерии метризуемости, полнота, функции первой категории, свойства канторова дисконтинуума. Связность и локальная связность (§§ 10 и 11). Здесь большое внимание уделено неприводимым связным множествам и локально связным континуумам. Последний § 12 (стр. 343—374) в основном посвящен результатам чешской топологической школы в области H-замкнутых пространств и расширений, а также бикомпактных расширений Чеха.

Три примера И. Новака, в частности, пример некомпактного произведения двух компактных пространств содержатся в первом добавлении. Выросшему в последние годы и уже значительному отделу общей топологии посвящено второе добавление М. Катетова. Это теория паракомпактных пространств и современные метризационные теоремы. В целях общности автор употребляет понятие звездной (чешское plné, английское full) нормальности, эквивалентное паракомпактности для хаусдорфовых пространств. Рассматриваются локально конечные покрытия, псевдометрики, паракомпактные и даже счетно-паракомпактные пространства, приводятся теоремы Бинга и Нагата—Смирнова.

Ю. М. Смирнов

См. также: 7210, 7283, 7325, 7400.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *С. М. Никольский, П. С. Новиков, С. И. Адян, А. А. Конюшков*

7382. Алгебраическая теория меры и интегрирования и ее отношение к классической теории. Бертолини (La teoria algebrica della misura e della integrazione, e suo rapporto con la teoria classica. Bertolini Fernando), Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1957, 11, № 3-4, 225—247 (итал.)

Рассматриваются взаимоотношения между результатами алгебраической теории меры и интеграла по Каратеодори (РЖМат, 1957, 298 К) и результатами классической теории, изложенной в монографиях Сакса и Халмоша. Р. С. Гутер

7383. Функции с обобщенным градиентом и обобщенные поверхности. Флеминг (Functions with generalized gradient and generalized surfaces. Fleming W. H.), Ann. mat. pura ed appl., 1957, 44, 93—103 (англ.)

Рассматривается обобщенное понятие градиента функции нескольких переменных и его связь с вектором меры и обобщенными функциями. Р. С. Гутер

7384. Функции с обобщенным градиентом в теории функций множеств. Пок (Functions with generalized gradients in the theory of cell functions. Pauc C. Y.), Ann. mat. pura ed appl., 1957, 44, 135—152 (англ.)

Рассматриваются различные определения обобщенного градиента для функций, определенных на элементарных параллелепипедах k-мерного ($k \geqslant 2$) евклидова пространства и их взаимоотношения. Р. С. Гутер

7385. Минимизация интегралов в некоторых классах монотонных функций. Бранк, Юинг, Уц (Minimizing integrals in certain classes of monotone functions. Brunk H. D., Ewing G. M., Utz W. R.), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 1, 833—847 (англ.)

Рассматриваются условия существования, единственности и представления монотонных функций, минимизирующих интегралы, возникающие при решении некоторых уравнений максимального правдоподобия.

Пусть дано пространство R_n с точками $t = (t_1, \ldots, t_n)$ и пусть μ — мера, определенная на борелевском поле B подмножеств из R_n. Для фиксированной функции $\alpha(t)$ и произвольной $\theta(t)$, определенных на интервале $I \subset R_n$ и μ-измеримых, определим $J[\theta] = \int F[\alpha(t), \theta(t)]\, d\mu(t)$, где $F[\alpha(t), \theta(t)]$ μ-измерима.

Пусть M обозначает класс всех μ-измеримых функций $\theta(t)$, определенных на I, не убывающих по каждой переменной t_i и таких, что $J[\theta]$ существует, конечен или бесконечен. Пусть M^* есть класс, совпадающий с M при $n = 1$, а при $n > 1$ состоящий из тех $\theta(t) \in M$, для которых разность $\Delta^2\theta$ для каждой пары t_i, t_j координат точки t будет неотрицательна в дополнении до замыкания множества, на котором $\theta(t) = \pm\infty$. Находятся условия, при которых достигается минимум J в M и M^*. Доказываются теоремы существования и представления минимизирующих функций. К. П. Латышев

7386. О пределе интегралов последовательности функций и об одном векторном пространстве функций. Дюге (Sur la limite des intégrales d'une suite de fonctions et sur un certain espace vectoriel de fonctions. Duguć Daniel), C. r. Acad. sci., 1959, 248, № 19, 2702—2703 (франц.)

Доказывается теорема: Если последовательность измеримых на [0, 1] функций f_m сходится по мере к f, причем

$$\varphi_m(t) = \int_0^1 e^{itf_m(x)}\, dx$$

равностепенно дифференцируемы для $t_0 = 0$ и при каждом m существует

$$I_m = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n^{(m)}} f_m(x)\, dx,$$

где $E_n^{(m)} = \operatorname{ens}(|f_m| < n)$, то существует $I = \lim_{m\to\infty} I_m$ и $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)\, dx = I$, где $E_n = \operatorname{ens}(|f| < n)$.

Отмечаются признаки выполнимости условий этой теоремы и в связи с этим рассматривается векторное топологическое пространство (именуемое автором hypo-L_1), состоящее из измеримых на [0, 1] функций f таких, что $\lim_{y\to\infty} y[\operatorname{mes}\operatorname{ens}(|f| > y)] = 0$.

П. И. Романовский

7387. Единственность кратных тригонометрических интегралов. Чэнь Цзы-ци (Chen Tzi-chi), Бэйцзин дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Beijing daxue xuebao. Ziran kexue, Acta scient. natur. Univ. pekinensis, 1959, 5, № 1, 1—13 (кит.; рез. англ.)

Пусть $f(u_1, \ldots, u_k)$ — функция, суммируемая в каждой конечной области $D \subset E_k$, где E_k — евклидово k-мерное пространство. Обозначим через $\sigma(0, r)$ k-мерный шар с радиусом r и с центром в начале координат и пусть $(u, x) = \sum_{i=1}^k x_i u_i$, $u = (u_1, \ldots, u_k)$, $x = (x_1, \ldots, x_k)$. Интеграл $\int_{E_k} f(u)\, e^{i(u,x)}\, dV = I(x)$ суммируем методом (C, α), $\alpha > 0$ к $S_\alpha(x)$, если

$$S_\alpha(x) = \lim_{R\to\infty} \frac{\sigma_\alpha}{R^{2\alpha}} \int_0^R (R^2 - r^2)^{\alpha-1} r I_r(x)\, dr,$$

где

$$I_r(x) = \int_{\sigma(0,r)} f(u)\, e^{i(u,x)}\, dV.$$

Автор следующим образом обобщает одну теорему Шапиро (РЖМат, 1956, 6714). Пусть $f(u) \in L(D)$ для любой конечной области $D \subset E_k$ и $f(u)/(1+u^2) \in L(E_k)$. Если $S_\alpha(x) = 0$ для некоторого $\alpha > 0$, то почти всюду $f(u) = 0$. А. Г. Джваршейшвили

7388. Одно замечание о суммах Римана. Такахаси (A remark on the Riemann-sum. Takahashi Shigeru), Sci. Repts Kanazawa Univ., 1959, 6, № 2, 57—59 (англ.)

Доказывается, что для всякой возрастающей последовательности простых чисел $\{n_k\}$ существуют последовательность действительных чисел $\{h_k\}$ и функция $f(t)$, принадлежащая к классу $L^p(0, 1)$ при любом $p \geqslant 1$ и имеющая период 1, для которой „сдвинутые" на h_k суммы Римана

$$\frac{1}{n_k} \sum_{\nu=1}^{n_k} f\left(t + h_k + \frac{\nu}{n_k}\right)$$

расходятся для почти всех t при $k \to \infty$. Ссылаясь на свою еще не опубликованную работу, автор утверждает, что такой же результат можно получить для любой возрастающей последовательности (не обязательно простых) целых чисел $\{n_k\}$. Построенная функция $f(t)$ является неограниченной. Ставится вопрос о существовании ограниченной $f(t)$, дающей тот же результат.

А. А. Шнейдер

7389. О теореме Фубини и о фундаментальных последовательностях. Наканиси (Sur le théorème de Fubini et les suites fondamentales. Nakanishi Shizu), Proc. Japan Acad., 1959, 35, № 4, 161—166 (франц.)

Пользуясь понятиями и обозначениями теории ранжированных пространств, развитой автором в ряде предшествующих работ, доказывается ряд предложений, в которых фигурирует представление повторного интеграла Данжуа в виде предела последовательности двойных интегралов Лебега. П. И. Романовский

7390. О некоторых свойствах n-гармонических функций. Джафаров А. С., Докл. АН СССР, 1959, 128 № 3, 454—455

Функция (полином) $u(\rho_1, \theta_1; \ldots; \rho_n, \theta_n)$ называется n-гармонической в G, если она является гармонической функцией (полиномом) относительно пар переменных ρ_i, θ_i (при этом остальные переменные каждый раз фиксируются) для $i = 1, 2, \ldots, n$. Устанавливаются дифференциальные свойства n-гармонической функции на основании дифференциальных свойств соответствующей граничной функции.

Обозначим через $L_p^{(n)}(G)$ класс измеримых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ в G, интегрируемых в G в p-й степени, с нормой

$$\|f\|_{p,G}^{(n)} = \left(\int_G |f(x_1, \ldots, x_n)|^p\, dx_1 \ldots dx_n\right)^{1/p}$$

$$(1 < p < \infty).$$

В частности, если $f(x_1, \ldots, x_n)$ будет 2π-периодической относительно каждого переменного и $G = \{0 \leqslant x_s \leqslant 2\pi, s = 1, \ldots, n\}$, то будем употреблять обозначение $L_p^{*(n)}$. Пусть k — натуральное число, G' — любая подобласть G; допустим, что kh — значение вектора, передвигающего G' в пределах G в направлении оси x_s. Такие векторы называются допустимыми.

Положим

$$\omega_{kx_s}(\delta, \varphi)_{p,G} = \sup_{G',\, |h| < \delta} \|\Delta_{hx_s}^k \varphi\|_{p,G'}^{(n)},$$

где $\Delta_{hx_s}^k \varphi$ является конечной разностью k-го порядка функции φ по переменному x_s с шагом h. Если $\varphi(x_1, \ldots$

$\ldots, x_n)$ будет 2π-периодической, то употребляется обозначение $\omega^{*}_{kx_s}(\delta, \varphi)_{p,n}$. Пусть $D = [0 < \rho_l < 1, 0 \leqslant \theta_l \leqslant 2\pi, i = 1, \ldots, n]$ и α_l обозначает любую из переменных ρ_l и θ_l. Приводится без доказательства следующая теорема:

Теорема 1. Пусть функция $f(t_1, \ldots, t_n)$ и ее несмешанные производные $\partial^{r_l} f / \partial t_l^{r_l}$ порядка $r_l \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ принадлежат классу $L_p^{*(n)}$ и пусть n-гармоническая в D функция $u(\rho_1, \theta_1; \ldots; \rho_n, \theta_n)$ удовлетворяет граничному условию $u|_{\rho_s = 1,\ s=1,\ldots,n} = f(\theta_1, \ldots, \theta_n)$. Тогда для натуральных чисел $q_1, \ldots, q_n$ и $m < \delta^{-1}$ $(0 < \delta < \delta_0 < 1)$ при $\beta_s = r_s - 1$ имеем:

1) $$\omega_{q_s \alpha_s}(\delta, u)_{p,D} \leqslant$$

$$\leqslant c m^{-q_s} \sum_{\nu=1}^{m} \nu^{q_s - \beta_s - \frac{1}{p}} \omega^{*}_{k_s t_s}\left(\frac{1}{\nu}, f^{(r_s)}_{t_s}\right)_{p,n};$$

2) Если дополнительно предполагать, что для натурального λ_s сходится ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{\lambda_s - \beta_s - \frac{1}{p}} \omega^{*}_{k_s t_s}\left(\frac{1}{m}, f^{(r_s)}_{t_s}\right)_{p,n},$$

то

$$\omega_{q_s \alpha_s}(\delta, u^{(\lambda_s)}_{\alpha_s})_{p,D} \leqslant$$

$$\leqslant c\left\{m^{-q_s} \sum_{\nu=1}^{m} \nu^{q_s + \lambda_s - \beta_s - \frac{1}{p}} \omega^{*}_{k_s t_s}\left(\frac{1}{\nu}, f^{(r_s)}_{t_s}\right)_{p,n} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \nu^{\lambda_s - \beta_s - \frac{1}{p}} \omega^{*}_{k_s t_s}\left(\frac{1}{\nu}, f^{(r_s)}_{t_s}\right)_{p,n}\right\},$$

где c не зависит от m.

Отмечается, что полученные результаты являются обобщением соответствующих результатов С. М. Никольского (РЖМат, 1959, 2в9) и референта (РЖМат, 1959, 5в56). Я. С. Бугров

7391. Об одной теореме Г. Х. Харди и Дж. Е. Литлвуда (в подл. Литтлвуда). **Ильин В. П.**, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1959, 53, 128—144

Пусть для любого $h\left(0 < h < \frac{b-a}{2}\right)$ и для любого промежутка $[a', b']$ такого, что $[a', b' + h] \subset [a, b]$, выполняются соотношения:

$$\left[\int_a^{b'} |f(x)|^p dx\right]^{1/p} \leqslant A,$$

$$\left[\int_{a'}^{b'} |f(x+h) - f(x)|^p dx\right]^{1/p} \leqslant M h^{\alpha},$$

где постоянные A, M, $p \geqslant 1$, $0 < \alpha \leqslant 1$, a, b не зависят от h. Дается новое доказательство теоремы Харди и Литлвуда: 1) если $\alpha p > 1$, то $f(x)$ эквивалентна непрерывной в $[a, b]$ функции, принадлежащей классу $\mathrm{Lip}\left(\alpha - \frac{1}{p}\right)$, причем $|f(x)| < 2^{1/p}(A h^{-1/p} + c_1 M h^{\alpha - \frac{1}{p}})$, $|f(x+h) - f(x)| < c_2 M h^{\alpha - \frac{1}{p}}$; 2) если $\alpha p < 1$, то $f(x)$ принадлежит классу $\mathrm{Lip}\left(\alpha + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}; q\right)$, где q — произвольное число, удовлетворяющее неравенствам $p \leqslant q < \frac{p}{1 - \alpha p}$, причем

$$\left[\int_a^{b} |f(x)|^q dx\right]^{1/q} \leqslant 2^{1+\frac{1}{p}}\left(A h^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} + c_3 M h^{\alpha + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}}\right),$$

$$\left[\int_{a'}^{b'} |f(x+h) - f(x)|^q dx\right]^{1/q} \leqslant c_4 M h^{\alpha + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}}$$

(постоянные c_1, c_2, c_3, c_4 не зависят от функции и от h).

Доказательство автор основано на следующих интегральных представлениях функции

$$f(x) = \frac{1}{h}\int_0^h f(x \pm u)\, du - \int_0^h \frac{1}{v^2}\left[\int_0^v (f(x \pm v) - f(x \pm u)) du\right] dv.$$

Приведены следствия этой теоремы. О. В. Бесов

7392. К теоремам «вложения». Ильин В. П., Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1959, 53, 359—386

Выводятся некоторые оценки для функций, заданных в области D n-мерного пространства, аналогичные тем, которые дают теоремы вложения С. Л. Соболева. В отличие от условий теорем С. Л. Соболева, в которых задана одна и та же оценка для интегралов от p-х степеней производных по любой подобласти Ω области D, в реферируемой работе автор исходит из того, что эти оценки зависят от некоторой положительной степени диаметра или всей подобласти Ω, или ее сечений меньшего числа измерений. Отправным моментом в построениях является некоторое обобщение интегрального тождества С. Л. Соболева. О. В. Бесов

7393. Граничные функции классов $H^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n}$. Пилика П., Докл. АН СССР, 1959, 128, № 4, 677—679

Граничной функцией класса $H^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n}$. $(M_1, \ldots, M_n)$ (определение H-класса см. РЖМат, 1959, 240) называют всякую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, принадлежащую этому классу, но ни при каких константах M_l не принадлежащую к классу $H^{(r'_1, \ldots, r'_n)}_{p_1, \ldots, p_n}$, где

$$\sum_{k=1}^{n} (r'_k - r_k) > 0, \quad r'_k - r_k \geqslant 0.$$

Автор строит примеры граничных функций классов $H^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n}$ и доказывает, что теорема С. М. Никольского о вложении этих классов в случаях, которые до конца не рассмотрены С. М. Никольским, является точной, не допускающей улучшения.

Теоремы 1, 2. Функция

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{n} F_{\substack{r_1 \ldots r_n \\ a \\ r_j}}(x_j)}{\sum_{r_1 \ldots r_n} \left\{1 + \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{q_i}\right)\frac{1}{r_i}\right\}_{\nu}}, \qquad (1)$$

где сходимость ряда понимается в смысле $L^{(n)}_{p_i}$ и

$$F_N(x) = \left(\frac{\sin \frac{Nx}{2}}{x}\right), \quad 1 \leqslant p_l \leqslant \infty, \quad 1/p_l + 1/q_l = 1,$$

при условии

$$\varkappa_i = 1 - \sum_{l=1}^{n} \frac{\frac{1}{p_l} - \frac{1}{p_i}}{r_l} > 0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

принадлежит классу $H_{p_1,\dots,p_n}^{(r_1,\dots,r_n)}$ и является граничной в этом классе.

Теорема 3. Пусть $1 \leqslant p_l \leqslant p \leqslant \infty$, $\rho_l = \alpha r_l / \alpha_l > 0$. Тогда функция (1), принадлежащая к классу $H_{p_1,\dots,p_n}^{(r_1,\dots,r_n)}$ и являющаяся граничной в этом классе, а по теореме вложения принадлежащая к классу $H_p^{(\rho_1,\dots,\rho_m)}$, при $x_{m+1} = \dots = x_n = 0$ является граничной в классе $H_p^{(\rho_1,\dots,\rho_m)}$ при достаточно больших $a > 1$ (значение α см. РЖМат, 1959, 240).

Сформулированные теоремы обобщают соответствующие результаты Т. И. Аманова для класса $H_p^{(r_1,\dots,r_n)}$ (РЖМат, 1955, 3685).

Я. С. Бугров

7394. Обобщение сферического модуля непрерывности. Иноземцев О. И., Укр. матем. ж., 1959, 11, № 2, 155—162 (рез. нем.)

Пусть $\varphi(x_1,\dots,x_n) \geqslant 1$ — некоторая непрерывная по совокупности всех переменных функция, для которой

$$\int_0^\infty \frac{\ln \alpha(t)}{1+t^2}\,dt < \infty,$$

где

$$\alpha(t) = \sup_{\substack{-\infty<x_1,\dots,x_n<\infty \\ \xi_1^2+\dots+\xi_n^2<t^2}} \frac{\varphi(x_1+\xi_1,\dots,x_n+\xi_n)}{\varphi(x_1,\dots,x_n)} \quad (t \geqslant 0),$$

и $f(x_1,\dots,x_n)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\|f\| = \sup_{-\infty<x_1,\dots,x_n<\infty} \frac{|f(x_1,\dots,x_n)|}{\varphi(x_1,\dots,x_n)} < \infty.$$

Обобщенным сферическим модулем непрерывности функции f относительно веса φ автор называет функцию

$$\Omega_\varphi(\delta; f) = \sup_{\substack{-\infty<x_1,\dots,x_n<\infty \\ \rho<\delta}} D,$$

где

$$D = \frac{\left|\sum_{l=1}^k p_l \left\{\frac{1}{S}\int_S f(x_1+\alpha_l\rho\xi_1,\dots,x_n+\alpha_l\rho\xi_n)\,dS - f\right\}\right|}{\varphi(x_1,\dots x_n)\alpha(\rho)},$$

$f = f(x_1,\dots,x_n)$, S — поверхность единичной сферы $\xi_1^2+\dots+\xi_n^2 = 1$, dS — $(n-1)$-мерный элемент площади этой сферы, p_l — заданные вещественные числа такие, что $\sum_{l=1}^k p_l = 1$, а α_l — положительные числа, удовлетворяющие неравенствам $1 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k$. Характеристикой системы чисел $(p_1,\dots,p_k; \alpha_1,\dots,\alpha_k)$ называется наименьшее четное число $2m > 0$, для которого $\sum_{i=1}^k p_i \alpha_i^{2m} \neq 0$. Устанавливается, что если $\Omega_\varphi(\delta; f) \leqslant M\delta^\gamma$, где γ больше характеристики $2m$, то $f(x_1,\dots,x_n)$ есть полигармоническая функция, т. е. $\Delta^m f = 0$, представляющая значение при $z_1 = x_1, \dots, z_n = x_n$ целой функции, для которой

$$\lim_{|z_1|+\dots+|z_n|\to\infty} \frac{\ln|f(z_1,\dots,z_n)|}{\sqrt{|z_1|^2+\dots+|z_n|^2}} = 0.$$

А. Ф. Тиман

7395. Разрывные функции со свойством Дарбу. Гальперин (Discontinuous functions with the Darboux property. Halperin Israel), Canad. Math. Bull., 1959, 2, № 2, 111—118 (англ.)

Дается обзор ряда известных примеров функций со свойством Дарбу: 1) пример Дарбу функции, являющейся производной, разрывной в каждой рациональной точке и непрерывной в каждой иррациональной точке; 2) пример Вольтерра производной функции, разрывной на множество положительной меры (или даже почти всюду); 3) пример Лебега всюду разрывной функции (и, следовательно, не являющейся производной), которая принимает любое свое значение (например, между 0 и 1) на каждом интервале. С помощью базиса Гамеля автор строит пример функции со свойством Дарбу, которая принимает любое значение в несчетном множестве точек на любом интервале (или даже на любом совершенном множестве). Построенная функция не измерима ни на каком множестве положительной меры.

Г. Х. Синдаловский

7396. Безусловная суммируемость. Ульянов П. Л., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1959, 23, № 5, 781—808

Исследование структуры безусловно суммируемых функциональных рядов было начато Орличем (Orlicz W., Bull. Acad. polon., 1957, 117—125). В последние годы появился ряд работ, посвященных изучению этого вопроса; отметим здесь работу А. М. Олевского (РЖМат, 1960, 814). В реферируемой статье предложен новый, более простой метод доказательства известных теорем, позволяющий получить и более общие результаты. Параллельно исследуются случаи B-суммируемости и T^*-суммируемости, где $B = \|B_{nm}\|$ — линейный метод суммирования с помощью множителей, $\lim_{n\to\infty} B_{nm} = 1$, $\lim_{m\to\infty} B_{nm} = \gamma_n$, $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$; T^* — метод, удовлетворяющий первым двум условиям Тёплица:

$$\lim_{n\to\infty} a_{nm} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^\infty a_{nm} = 1.$$

Ряд

$$\sum_{n=0}^\infty \psi_n(x) \tag{1}$$

называется безусловно B (или T^*-)суммируемым в том или ином смысле (по мере, по внешней мере, почти всюду и т. п.), если при любой перестановке членов он B (T^*-)суммируем в этом смысле. Под $\{f_l\} + \{g_k\}$ подразумевается теоретико-множественная сумма последовательностей $\{f_l\}$ и $\{g_k\}$. Основной в работе является лемма 1:

Пусть последовательность $\{\psi_n(x)\} = \{f_l\} + \{\varphi_j\} + \{\tau_k\}$ определена на множестве E и $|f_n(x)| + |\varphi_n(x)| \leqslant F_n(x)$, а $F_n(x)$ измеримы и конечны почти всюду. Тогда если B-средние ряда (1) имеют смысл почти всюду на E при любых перестановках членов, то найдутся две перестановки ряда (1)

$$\sum_{n=0}^\infty \psi_n'(x) \text{ и } \sum_{n=0}^\infty \psi_n''(x), \tag{1'}$$

последовательность $\{n_k\}$ и последовательность множеств U_k такие, что $U_1 \supset U_2 \supset \dots \supset U_k \supset \dots E$, $m_e(E - U_k) < \frac{1}{2^k}$, $\sigma_{n_k}'(x) - \sigma_{n_k}''(x) = f_k(x) - \varphi_k(x) + \beta_k(x)$ для почти всех $x \in E$, где $|\beta_k(x)| < \frac{1}{2^{k-3}}$ $(x \in U_k)$, а σ_n' и σ_n'' — B-средние рядов (1').

Аналогичная лемма верна и для методов T^*. Далее с помощью этой леммы и других вспомогательных утвержде-

ний получается ряд теорем, из которых мы приведем наиболее общие теоремы 1 и 2:

Пусть $|\psi_n(x)| \leqslant F_n(x)$ на E, где $F_n(x)$ — измеримые почти всюду конечные функции, и ряд (1) безусловно B (или T^*-)суммируем на множестве E по внешней мере. Тогда $\psi_n(x) = f(x) + \gamma_{in}(x)$ $(x \in E)$, где $f(x)$ — конечная функция на E, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{in}(x)$ безусловно сходится на E по внешней мере. При этом если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ не суммируем данным методом B (T^*) то $f(x) \equiv 0$.

Дается приложение полученных результатов к исследованию безусловной суммируемости ортогональных рядов. В. Ф. Гапошкин

7397. Об одном достаточном условии компактности семейства непрерывных функций. Грушин В. В., Успехи матем. наук, 1959, 14, № 4, 165—168

Доказывается теорема: Пусть на отрезке $[a, b]$ заданно бесконечное семейство непрерывных функций $\{f\}$. Если все функции семейства $\{f\}$ равномерно ограничены, $|f(x)| < M$ и существует функция $F(t)$ на $[0, +\infty)$ такая, что $F(0) = 0$, $F(t) > 0$ при $t > 0$, $F(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, для которой равномерно ограничены интегралы $\int_{-M}^{M} F(\nu_f(y))\,dy \leqslant M$, где $\nu_f(y)$ (индикатриса Банаха есть число корней уравнения $f(x) = y$, то из семейства $\{f\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся всюду на $[a, b]$. В известном случае Хелли, когда равномерно ограничены все функции $f(x)$ и их полные изменения $\overset{b}{V}_a(f)$: $|f(x)| < M$, $\overset{b}{V}_a(f) < M$, в качестве $F(t)$ можно взять $F(t) \equiv t$, так как $\overset{b}{V}_a(f) = \int_{-M}^{M} \nu_f(y)\,dy$.

Примечание референта. В доказательстве теоремы автор использует тот факт, что построенная им последовательность f_m^{**} сходится в рациональных точках отрезка $[a, b]$. При построении последовательности f_m^{**} автор этого не учитывал; ясно, что это требование можно удовлетворить. Доказательство не вполне четкое. Г. Х. Синдаловский

7398 К. Теория функций действительного переменного. Учебн. пособие для пед. ин-тов. **Макаров И. П.,** М., Учпедгиз, 1958, 175 стр., илл., 3 р. 85 к.

Книга содержит шесть глав: Общая теория множеств; Множество действительных чисел; Теория точечных множеств; Функции; Непрерывные кривые; Мера и интеграл. Каждая глава сопровождается упражнениями различной степени трудности. П. И. Романовский

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

7399. О теоретико-множественных операциях. I. Сампэй (On set-theoretical operations. I. Sampei Yoemon), Comment. math. Univ. St. Pauli, 1959, 7, № 2, 117—132 (англ.)

Статья состоит из четырех параграфов: § 1. Теоретико-множественные операции. § 2. Положительные операции. § 3. Отображения, связанные с последовательностями множеств. § 4. Итерации операций. §§ 1, 2, 4 не содержат новых результатов; в них излагается теория операций примерно в объеме первых двух глав статьи референта (РЖМат, 1956, 3744).

В § 3 вводится функция $\varphi_{\{E_n\}}(a) = y$, ставящая в соответствие каждому $a \in R$ (где R — некоторое пространство) точку y канторова дисконтинуума C по следующему правилу: $y = \sum \alpha_n 3^{-n}$, где $\alpha_n = 2$, если $a \in E_n$; $\alpha_n = 0$, если $a \notin E_n$ ($\{E_n\}$ — заданная последовательность множеств в R). Доказывается, что $\Phi_N(E_n) = \varphi^{-1}_{\{E_n\}}(N)$, где N — база теоретико-множественной операции Φ_N. Далее доказываются теоремы: а) если все множества последовательности $\{E_n\}$ принадлежат проективному классу B_m, то график функции $\varphi_{\{E_n\}}(a)$ (в пространстве $R \times C$) также принадлежит этому классу; б) если R — полное сепарабельное пространство, то для всякой непрерывной функции $f(a)$, отображающей R в C, можно подобрать последовательность $\{E_n\}$ $(E_n = R)$ множеств класса B_0 такую, что $f(a) = \varphi_{\{E_n\}}(a)$. Ю. С. Очан

7400. К проблеме ветвления. Паровиченко И. И., Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 1959, 39, 189—194

В статье Эрдёша и Тарского (Erdös P., Tarski A., Ann. Math., 1943, 44, № 2, 315—329) было дано следующее определение: ветвящейся системой называется такое частично упорядоченное множество B, в котором всякое подмножество B_b, состоящее из всех элементов $b' \leqslant b$, является вполне упорядоченным. Порядок множества B_b называется порядком элемента b, а наименьшее порядковое число из тех, которые превосходят порядки всех элементов системы B, называется порядком ветвящейся системы B. Проблема ветвления, поставленная Эрдёшем и Тарским, заключается в следующем: верно ли предложение $\{\alpha_s\}$: всякая ветвящаяся система B порядка ω_s, у которой множество элементов порядка ν для любого $\nu < \omega_s$ имеет мощность $< \overline{\omega_s}$, содержит вполне упорядоченное подмножество типа ω_s.

Автор доказывает, что предложение $\{\alpha_s\}$ эквивалентно каждому из следующих предложений:

$\{\beta_s\}$: Всякое упорядоченное множество U мощности $\overline{\omega_s}$ содержит подмножество по крайней мере одного из двух типов ω_s и ω_s^*.

$\{\beta_s^0\}$: Всякий упорядоченный континуум C мощности $\overline{\omega_s}$ содержит по крайней мере одну точку, вес в которой равен $\overline{\omega_s}$.

$\{\gamma_s\}$: Топологическое произведение арифметического сегмента $[0,1]$ на T^s-пространство мощности $\overline{\omega_s}$ есть $\overline{\omega_s}$-бикомпактное пространство (определение T^s-пространства и $\overline{\omega_s}$-бикомпактного пространства см. в статье автора (РЖМат, 1959, 8930)). Далее показывается, что если предложение $\{\alpha_s\}$ справедливо, то из него вытекает следующее утверждение (являющееся аналогом теоремы Тихонова о бикомпактном расширении вполне регулярного пространства): Для любого вполне регулярного T^s-пространства E веса $\overline{\omega_s}$ существует $\overline{\omega_s}$-бикомпактное расширение того же веса. Ю. С. Очан

7401. Обобщенная континуум-гипотеза и ветвления. Курепа (General continuum hypothesis and ramifications. Kurepa G.), Fundam. math., 1959, 47, № 1, 29—33 (англ.)

Приводится новый эквивалент обобщенной континуум-гипотезы $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. Диадическим деревом будем на-

зывать систему диадических последовательностей $a^\xi = (a_0, a_1, \ldots, a_\xi, \ldots)_{\xi'<\xi}$, где $a_{\xi'} \in \{0, 1\}$, с переменной длиной ξ. Дерево упорядочивается отношением $<$, означающим „быть инициальным отрезком". Инициальным назовем такое дерево, в котором вместе с каждой имеющейся там последовательностью содержится и всякий ее инициальный сегмент. Длиной дерева называется верхняя грань длин всех его элементов-последовательностей. Тогда указанный эквивалент в наиболее интересном случае $\alpha = 0$ формулируется следующим образом: Если в инициальном диадическом дереве S длины ω_2 всякий элемент содержит не более чем счетное число единиц, то существует последовательность длины ω_2, содержащая не более счетного числа единиц и такая, что всякий ее инициальный сегмент принадлежит S. С точки зрения автора эта формулировка континуум-гипотезы в терминах дерева представляет особый интерес, так как согласно его теореме гипотеза Суслина допускает сходную формулировку (в терминах дерева).
И. И. Паровиченко

7402. К проблеме Суслина. Курепа Г., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, 4, М., АН СССР, 1959, 162—163

7403. О трансфинитной итерации. Банашевский (On transfinite iteration. Banaschewski B.), Fundam. math., 1959, 46 № 2, 225—229 (англ.)

Пусть D — класс множеств, замкнутый относительно операции объединения трансфинитных последовательностей его элементов, и пусть f — оператор над D такой, что $X \supseteq f(X)$ для любого $X \in D$. Тогда для произвольного порядкового числа α степень f^α оператора f определяется равенством

$$f^\alpha(X) = f(\bigcup_{\beta<\alpha} f^\beta(X)).$$

Если D — множество мощности d, то $f^\alpha = f^\delta$ для всех $\alpha \geqslant \delta$, где δ обозначает первое порядковое число, мощность которого больше, чем d. Менее очевидные критерии стабилизации степеней оператора f, начиная с некоторого порядкового числа, могут быть даны, основываясь уже на свойствах самого оператора f. Автор изучает три типа условий, обеспечивающих нетривиальные критерии стабилизации степеней операторов, и устанавливает их связь между собой и с условиями, приведенными в работе Г. Шварца (РЖМат, 1959, 1364). Рассматривается также вопрос о критерии стабилизации степеней суперпозиции двух операторов, удовлетворяющих этим условиям. Н. М. Нагорный

7404. О множествах, инвариантных по отношению к счетным изменениям. Мыцельский (About sets invariant with respect to denumerable changes. Mycielski Jan), Fundam. math., 1958, 45, № 3, 296—305 (англ.)

Основной геометрический результат статьи состоит в доказательстве следующей теоремы: Каждое из пространств E^n $(n \geqslant 3)$, S_n $(n \geqslant 2,\ n \neq 4)$, L^n $(n \geqslant 2, n \neq 4)$, H^n $(n \geqslant 2)$ содержит такое подмножество E, что для любых не более чем счетных подмножеств A, B соответствующего пространства имеем $E \simeq (E \setminus A) \cup B$. (Здесь E^n — n-мерное евклидово пространство, S_n — n-мерная сфера, L^n — n-мерное эллиптическое пространство и H^n — n-мерное гиперболическое пространство. $\simeq$ означает конгруэнтность множеств).

При доказательстве этой теоремы используется теорема о существовании свободной группы движений E^n без фиксированных точек ранга $2^{\aleph_0}$ и подобных же групп изометрий остальных перечисленных выше пространств. Доказательство получено посредством применения следующей алгебраической теоремы, которая доказывается автором в реферируемой статье:

Пусть S — множество, а G — свободная группа 1-1 преобразований S в себя с вполне упорядоченным множеством свободных образующих $\{\varphi_\xi\}_{\xi<\alpha}$. Пусть даны два непересекающихся множества $C_1, C_2 \subseteq S$ и три последовательности подмножеств S

$$\{F_\xi\}_{\xi<\alpha},\quad \{A_\xi\}_{\xi<\alpha},\quad \{B_\xi\}_{\xi<\alpha}.$$

Предполагается, что для каждого $\xi < \alpha$ φ_ξ свободна на $\left[\{\varphi_\tau\}_{\tau<\xi}\right]$ и $C_1 \cup C_2 \cup \bigcup_{\tau<\xi} F_\tau$ и φ_ξ свободна на $\left[\{\varphi_\tau\}_{\tau<\xi}\right]$ и $C_1 \cup C_2 \cup \bigcup_{\tau<\xi} (A_\tau \cup B_\tau)$. Тогда существуют такие множества $E_1, E_2 \subseteq S$, что для каждого $\xi < \alpha$

$$\varphi_\xi E_1 = E_1 - F_\xi,\quad \varphi_\xi E_2 = (E_2 \setminus A_\xi) \cup B_\xi$$

и, кроме того,

$$C_1 \subseteq E_i \subseteq S \setminus C_2 \quad \text{для } i = 1, 2,$$

$$\overline{\overline{E_1}} = \aleph_0^{\overline{\alpha}} + \overline{\overline{C_1}} + \sum_{\xi<\alpha} \overline{\overline{F_\xi}}.$$

В формулировке теоремы использованы следующие обозначения и определения. (p) означает множество, состоящее из единственной точки p. Для $H \subseteq G$ и $P \subseteq S$ $HP = \{h(p) : h \in H,\ p \in P\}$. $[H]$ означает подгруппу G, порожденную H. По определению, H свободно на P, если каждый элемент HP однозначно выражается в форме $h(p)$, где $h \in H$, $p \in P$. Элемент $x \in G$ называется свободным на H, если для любых $a_0, a_n \in [H]$ и $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in [H] \setminus (1)$ и всех целых $k_1, \ldots, k_n$, отличных от 0, равенство $a_0 x^{k_1} a_1 \ldots a_{n-1} x^{k_n} a_n = 1$ возможно только при $n = 0$. Элемент $x \in G$ называется свободным на H и P, если x свободен на H и $[(x)^{-1} H] \setminus [H]$ свободно на p.
Р. Ю. Мацкина

7405. О свободных группах движений и разложениях евклидова пространства. Мыцельский Сверчковский (On free groups of motions and decompositions of the Euclidean space. Mycielski Jan, Swierczkowski S.), Fundam. math., 1958, 45, № 3, 283—291 (англ.)

Основное содержание статьи состоит в доказательстве следующих двух теорем:

1. Существует свободная группа движений E^3 без фиксированных точек ранга $2^{\aleph_0}$ (E^3 — трехмерное евклидово пространство).

2. Если $\overline{\overline{M}} \leqslant 2^{\aleph_0}$ и $\overline{\overline{N}} \leqslant 2^{\aleph_0}$, то пространство E^3 может быть разложено на N непересекающихся множеств A_ν $(\nu \in N)$, удовлетворяющих системе конгруэнтностей

$$\bigcup_{\nu \in P_\mu} A_\nu \simeq \bigcup_{\nu \in Q_\mu} A_\nu \quad (\mu \in M).$$

При этом все множества A_ν могут быть непустыми. (Здесь M и N — непустые множества, $\{P_\mu\}_{\mu \in M}$ и $\{Q_\mu\}_{\mu \in M}$ — произвольные системы собственных подмножеств N, причем $\mu_1 \neq \mu_2$ не обязательно влечет $P_{\mu_1} \neq P_{\mu_2}$ или $Q_{\mu_1} \neq Q_{\mu_2}$).

Доказательства теорем проведены эффективно без использования аксиомы выбора. Теорема 2 может быть получена как следствие теоремы 1, однако авторы приводят прямое доказательство, так как считают его более простым. Приведены три следствия теоремы 2. Теоремы 1 и 2 легко обобщаются на пространства E^n $(n > 3)$. Для прямой и плоскости теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2, не имеют места. Авторы приводят ряд известных результатов, связанных с доказываемыми теоремами.
Р. Ю. Мацкина

7406. О теореме эквивалентности теории множеств. Cac (A halmazelmélet ekvivalencia-tételéről. Szász Pál), Mat. lapok, 1959, **10**, № 1-2, 49—52 (венг.; рез. русск., нем.)

Приводится известное доказательство теоремы Кантора—Бернштейна. Автор отмечает наглядность предложенной им формы изложения. С. И. Адян

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

7407. О равномерной сходимости тригонометрических рядов. I. Яно (Notes on uniform convergence of trigonometrical series. I. Yano Kenji), Proc. Japan Acad., 1959, **35**, № 5, 197—200 (англ.)

Для любой последовательности $\{s_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots; s_0 = 0)$ положим

$$s_n^r = \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{r-1} s_\nu \quad (-\infty < r < \infty),$$

где $A_n^r = \binom{r+n}{n}$. Доказывается, что если $r>0$, $0<s<1$ (или $s = 1, 2, \ldots$), $0 < \alpha \leqslant 1$ и

$$\sum_{\nu=1}^{n} |s_\nu^r| = o(n^{1+r\alpha}),$$

$$\sum_{\nu=n}^{2n} \left(|s_\nu^{-s}| - s_\nu^{-s}\right) = O(n^{1-s\alpha}) \quad (n \to \infty),$$

то: 1) при $0 < \alpha < 1$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n} \cos nt \qquad (1)$$

сходится равномерно, и 2) при $\alpha = 1$ ряд (1) сходится равномерно тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} s_n$. Следствием этого результата является теорема Идзуми (РЖМат, 1958, 6604), которая дает необходимое и достаточное условие сходимости в смысле Коши интеграла

$$\int_{+0}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin nt\, dt.$$

В случае $r = 0$ устанавливается, что если

$$\sum_{\nu=n}^{2n} |s_\nu| = o(n/\ln n) \quad (n \to \infty)$$

и для некоторых s и δ

$$\sum_{\nu=n}^{2n} \left(|s_\nu^{-s}| - s_\nu^{-s}\right) = O(n^{1-\delta}),$$

то для равномерной сходимости ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} s_n$.

А. В. Ефимов

7408. О явлении Гиббса при суммировании методом Римана обобщенных рядов Фурье. Ли Цзин-си (Lee Ching-hsi), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1959, **9**, № 1, 28—36 (кит.; рез. англ.)

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ суммируется методом (R, k) к числу s, если

$$s_h = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^k$$

сходится при всех достаточно малых h $(h \neq 0)$ и $\lim\limits_{h \to 0} s_h = s$. Устанавливается, что при суммировании рядов Фурье, обобщенных как в смысле главного значения по Коши, так и в смысле контурного интегрирования (РЖМат, 1953, 658), методом (R, k) имеет место явление Гиббса. Автором ранее было показано (РЖМат, 1957, 8550), что при суммировании обыкновенных рядов Фурье методом $(R, 1)$ явление Гиббса не наблюдается.

Ф. И. Харшиладзе

7409. Один аспект локального свойства суммируемости $|R, \log n, 1|$ ряда Фурье. Бхатт (An aspect of local property of $|R, \log n, 1|$ summability of Fourier series. Bhatt Shri Nivas), Tôhoku Math. J., 1959, **11**, № 1, 13—19 (англ.)

Пусть $f(t) \in L(-\pi, \pi)$, имеет период 2π и

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t). \qquad (1)$$

Доказывается, что суммируемость $|R, \log n, 1|$ ряда (1) при $t = x$ будет зависеть только от поведения $f(t)$ в окрестности точки $t = x$, если

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|A_n(x)|}{n \log n} < \infty. \qquad (2)$$

Между прочим, условие (2) является необходимым для суммируемости $|R, \log n, 1|$ ряда (1) в точке $t = x$. Ранее Моханти и Идзуми дали значительно более стеснительное условие зависимости суммируемости $|R, \log n, 1|$ ряда (1) в точке от локальных свойств функции $f(t)$.

А. А. Шнейдер

7410. О наилучшем тригонометрическом приближении в метрике L некоторых функций. Дзядык В. К., Докл. АН СССР, 1959, **129**, № 1, 19—22

Приводятся без доказательства результаты, относящиеся к построению тригонометрических полиномов наилучшего приближения в метрике L для функций

$$\varphi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j, \quad t \in [0, 2\pi], \quad a_j \geqslant 0,$$

и

$$\varphi_1(t) = \int_{2n}^{\infty} t^s d\sigma(s),$$

где $\sigma(s)$ — неубывающая в промежутке $(2n, \infty)$ функция.

Утверждается, что

$$E_n(\varphi)_L = \inf_{T_n} \int_0^{2\pi} |\varphi(t) - T_n(t)|\, dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{j+1} \left(\frac{\pi}{n+1}\right)^{j+1} \left[(2n+2)^{j+1} - 2 \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} k^{j+1}\right]$$

и

$$E_n(\varphi_1)_L = \int_{2n}^{\infty} \left(\frac{\pi}{n+1}\right)^{s+1} \left[(2n-2)^{s+1} - 2 \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} k^{s+1}\right] \frac{d\sigma(s)}{s+1}.$$

Приводятся результаты о числе корней некоторых трансцендентных уравнений и при некоторых ограничениях на непрерывную суммируемую на $(0, 2\pi)$ функцию $\varphi(t)$ даются полином наилучшего приближения в метрике L для этой функции и интегральное представление для $E_n(\varphi)_L$. Вводится понятие s-го периодического интеграла $\varphi_s(t)$ от суммируемой функции $\varphi(t)$. Для функции $\varphi_s(t)$ устанавливается полином наилучшего приближения в метрике L и дается интегральное представление величины $E_n(\varphi_s)_L$. Аналогичные результаты даются и в том случае, когда функция $\varphi(t)$ непрерывна вместе

с ее производными до $2n$-го или $(2n+1)$-го порядка включительно и эти производные удовлетворяют некоторым дополнительным условиям. А. В. Ефимов

7411. О приближении непрерывных функций суммами Фурье. Ефимов А. В., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 2, 225—227

7412. О равномерном приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица тригонометрическими полиномами. Сюй (The uniform approximation to the Lipschitz class of functions by a kind of trigonometrical polynomials. Hsu L. C.), Math. Student, 1958, **26**, № 4, 155—160 (англ.)

Рассматривается приближение периодических функций, удовлетворяющих условию Липшица порядка α, т. е. функций класса H^α, сингулярными операторами, являющимися обобщением сингулярного интеграла Валле-Пуссена. Доказывается, что если

$$V_n^\mu(f;x)=\frac{1}{K_n}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\cos\frac{t-x}{2}\cos\mu\frac{t-x}{2}\right\}^n f(t)\,dt,$$

где

$$K_n=4\int_0^{\pi/2}(\cos\theta\cdot\cos\mu\theta)^n d\theta,$$

то при $n\to\infty$

$$E_n^\mu(\alpha)=\sup_{f\in H^\alpha}\|f(x)-V_n^\mu(f;x)\|_{C_{2\pi}}=$$

$$=\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\left(\frac{8}{1+\mu^2}\right)^{\alpha/2}\frac{1}{\sqrt{\pi n^\alpha}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n^\alpha}}\right).$$

При $\mu=1$ этот результат получен И. П. Натансоном (Докл. АН СССР, 1946, **54**, № 1, 11—14).

А. В. Ефимов

7413. Распространение одной асимптотической формулы А. Ф. Тимана на классы функций с заданным модулем непрерывности. Ганзбург И. М., Докл. АН СССР, 1959, **128**, № 3, 447—449

С помощью треугольной матрицы $\lambda=\{\lambda_k^{(n)}\}$ $(k=0,1,\ldots,n+1;\ \lambda_0^{(n)}=1,\ \lambda_{n+1}^{(n)}=0)$ для некоторого класса $\mathfrak{M}$ непрерывных функций периода 2π изучается поведение верхних граней

$$E_n(\mathfrak{M},\lambda)=\sup_{f\in\mathfrak{M}}\|f(x)-u_n(f,x,\lambda)\|_{C_{2\pi}},$$

$$\widetilde{E}_n(\mathfrak{M},x,\lambda)=\sup_{f\in\mathfrak{M}}|f(x)-\widetilde{u}_n(f,x,\lambda)|,$$

где

$$u_n(f,x,\lambda)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

и $\widetilde{u}_n(f,x,\lambda)$ — интерполяционный полином порядка n, совпадающий с $f(x)$ в узлах $x_k^{(n)}=\frac{2k\pi}{2n+1}$ $(k=0,1,\ldots,2n)$, т. е.

$$\widetilde{u}_n(f,x,\lambda)=\frac{a_0^{(n)}}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}(a_k^{(n)}\cos kx+b_k^{(n)}\sin kx).$$

Показывается, что если H^α — класс функций, удовлетворяющих условию Липшица порядка α $(0<\alpha<1)$, $\Delta^2\lambda_k^{(n)}<0$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$ и $\Delta\lambda_0^{(n)}\|O(n^{-1})$, то

$$\widetilde{E}_n(H^\alpha,x,\lambda)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha+1}\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|}{\int_0^{\pi/2}t^\alpha\sin t\,dt}\times$$

$$\times E_n(H^\alpha,\lambda)+O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Далее, если H_ω — класс функций $f(x)$, модуль непрерывности которых $\omega(\delta)$ есть выпуклая функция, и система чисел $\eta_0^{(n)}=0$, $\eta_k^{(n)}=\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k}$ $(k=1,2,\ldots,n+1)$ не убывает и вогнута относительно k $(\Delta^2\eta_k^{(n)}\geqslant 0)$, то

$$\widetilde{E}_n(H_\omega,x,\lambda)=\frac{\pi}{2}\frac{\omega\left(\frac{2\pi}{n+1}\right)\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|}{\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{4t}{2n+1}\right)\sin t\,dt}\times$$

$$\times E_n(H_\omega,\lambda)+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

$$E_n(H_\omega,\lambda)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{4t}{2n+1}\right)\sin t\,dt\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_k^{(n)}}{n-k+1}+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

При тех же ограничениях на последовательность $\{\eta_k^{(n)}\}$, но для произвольных $\omega(\delta)$ имеет место равенство

$$\widetilde{E}_n(H_\omega,x,\lambda)=\frac{1}{\pi}\omega\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_k^{(n)}}{n-k+1}+O\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Указанные результаты являются обобщением результатов С. М. Никольского (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1940, **4**, 509; Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1945, **15**; Докл. АН СССР, 1946, **52**, № 3) и А. Ф. Тимана (РЖМат, 1953, 656).

Примечание референта. В формуле (10) имеется опечатка: вместо $+\frac{1}{\pi}$ должно быть $=\frac{1}{\pi}$.

Автор пишет (стр. 448 — 449), что экстремальная функция соответствующей задачи не зависит от матрицы λ. Однако этот факт имеет место для выпуклых последовательностей $\{\lambda_k^{(n)}\}$ $(\Delta^2\lambda_k^{(n)}<0)$ или для вогнутых последовательностей $\left\{\eta_k^{(n)}=\frac{1-\lambda_k^{(n)}}{k}\right\}$. Для произвольных матриц λ это утверждение неверно, так как для сумм Фурье и для сумм Фейера экстремальные функции различны. А. В. Ефимов

7414. Об абелевой суммируемости кратных рядов Фурье при помощи сферических средних. Такеда (On the Abel summability of multiple Fourier series by spherical means. Takeda Kazuaki), Tôhoku Math. J., 1958, **10**, № 3, 253—261 (англ.)

Пусть $x=(x_1,\ldots,x_k)$ — точка k-мерного евклидова пространства, $f(x)=f(x_1,\ldots,x_k)$ — функция из класса L Лебега, имеющая период 2π по каждой из переменных, и

$$f(x) \sim \sum a_{n_1 \dots n_k} e^{i(n_1 x_1 + \dots + n_k x_k)} \qquad (1)$$

— ее ряд Фурье.

Введем обозначения:

(а) $$S_R(x) = \sum_{\nu < R} a_{n_1 \dots n_k} e^{i(n_1 x_1 + \dots + n_k x_k)}$$

— сферическая сумма ряда (1), где $n_1^2 + \dots + n_k^2 = \nu$;

б) $$f_x(t) = \frac{\Gamma(k/2)}{2(\pi)^{k/2}} \int_\sigma f(x_1 + t\xi_1, \dots, x_k + t\xi_k)\, d\sigma_\xi$$

— сферическое среднее функции $f(x)$ в точке x, где σ — единичная сфера.

Автор рассматривает обобщенное абелево среднее ряда (1) в виде

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \frac{(t/\varepsilon)^{k-1}}{[(t/\varepsilon)^{2(1+m)}+1]^{(k+1)/2}} f_x(t)\, dt, \qquad (2)$$

или, что то же, в виде

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \frac{(t/\varepsilon)^{k-1}}{[(t/\varepsilon)^{2(1+m)}+1]^{(k+1)/2}} f_x(t)\, dt + o(1) \quad (\varepsilon \to 0), \qquad (3)$$

и обобщенное абелево среднее функции $f_x(t)$ в виде

$$\varepsilon \int_0^1 \left(\frac{\varepsilon}{t}\right)^\alpha e^{-\left(\frac{\varepsilon}{t}\right)^{1+n}} \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^{k-1} f_x(t) \frac{dt}{t^2}, \qquad (4)$$

где $n > -1$. Подобные средние для функции одной переменной рассматривал Левинсон (Levinson N., Duke Math. J., 1936, 2, 138—146). Основное содержание работы заключается в установлении связи между (3) и (4).

Пусть $P(m)$ обозначает тот факт, что предел первого слагаемого формулы (3) при $\varepsilon \to 0$ равен 0, причем $m > -1/(k+1)$, и $E(n, \alpha)$ означает, что предел выражения (4) при $\varepsilon \to 0$ равен 0, причем $n > -1$, $\alpha \geqslant k-1$.

Доказывается теорема:

Теорема 1. $E(n, \alpha)$ для $n > m$ влечет $P(m)$; в то время как $P(m)$ для $n < m$ влечет $E(n, \alpha)$.

Далее, если обозначить через $|P(m)|$ тот факт, что выражение (2) при $m \geqslant 0$ есть функция с ограниченным изменением на $(0, \infty)$, и через $|E(n, \alpha)|$ тот факт, что

$$\varepsilon \int_0^1 \left(\frac{\varepsilon}{t}\right)^\alpha e^{-\left(\frac{\varepsilon}{t}\right)^{1+n}} \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^{k-1} f_x(t)\, \frac{dt}{t^2}, \quad n > -1, \quad \alpha \geqslant k-1$$

есть функция с ограниченным изменением в $(0, \infty)$, то имеет место теорема:

Теорема 2. $|E(n, \alpha)|$ для $n > m$ и $\alpha \geqslant k-1$ влечет $|P(m)|$; в то время как $|P(m)|$ влечет $|E(n, \alpha)|$ для $n < m$ и $\alpha \geqslant k-1$.

Я. С. Бугров

7415. О суммировании кратных рядов Фурье. Канно (On the summation of multiple Fourier series. Kanno Kôsi), Tôhoku Math. J., 1959, 11, № 1, 25—42 (англ.)

Пусть $f(x_1, \dots, x_k) = f(x)$ — вещественная интегрируемая функция в $0 \leqslant x_i \leqslant 2\pi$, $i = 1, \dots, k$ с периодом 2π. Определим „сферические средние" $f(x, t)$ функции $f(x)$ в точке $x = (x_1, \dots, x_k)$ для $t > 0$ равенством

$$f(x, t) = \frac{\Gamma(k/2)}{2(\pi)^{k/2}} \int_\sigma f(x_1 + t\xi_1, \dots, x_k + t\xi_k)\, d\sigma_\xi,$$

где σ — единичная сфера. Если $p > 0$, то

$$f_p(x, t) = \frac{2}{B(p, k/2)\, t^{2p+k-2}} \int_0^t (t^2 - s^2)^{p-1} s^{k-1} f(x, s)\, ds$$

называется сферическим средним порядка p функции $f(x)$. Для фиксированной точки x будем писать $f_p(x, t) = f_p(t)$ $(p \geqslant 0)$, причем $f_0(x, t) = f(x, t)$. Пусть

$$f(x) \sim \sum a_{n_1 \dots n_k} e^{i(n_1 x_1 + \dots + n_k x_k)} \qquad (1)$$

— ряд Фурье функции $f(x)$ и

$$S_R^\delta(x) = \sum_{n < R^2} \left(1 - \frac{n}{R^2}\right)^\delta a_{n_1 \dots n_k} e^{i(n_1 x_1 + \dots + n_k x_k)},$$

где $\delta \geqslant 0$, $n = n_1^2 + \dots + n_k^2$, — среднее Рисса порядка δ ряда (1). Для фиксированной точки x будем писать $S_R^\delta(x) = S_R^\delta$. Устанавливается связь между средними Рисса $S^\delta(R)$ и сферическими средними $f_p(t)$, а именно доказаны четыре теоремы, которые уточняют результаты Чандрасекхарана (Chandrasekharan K., Ann. Math., 1951, 54, 193—213). Приведем две теоремы:

Теорема 1. Если $p > 0$, $\alpha > 0$, то соотношение $f_p(t) = o(t^\alpha)$ при $t \to 0$ влечет равенство $S^\delta(R) = o(1)$, когда $R \to \infty$, где $\delta = \frac{p(1+2\tau)}{1+2\tau+\alpha} + \tau$ и $\tau = \frac{k-1}{2}$.

Теорема 4. Если $\mu > 0$, $\delta > 0$, $\alpha > 0$, то

$$a_{n_1 \dots n_k} = O\{(n_1^2 + \dots + n_k^2)^{-\mu/2}\}$$

и $S^\delta(R) = o(R^{-\alpha})$, когда $R \to \infty$, влекут соотношение $f_p(t) = o(1)$, когда $t \to 0$, для

$$p = \frac{(\delta+1)(1+2\tau-\mu)}{1+2\tau+\alpha-\mu} - \tau,$$

где $\delta > 2\tau + \alpha - \mu > -1$ и $\tau = \frac{k-1}{2}$.

Имеются опечатки.

Я. С. Бугров

7416. Обратные теоремы о наилучших приближениях на замкнутых множествах. Гончар А. А., Докл. АН СССР, 1959, 128, № 1, 25—28

Изучается вопрос о наилучшем приближении непрерывных функций на замкнутом множестве посредством рациональных функций и многочленов. Измеримая функция $f(x)$, определенная и конечная почти всюду на замкнутом множестве F, принадлежит, по определению, классу $L(\alpha; F \setminus 0)$, если для произвольно малого $\varepsilon > 0$ существует совершенное множество $P_\varepsilon \subset F$, $\operatorname{mes}(F \setminus P_\varepsilon) < \varepsilon$, такое, что $f(x)$ удовлетворяет на множестве P_ε условию Липшица порядка α $(0 < \alpha \leqslant 1)$.

Пусть $R_n(f; F)$ есть наилучшее приближение непрерывной функции $f(x)$ на множестве F рациональными функциями порядка не выше n (т. е. функциями, числитель и знаменатель которых являются многочленами степени не выше n). Через $E_n(f; F)$ обозначается наилучшее приближение $f(x)$ на F многочленами степени не выше n. Вводится также величина $R_n^\varepsilon(f; F) = \inf_{\{P_\varepsilon\}} R_n(f; P_\varepsilon)$, где $P_\varepsilon \subset F$ — совершенное множество, $\operatorname{mes}(F \setminus P_\varepsilon) < \varepsilon$, и аналогичная ей величина $E_n^\varepsilon(f; F)$. Формулируются теоремы:

Теорема 1′. Если $R_n(f;F)\leqslant\frac{C}{n^{k+\alpha+\delta}}$, где $k\geqslant 0$ целое, $0\leqslant\alpha<1$, $\delta>0$ произвольно мало, то функция $f(x)$ почти всюду на F имеет конечную k-ю асимптотическую производную $f_F^{[k]}(x)\in L(\alpha;F\setminus 0)$.

Теорема 3′. Если функция $f(x)$ почти всюду на F имеет конечную k-ю асимптотическую производную $f_F^{[k]}(x)\in L(\alpha;F\setminus 0)$, $0\leqslant\alpha<1$, то $E_n^{\varepsilon}(f;F)=O\left(\frac{1}{n^{k+\alpha}}\right)$ при любом $\varepsilon>0$.

Теорема 4′. Если при любом $\varepsilon>0$ $R_n^{\varepsilon}(f;F)=O\left(\frac{1}{n^{k+\alpha+\delta}}\right)$, где $k\geqslant 0$ — целое, $0\leqslant\alpha<1$, $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ произвольно мало, то функция $f(x)$ почти всюду на F имеет конечную k-ю асимптотическую производную $f_F^{[k]}(x)\in L(\alpha;F\setminus 0)$.

Измеримая функция $f(x)$, определенная и конечная почти всюду на F, принадлежит, по определению, классу $R(F)$, если при любом $\varepsilon>0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{R_n^{\varepsilon}(f;F)}=0$.

Формулируются две теоремы, устанавливающие аналогию между рядом свойств функций класса $R(F)$ и класса аналитических функций.

Теорема 5. Пусть $f(x)$ принадлежит классу $R(F)$. Тогда почти всюду на F существует конечная асимптотическая производная $f_F^{[1]}(x)$, также принадлежащая классу $R(F)$.

Теорема 6. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат классу $R(F)$ и $f(x)=g(x)$ на множестве положительной меры $\Delta\subset F$. Тогда $f(x)=g(x)$ почти всюду на F.

А. Л. Гаркави

7417. О наилучших приближениях измеримых функций. Гончар А. А., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 5, 148—149

7418. Приближение целыми функциями на внешности отрезка и полуоси. Брудный Ю. А., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1959, 23, № 4, 595—612

Рассматривается приближение целыми функциями степени $\leqslant\sigma$ функций $f(x)$, имеющих на множестве $E=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ r равномерно непрерывных и ограниченных производных, причем модуль непрерывности r-й производной $\omega(f^{(r)};t)\equiv\omega(t)$. Показывается (теорема 1), что, каково бы ни было $\sigma>0$, существует целая функция $G_\sigma(f;x)$ степени не выше σ такая, что для всех $x\in E$

$$|f(x)-G_\sigma(f;x)|\leqslant C_r\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|}+\frac{1}{\sigma^2}\right)^r\times\omega\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|}+\frac{1}{\sigma^2}\right),$$

где C_r не зависит от x и σ. Дается оценка модуля производной $|f_\sigma'(x)|$ целой функции степени не выше σ через мажоранту самой функции $f_\sigma(x)$ на множестве E.

Доказываются обратные теоремы, устанавливающие дифференциальные свойства функции $f(x)$ в зависимости от скорости приближения целыми функциями степени не выше σ, т. е. если

$$|f(x)-G_\sigma(f;x)|\leqslant\omega\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|}+\frac{1}{\sigma^2}\right)$$

для любого $x\in E$,

то

$$\omega(f;h)\leqslant Ch\int_h^2\frac{\omega(u)}{u^2}\,du,\quad 0<h\leqslant\frac{1}{2}.$$

Показывается также (теорема 6), что при $r\geqslant 1$ и $\int_0^1\frac{\omega(u)}{u}\,du<\infty$ из условия

$$|f(x)-G_\sigma(f;x)|\leqslant\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|}+\frac{1}{\sigma^2}\right)^r\times\omega\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sigma|x|}+\frac{1}{\sigma^2}\right),\quad x\in E,$$

вытекает, что $f(x)$ имеет на E r равномерно непрерывных и ограниченных производных и

$$\omega(f^{(r)};h)\leqslant C\left\{h\int_h^2\frac{\omega(u)}{u^2}\,du+\int_0^h\frac{\omega(u)}{u}\,du\right\}.$$

Приводятся также аналогичные результаты в случае, когда $E=[0,\infty)$. Работа примыкает к результатам В. К. Дзядыка (РЖМат, 1957, 6969) и А. Ф. Тимана (РЖМат, 1960, 255), которые доказали прямые и обратные теоремы в случае, когда $E=[a,b]$ — конечный отрезок вещественной оси.

А. В. Ефимов

7419. О взвешенно-наилучшем равномерном приближении функций посредством многочленов. Джафаров (Функсијаларын чохһәдлиләр васитәсилә ән јахшы чәкили мунтәзәм јахынлашмасы һаггында. Ҹәфәров Ә. С.), Мә'рузәләр. АзәрбССР Елмләр Акад., Докл. АН АзербССР, 1959, **15**, № 6, 459—462 (азерб.; рез. русск.)

Рассматривается множество $C_\varphi^{(n)}$ непрерывных в n-мерном евклидовом пространстве функций f с нормой

$$\|f\|_\varphi^{(n)}=\sup_{x_1,\ldots,x_n}\left|\frac{f(x_1,\ldots,x_n)}{\prod_{j=1}^{s}\prod_{i=\nu(j)+1}^{\nu(j+1)}\varphi_j(x_i)}\right|<\infty,$$

где $\varphi_j(x)\geqslant 1$ $(-\infty<x<\infty)$ — фиксированные непрерывные функции, удовлетворяющие условию

$$\int_0^\infty\frac{\ln\alpha_j(t)}{1+t^2}\,dt<\infty,$$

причем

$$\alpha_j(t)=\sup_{\substack{-\infty<x<\infty,\\ |\xi|<t}}\frac{\varphi_j(x+\xi)}{\varphi_j(x)}.$$

Наилучшим приближением функции $f\in C_\varphi^{(n)}$ многочленами $Q_{N_1\ldots N_s}$ степени $\leqslant N_j$ по каждой совокупности переменных $x_{\nu(j)+1},\ldots,x_{\nu(j+1)}$ $(\nu(j)<\nu(j+1)$, $\nu(1)=0$, $\nu(s+1)=n)$ называется число

$$E_{N_1\ldots N_s}^{(n)}(f;p_1,\ldots,p_s)=\inf_{Q_{N_1\ldots N_s}}\sup_{x_1,\ldots,x_n}\left[e^{-\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=\nu(j)+1}^{\nu(j+1)}p_j(x_i)}\times|f(x_1,\ldots,x_n)-Q_{N_1\ldots N_s}(x_1,\ldots,x_n)|\right],$$

где $p_j(x)$ — непрерывные на всей оси, четные функции, причем $p_j(x)/x$ при $x\geqslant x_j^{(0)}$ монотонно стремится к

$+\infty$. Через $x_j = q_j(y_j)$ обозначаются функции, обратные к $y_j = p_j(x_j)$. Под $\partial f/\partial l_j$ понимается для каждой точки $(x_1, \ldots, x_{\nu(j)+1}, \ldots, x_{\nu(j+1)}, \ldots, x_n)$ производная по направлению l_j, выбираемому в пространстве точек $(x_{\nu(j)+1}, \ldots, x_{\nu(j+1)})$ и не зависящему от $x_1, \ldots, x_n$. Формулируется

Теорема. Пусть для произвольного направления l_j производные $\partial^{r_j} f/\partial l_j^{r_j}$ $(r_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, s)$ принадлежат $C_\varphi^{(n)}$ и

$$\omega_{nj}^{(k)}(\delta)_\varphi = \sup_{|h| \leqslant \delta} \left\| \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial^{r_j}}{\partial l_j^{k_j}} f(x_1, \ldots, x_{\nu(j)}, x_{\nu(j)+1} + ih, \ldots, x_{\nu(j+1)} + ih, x_{\nu(j+1)+1}, \ldots, x_n) \right\|_\varphi^{(n)}.$$

Тогда для $N_1, \ldots, N_s \geqslant 1$ выполняется неравенство

$$E_{N_1 \ldots N_s}^{(n)}(f; p_1, \ldots, p_s) \leqslant \Omega \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{q_j(N_j)}{N_j}\right)^{r_j} \times$$

$$\times \sup_{l_j} \omega_{nj}^{(k_j)}\left(\frac{q_j(N_j)}{N_j}\right)_\varphi,$$

где Ω зависит от $r_1, \ldots, r_s$.

В частности, если $k_j = 1$, $\varphi_j(x) \equiv 1$, $\nu(j) = j - 1$ $(j = 1, \ldots, n)$, получается теорема 4 работы М. М. Джрбашяна и А. Б. Тавадяна (РЖМат, 1 5), 266). Имеются опечатки. О. И. Иноземцев

7420. О линейных методах приближения. Фрёйд (Sui procedimenti lineari d'approssimazione. Freud Géza), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1959, 26, № 5, 641—643 (итал.)

Пусть $\mathfrak{C}$ — пространство непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций $g(x)$, удовлетворяющих дополнительным условиям

$$a_i g(0) + b_i g(1) = 0, \quad i = 1, 2,$$

и $\mathfrak{C}_2$ — пространство функций $g \in \mathfrak{C}$, имеющих вторую непрерывную производную $g''(x)$. Рассматривается линейный оператор H, отображающий $\mathfrak{C}$ в банахово пространство B и удовлетворяющий условиям

$$\|Hg\|_B \leqslant \alpha \|g\|_{\mathfrak{C}} \quad \text{для} \quad g \in \mathfrak{C}, \tag{1}$$

$$\|Hg\|_B \leqslant \beta \|g''\|_{\mathfrak{C}} \quad \text{для} \quad g \in \mathfrak{C}_2. \tag{2}$$

Доказывается, что в этом случае для любого целого $\nu \geqslant 1$ выполняется неравенство

$$\|Hg\|_B \leqslant (\alpha + 4\beta\nu^2)\, \omega_2(g, \nu^{-1}), \tag{3}$$

где

$$\omega_2(g, \delta) = \max_{\substack{|h| \leqslant \delta, \\ 0 \leqslant x+h \leqslant 1}} \|g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)\|_{\mathfrak{C}}.$$

При выполнении условий (1) и (2) неравенство (3) остается справедливым и для периодических функций. Для случая, когда оператор H_n отображает пространство C в пространство тригонометрических полиномов порядка не выше n, этот результат получен Зигмундом Zygmund A., Duke Math. J., 1945, 12, 47—76).

А. В. Ефимов

7421. Некоторые неравенства для целых функций конечной степени многих переменных. Ибрагимов И. И., Докл. АН СССР, 1959, 128, № 6, 1114—1117

Обобщены на n-мерный случай результаты, полученные ранее автором (РЖМат, 1960, 1558). О. В. Бесов

7422 К. Линейные операторы и теория приближений. Коровкин П. П., М., Физматгиз, 1959, 211 стр., 7 р. 30 к.

Книга написана как учебник по конструктивной теории функций и состоит из 7 глав. В гл. I (Линейные положительные функционалы и операторы) основное внимание уделено факту, подмеченному автором в 1953 г., что равномерная сходимость последовательности линейных положительных операторов к трем функциям, составляющим систему Чебышева на некотором отрезке, обеспечивает равномерную сходимость к любой функции, непрерывной на этом отрезке. Так как известные операторы Вейерштрасса, Ланлау и С. Н. Бернштейна являются положительными, автор получает возможность свести доказательство аппроксимационных теорем Вейерштрасса к проверке сходимости этих операторов для трех функций, например 1, x и x^2 (что выполняется особенно просто для полиномов Бернштейна). В гл. II (Порядок приближения функций полиномами) рассмотрены обобщенные положительные методы суммирования рядов Фурье, причем дана принадлежащая автору общая оценка скорости приближения. Наилучший, в некотором смысле, выбор множителей сходимости позволяет получить простое доказательство теорем Джексона. В гл. III (Характеристика дифференциальных свойств функции по последовательности ее наилучших приближений) дано новое доказательство неравенств и теорем С. Н. Бернштейна и теоремы Зигмунда. В гл. IV (Порядок приближения функций линейными положительными полиномиальными операторами) устанавливается порядок приближения функций операторами Фейера, Бернштейна (теорема Е. В. Вороновской), а также доказана общая теорема о порядке приближения функций линейными положительными полиномиальными операторами, устанавливающая, что этот порядок, вообще говоря, не выше $1/n^2$, какими бы хорошими свойствами ни обладала функция $f(x)$. Строится последовательность операторов, действительно дающая такой порядок приближения для дважды дифференцируемых функций. Желание улучшить порядок приближения для хороших функций ведет к отказу от положительности операторов. Поэтому в гл. V (Линейные непрерывные полиномиальные операторы) положительность операторов не предполагается. Здесь впервые в книге введено понятие нормы оператора и доказана теорема Банаха об условиях сходимости. Далее установлена невозможность построения линейных полиномиальных операторов, дающих приближение порядка наилучшего (теоремы В. Ф. Николаева и Лозинского — Харшиладзе). Здесь же рассмотрены операторы Валле-Пуссена. Гл. VI (Ряды Фурье) посвящена вопросам сходимости (локальной, равномерной и в среднем) и суммируемости рядов Фурье. В гл. VII (Интерполяционные многочлены) рассмотрены полиномы Чебышева, наименее уклоняющиеся от нуля, интерполяционные многочлены Лагранжа и Эрмита, теорема Фабера и теорема Фейера о сходимости интерполяционного процесса Эрмита с узлами в нулях полиномов Чебышева.

Читателю предлагаются 37 задач. Хотя книга предназначена для лиц, впервые изучающих конструктивную теорию функций, но она представляет интерес и для специалистов, так как содержит много новых идей и методов, отличающих ее от известных монографий И. П. Натансона, В. Л. Гончарова и др.

В. Н. Никольский

См. также: 7661, 7886.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы А. И. Маркушевич, Г. Ц. Тумаркин

7423. О неравенстве для функции-расстояния и неравенства А. Брауэра для кривых Кассини. Мордell L. J. (On a distance-function inequality and A. Brauer's inequality for Cassini curves. Mordell L. J.), J. analyse math., 1958, 6, № 2, 177—181 (англ.)

Брауэром был доказан следующий р зультат:

Если для действительных a, b, c, k мы имеем $a<c<k$ и $b \leqslant c$, то множество точек z-плоскости $|z-b|\ |z-c| \leqslant (k-b)(k-c)$ лежит в открытой области $|z-b|\ |z-a| < (k-b)(k-c)$, исключая $z=k$, которая является общей точкой границ обоих множеств.

В реферируемой работе этот результат значительно расширен, причем при доказательстве используется только элементарная алгебра.

Теорема. Пусть $f(X)$ — функция-расстояние со следующими свойствами: $f(0)=0$, $f(X)>0$ для $X \neq 0$, $f(kX)=|k|f(X)$ и $f(X+Y) \leqslant f(X)+f(Y)$ причем знак равенства имеет место только тогда, когда $\lambda X - \mu Y = 0$, $\lambda\mu \geqslant 0$. Пусть далее $\mu > 1$ и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ — положительные числа такие, что $\lambda_{n+1} \leqslant \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Тогда из выполнения неравенства

$$\prod_{r=1}^{n+1} f(X+\lambda_r X') \leqslant \prod_{r=1}^{n+1} f(\lambda_r X')$$

вытекает неравенство

$$\prod_{r=1}^{n} f(X+\lambda_r X') f(X+\mu\lambda_{n+1}X') \leqslant \prod_{r=1}^{n} f(\lambda_r X') f(\mu\lambda_{n+1}X').$$

Если $\mu \neq 1$, то равенство может иметь место только при $X=0$.

В частности, если рассмотреть двумерное пространство и заменить X на комплексную переменную z, X' на 1, положить $f(z)=|z|$ и изменить обозначения, то получим:

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ λ'_{n+1} — действительные числа все $<k$ и не превышающие λ_{n+1}, $\lambda'_{n+1} \leqslant \lambda_{n+1}$. Тогда из

$$\prod_{r=1}^{n+1} |z-\lambda_r| \leqslant \prod_{r=1}^{n+1} (k-\lambda_r)$$

вытекает

$$\prod_{r=1}^{n} |z-\lambda_r|\ |z-\lambda'_{n+1}| \leqslant \prod_{r=1}^{n} (k-\lambda_r)(k-\lambda'_{n+1}).$$

Равенство возможно только при $z=k$ (обобщение результата Брауэра). Л. И. Колбина

7424. Минимум модуля многочлена на единичной окружности. Клуни (The minimum modulus of a polynomial on the unit circle. Clunie J.), Quart. J. Math., 1959, 10, № 38, 95—98 (англ.)

Пусть $P_n(z)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ — такой многочлен степени n, что $|a_\nu| \leqslant 1$ $(0 \leqslant \nu \leqslant n)$. Если через $m(P_n)$ обозначить $\min |P_n(z)|$ при $|z|=1$, то из неравенства

$$m^2(P_n) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P_n(e^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu|^2$$

следует, что $m(P_n) \leqslant (n+1)^{-\frac{1}{2}}$. Устанавливается, что последнее неравенство в смысле порядка является точным.

Теорема. При всяком целом $n \geqslant 1$ существует такой многочлен $Q_n(z)=\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu^{(n)} z^\nu$ $(|b_\nu| \leqslant 1$, $0 \leqslant \nu \leqslant n)$, для которого $m(Q_n) \geqslant An^{1/6}$, где A — абсолютная константа.

Доказательство основано на рассмотрении чезаровских средних от частных сумм степенного ряда $\sum e^{i\nu \ln \nu} z^\nu$.

В. С. Виденский

7425. О границах модулей корней многочленов. Дан Сун-ши, Синькэсюэ, 1955, № 4, 28—30 (кит.)

Дается следующее обобщение теоремы 3 Сингха (РЖМат, 1·55, 168).

Корни многочлена

$$P(z)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu, \quad n \geqslant 2, \quad a_n \neq 0, \tag{1}$$

лежат в круге $|z| < A(c)\gamma$, где

$$\gamma = \max\left\{\left|\frac{a_k}{a_n}\right|^{\frac{1}{n-k}}\right\}_{k=0}^{k=n-1},$$

$$A(c)=c\left\{1+\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{c^{kp}}\right)^{\frac{q}{p}}\right\}^{\frac{1}{q}},$$

а числа p, q, c подчинены только условиям: $c>0$, $p>0$, $q>0$, $1/p+1/q=1$.

Кроме того, делается следующее дополнение к той же теореме Сингха. Если у многочлена (1) $a_0 \neq 0$, то корни его лежат в кольце

$$\frac{1}{2}S < |z| < 2\gamma, \tag{2}$$

где γ — та же постоянная, что и выше, а

$$S=\min\left\{\left|\frac{a_0}{a_k}\right|^{\frac{1}{k}}\right\}_{k=1}^{k=n}.$$

Отметим, что в формуле (9) внешний показатель должен быть $1/q$ вместо $1/p$. См. также реф. 7428.

В. А. Зморович

7426. К некоторым вопросам распределения корней многочлена. Дан Сун-ши. Синь кэсюэ, 1955, № 2, 42—43 (кит.)

Рассматриваются многочлены с комплексными коэффициентами

$$P(z)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu, \quad n \geqslant 2, \ a_0 \neq 0, \ a_n \neq 0. \tag{1}$$

Доказываются теоремы: 1. Если для многочлена (1) выполняются условия: 1) $|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_{n-1}| \leqslant n|a_n|$ и 2) $\gamma^{n-m}(n+1)\left|\frac{a_n}{a_0}\right| < 1$, где $n>m$ и $0<\gamma<1$, то вне круга $|z| \leqslant \gamma$ лежит по меньшей мере $m+1$ корней этого многочлена. 2. Если у многочлена (1) $|a_0| \geqslant 1$ и

$$R = \max\left\{\left|\frac{a_{n-j}}{a_n}\right|^{1/j}\right\}_{j=1}^{j=n},$$

то справедливо неравенство

$$n\left(\frac{R}{k}\right) < \frac{\ln\left[(n+1)\,|\,a_n\,|\,R^n\right]}{\ln k}. \qquad (2)$$

где $k > 1$, а $n(x)$ обозначает число корней многочлена в круге $|z| \leqslant x$. Эти теоремы являются обобщениями двух теорем С. К. Сингха (РЖМат, 1955, 168).

Примечание референта. Неравенство (2) должно быть заменено нестрогим ($\leqslant$), поскольку недостижимость знака равенства автором не доказана. См. также реф. 7428. В. А. Зморович

7427. О корнях одного класса многочленов. Рахман (On the zeros of a class of polynomials. Rahman Q. I.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1956, A22, № 3, 137—139 (англ.)

Уточняются теоремы 1) и 2) Сингха (РЖМат, 1955, 168). Уточненные теоремы формулируются так:

1. В условиях теоремы 1) Сингха, вне круга

$$|z| \leqslant r_0 = \left[2^{(n+1)/2}(n+1)\left|\frac{a_n}{a_0}\right|\right]^{-1/n}$$

лежат по крайней мере $E\left(\frac{n}{2}+1\right)$ корней многочлена

$$\sum_0^n a_\nu z^\nu, \qquad (1)$$

где $n \geqslant 2$, $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$ (здесь $E(x)$ обозначает наибольшее из целых чисел, не превосходящих x).

2. В условиях теоремы 2) Сингха для многочлена (1) имеет место неравенство

$$n(R/K) \leqslant \frac{\ln\{(n+1)\,|\,a_n\,|\,R^n\}}{\ln K},$$

где $K > 1$, $n(\rho)$ — число корней многочлена (1) в круге $|z| \leqslant \rho$,

$$R = \max\left\{\left|\frac{a_{n-s}}{a_n}\right|^{1/s}\right\}_{s=1}^{s=n}.$$

В. А. Зморович

7428. О границах корней алгебраических многочленов. Зморович В. А., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 5, 179—183

Рассматриваются многочлены вида $P(z) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu z^\nu$, где $a_0 \neq 0$ и $a_n \neq 0$ (a_l — комплексные числа). Доказываются следующие теоремы:

1. Пусть для многочлена $P(z)$

$$R = \max\left\{\left|\frac{a_k}{a_n}\right|^{1/(n-k)}\right\}_{k=0}^{k=n-1} \quad \text{и}$$

$$R_0 = \max\left\{\left|\frac{a_k}{a_0}\right|^{1/k}\right\}_{k=1}^{k=n} \quad (n \geqslant 2)$$

и пусть x_1 — единственный отличный от 1 положительный корень уравнения $x^{n+1} - 2x + 1 = 0$ (показывается, что $\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} < x_1 < \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}$). Тогда все корни от $P(z)$ лежат в кольце: $x_1/R_0 \leqslant |z| \leqslant R/x_1$, причем эти границы точны.

2. Если $R \geqslant \max\left\{\left|\frac{a_{n-h}}{a_n}\right|^{1/h}\right\}_{k=1}^{k=n}$, то $n\left(\frac{R}{k}\right) \leqslant \frac{\ln\left[(n+1)\left|\frac{a_n}{a_0}\right|R^n\right]}{\ln k}$, где $k > 1$ и $n\left(\frac{R}{k}\right)$ означает число корней от $P(z)$ в круге $|z| \leqslant \frac{R}{k}$.

3. $P(z)$ имеет по крайней мере k корней вне круга

$$|z| < \left(1 + \sum_{\nu=1}^n \left|\frac{a_\nu}{a_0}\right|\right)^{-1/(n-k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Далее рассматриваются многочлены вида $Q(z) = 1 + \sum_{l=1}^n b_l z^l$, где $1 + \sum_{l=1}^n |b_l| = A$ — постоянное число для всех рассматриваемых $Q(z)$ и $n \geqslant 2$ ($b_n \neq 0$). Для них доказывается теорема.

4. Точная верхняя граница радиусов открытых кругов, содержащих не более $n-1$ корней любого из этих многочленов, равна $(A-1)^{-1/n}$.

Теоремы 1 и 4 доказываются элементарно. Для доказательства теорем 2 и 3 используется следующая лемма. Если $F(z)$ регулярна в круге $|z| < R$, причем $F(0) = 1$ и $\ln|F(Re^{i\theta})| \leqslant A$ $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$, тогда $n(r) \leqslant A/\ln(R/r)$, где $0 < r < R$, а $n(r)$ — число корней функции $F(z)$ в круге $|z| \leqslant r$ (эта лемма является простым следствием формулы Иенсена). Показывается, что теоремы 1, 2 и 3 работы Сингха (РЖМат, 1955, 168) являются следствиями теорем 1, 2 и 3 реферируемой статьи.

К. С. Сцилард

Примечание редакции. Из этих теорем можно получить также как следствие результаты Дан Сун-Ши и Рахмана, приведенные в предыдущих трех рефератах.

7429. Об исключительных элементах аналитических функций. Монтель (Sur les éléments exceptionnels des fonctions analytiques. Montel Paul), C. r. Acad. sci., 1959, 249 № 1, 7—8 (франц.)

Первая половина статьи содержит краткую сводку главных результатов, опубликованных автором ранее (РЖМат, 1960, 2067), хотя ссылка отсутствует. Во второй половине статьи указанные результаты обобщаются. Вначале вместо касательных к аналитической кривой (определение см. указанный реферат) рассматриваются кривые p-го порядка, имеющие с данной кривой касание p-го порядка, и нормали к аналитической кривой. Затем рассматриваются хорды к регулярным в $|z| < \infty$ функциям $f(z)$, проходящие через точки $(z, f(z))$ и $(z+h, f(z+h))$ (т. е. линейные функции $W = W(Z)$ вида $W = [f(z+h) - f(z)]h^{-1}(Z - z) + f(z)$), где h — фиксированное комплексное число, параметр z пробегает $|z| < \infty$. Справедлива следующая теорема:

Если ни одна хорда (с постоянным h) к $f(z)$ не проходит через три различные точки проективного пространства (Z, W), лежащие на одной прямой, то $f(z)$ имеет вид $f(z) = \omega(z)(z-\alpha) + \beta$, где α и β — постоянные, $\omega(z)$ — функция с периодом h.

Если это свойство имеет место для двух h и k, $\operatorname{Im} h/k \neq 0$, то $\omega(z)$ — двоякопериодична с периодами h и k. Если это же свойство имеет место для трех чисел h, k, l, каждое из которых нельзя представить в виде линейной комбинации с целыми коэффициентами двух других, то $f(z)$ является линейной функцией.

Далее рассматриваются регулярные при конечных значениях z, z' функции $f(z, z')$ и свойства касательных плоскостей к ним. Если ни одна касательная плоскость не проходит через три точки проективного пространства (Z, Z', W), лежащие на одной прямой, то $f(z, z')$ — линейная функция. Не только доказательства, но и многие нужные определения не приводятся. Референту осталось неясным, в каком смысле автор употребляет термин „регулярная функция"; То, что этот термин

употребляется не в обычном смысле, видно из формулировки первой из приведенных в реферате теорем, с другой стороны, автор различает „аналитические“ и „регулярные“ функции. А. А. Гольдберг

7430. О некоторых проблемах касания и нескольких типах дифференциальных уравнений. Рошкэу (Asupra unor probleme de osculaţie şi cîteva tipuri de ecuaţii diferenţiale. Roşcău H.), Lucrări ştiinţ. Inst. politehn. Cluj. Cluj, 1959, 83—93 (рум.; рез. русск., франц.)

Две функции $f(z)$ и $g(z)$, голоморфные в окрестности z_0, имеют в z_0 касание n-го порядка, если $f(z)-g(z)$ имеет в z_0 нуль n-го порядка. Пусть $f(z)$ голоморфна в окрестности z_0. Ищутся рациональные функции $g(z)$, имеющие в расширенной комплексной плоскости ровно два конечных полюса заданных порядков p и m (положение полюсов не фиксируется), которые имели бы в фиксированной точке $z=z_0$ касание с $f(z)$ порядка $m+p+2$. Показано, что число таких рациональных функций не превышает mp^2 ($p \leqslant m$). Положение полюсов $g(z)$ вообще зависит от выбора z_0. Далее находится общий вид функций $f(z)$ таких, что положение полюсов функций $g(z)$ не зависит от выбора z_0. Такие функции $f(z)$ оказываются также рациональными с теми же полюсами таких же порядков, что и у $g(z)$; коэффициенты $f(z)$ произвольны, коэффициенты $g(z)$ определенным образом зависят от них. В процессе доказательства находится система дифференциальных уравнений, общее решение которой является рациональной функцией с двумя полюсами заданных порядков. Аналогичная задача решается для случая, когда $g(z)$ является рациональной функцией с n простыми полюсами.

Работа примыкает к исследованиям Фробениуса, Вильчинского, Цицейка, которые изучали случай, когда $g(z)$ имеет или несколько простых полюсов, или один кратный. Имеются опечатки. А. А. Гольдберг

7431. Некоторые матричные признаки линейных преобразований аналитических пространств. Капилин М. А., Сб. научн. статей. Азово-Черноморск. ин-т механиз. с. х., 1959, вып. 8, ч. 2, 128—133

Рассматривается линейный оператор $y=Mx$, где $M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots \\ a_{21} & a_{22} \dots \\ \dots\dots & \\ \dots\dots & \end{pmatrix}$, преобразующий аналитические пространства $x=\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ в $y=\{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}$. Автор дает необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяет матрица M, переводящая $\overline{A}_1$ в A_∞ (определения A_r и $\overline{A}_r$ см., например, РЖМат, 1959, 302).

Теорема. Для того чтобы матрица M осуществляла преобразование $A_1 \to A_\infty$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $q>1$ существовала функция целочисленного аргумента $\nu(j)$, обладающая следующими свойствами: 1) $\lim_{j\to\infty} \nu(j)=\infty$; 2) Любая точка $(a_{1,n_1}, a_{2,n_2} \dots a_{j,n_j} \dots)$, лежащая левее ломаной $\{j, \nu(j)\,j\}$, т. е. удовлетворяющая условию $n_j \leqslant \nu(j)\,j$, принадлежит пространству A_∞; 3) для любого элемента $(a_{1,n_1}, \dots a_{j,n_j} \dots)$ лежащего правее ломаной $\{j, \nu(j)\,j\}$, выполняется неравенство $|a_{j,n}| < q_n$. Затем приводятся без доказательства аналогичные результаты для преобразований $\overline{A}_0 \to A_\infty$ и $\overline{A}_0$ в A_1. Э. З. Шувалова

7432. Средние, мажорирующие функции и суммы коэффициентов для степенных рядов конечного порядка. Ру (Media, funzione maggiorante e somme di coefficienti per le serie di potenze di ordine finito. Roux Delfina), Riv. mat. Univ. Parma, 1956, 7, № 3-5, 187—209 (итал.)

Пусть степенной ряд $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ имеет радиус сходимости 1. Обозначим:

$$M_2(f, r)=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\, d\theta\right\}^{1/2},$$

$$M(f, r)=\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, r^n,$$

$$A(f, h)=\sum_{n=0}^{h} |a_n|, \quad B(f, h)=\left(\sum_{n=0}^{h} |a_n|^2\right)^{1/2},$$

$S(M_2, \alpha)$ ($S(M, \alpha)$) — класс функций $f(z)$, для которых существует $r_0=r_0(f)$ такое, что $M_2(f, r) \leqslant (1-r)^{-\alpha}$ ($M(f, r) \leqslant (1-r)^{-\alpha}$) для $r_0 \leqslant r < 1$, где $\alpha>0$; $S(A, \alpha)$ ($S(B\ \alpha)$) — класс функций $f(z)$, для которых существует $h_0=h_0(f)$ такое, что $A(f, h) \leqslant h^\alpha$ ($B(f, h) \leqslant h^\alpha$) для $h \geqslant h_0$. Если S — какой-нибудь класс функций $f(z)$ и K — постоянное число, то через $K \cdot S$ обозначается класс функций $K \cdot f(z)$, где $f(z) \in S$. Определяются постоянные числа $K_{M_2,B}(\alpha)$, $K_{M,M}(\alpha)$, $K_{M,A}(\alpha)$ из условий: для каждой $f(z) \in S(M_2, \alpha)$ имеют место соответственно включения:

$$f(z) \in K_{M_2,B}(\alpha) \cdot S(B, \alpha),$$

$$f(z) \in K_{M,M}(\alpha) \cdot S\left(M, \alpha+\frac{1}{2}\right),$$

$$f(z) \in K_{M,A}(\alpha)\ S\left(A, \alpha+\frac{1}{2}\right).$$

Определяются постоянные числа $K_{BM_2}(\alpha)$, $K_{BM}(\alpha)$, $K_{BA}(\alpha)$ из условий: для каждой $f(z) \in S(B, \alpha)$ имеют место соответственно включения:

$$f(z) \in K_{BM_2}(\alpha) \cdot S(M_2, \alpha),$$

$$f(z) \in K_{BM}(\alpha) \cdot S\left(M, \alpha+\frac{1}{2}\right),$$

$$f(z) \in K_{BA}(\alpha) \cdot S\left(A, \alpha+\frac{1}{2}\right).$$

Постоянные числа $K_{AM}(\alpha)$ и $K_{MA}(\alpha)$ определяются из условия: $f(z) \in K_{AM}(\alpha) \cdot S(M, \alpha)$ для каждой $f(z) \in S(A, \alpha)$; $f(z) \in K_{MA}(\alpha) \cdot S(A, \alpha)$ для каждой $f(z) \in S(M, \alpha)$. Наконец, определяются восемь постоянных чисел

$$K^*_{M_2,B}(\alpha),\ K^*_{M,M}(\alpha),\ K^*_{M,A}(\alpha),\ K^*_{BM_2}(\alpha),\ K^*_{BM}(\alpha),$$

$$K^*_{BA}(\alpha),\ K^*_{MA}(\alpha),\ K^*_{AM}(\alpha),$$

являющихся нижними гранями соответственно чисел $K_{M_2,B}(\alpha)$, $K_{M,M}(\alpha)$ и т. д. Эти восемь постоянных называются наилучшими постоянными. В работе находятся или точные значения этих наилучших постоянных или границы, между которыми содержатся эти наилучшие постоянные. Обозначим, ради краткости, $\Gamma(\alpha+1)$ через $\alpha!$ Доказаны следующие равенства:

$$K^*_{M_2,B}(0)=1,\ K^*_{M,M}(0)=0,$$

$$K^*_{M,M}(1/2)=\sqrt{2},\ K^*_{M,A}(0)=0,$$

$$K^*_{BM_2}(\alpha)=2^{-\alpha}\sqrt{(2\alpha)!},\ K^*_{BA}(0)=0,\ K^*_{BA}(1/2)=1,$$

$$K^*_{BM}(0)=0,\ K^*_{BM}(1/2)=1,\ K^*_{MA}(0)=1,\ K^*_{AM}(\alpha)=\alpha!$$

и неравенства для $\alpha>0$:

$$2^\alpha/\sqrt{(2\alpha)!} \leqslant K^*_{M,B}(\alpha) \leqslant (e/\alpha)^\alpha,$$

$$\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)!\,2^\alpha/\sqrt{(2\alpha-1)!} \leqslant K^*_{M,M}(\alpha) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1/2}\alpha^{-\alpha} \text{ (Риччи)},$$

$$\frac{2^\alpha}{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\sqrt{(\alpha-1)!}} \leqslant K^*_{M,A}(\alpha) \leqslant \left(\frac{e^{2\gamma_0}-1}{2\gamma_0^{2\alpha+1}}\right)^{1/2},$$

где γ_0 — положительный корень уравнения $\gamma e^{2\gamma} - (\alpha+1/2)(e^{2\gamma}-1)=0$;

$$\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)!\sqrt{2\alpha} \leqslant K^*_{BM}(\alpha) \leqslant \{(2\alpha)!\}^{1/2} \times$$

$$\times\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}(2\alpha)^{-\alpha},$$

$$1/\alpha! \leqslant K^*_{MA}(\alpha) \leqslant (e/\alpha)^\alpha,$$

$$\sqrt{2\alpha}/\left(\alpha+\frac{1}{2}\right) \leqslant K^*_{BA}(\alpha) \leqslant 1 \quad \text{для } 0<\alpha\leqslant\frac{1}{2},$$

$$\sqrt{2\alpha}/\left(\alpha+\frac{1}{2}\right) \leqslant K^*_{BA}(\alpha) \leqslant (1-\gamma_0)^{\alpha+\frac{1}{2}}+\gamma_0^{1/2}$$

для $\alpha>\frac{1}{2}$, где γ_0 — максимальный положительный корень уравнения $(\alpha+1)\gamma(1-\gamma)^{2\alpha-1}-1=0$.

Н. А. Давыдов

7433. О сингулярных радиусах степенных рядов. Эрдёш, Реньи (On singular radii of power series. Erdős Paul, Rényi Alfréd), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1958 (1959), 3, № 3-4, 159—169 (англ.; рез. венг., русск.)

Пусть $f(z)$ регулярна и неограниченна в круге $|z|<1$. Следуя Гайеру и Мейер-Кёнигу, радиус R_φ ($z=re^{i\varphi}$, $0(<r<1)$ автор называет сингулярным для $f(z)$, если $f(z)$ неограниченна в круговом секторе $|z|<1$, $\varphi-\varepsilon<\arg z<\varphi+\varepsilon$ при любом $\varepsilon>0$. Доказаны две теоремы.

1. Пусть возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ удовлетворяет условию

$$\varlimsup_{(k-j)\to\infty}(n_k-n_j)^{1/(k-j)}=1$$

и $\{\omega_k\}$ — последовательность действительных положительных чисел, как угодно медленно стремящаяся к бесконечности. Тогда существует функция

$$f(z)=\sum_{k=1}^\infty c_k z^{n_k},$$

аналитическая и неограниченная в $|z|<1$, которая имеет только один сингулярный радиус и для которой $0<n_k'-n_k<\omega_k$.

2. Пусть $\{\lambda_m\}$ и $\{n_k\}$ есть возрастающие последовательности натуральных чисел, причем для каждого m найдется k_m такое, что для $k>k_m$ числа n_k делятся на λ_m. Пусть $\{b_k\}$ — ограниченная последовательность целых чисел. Если функция $f(z)=\sum_{k=1}^\infty c_k z^{n_k+b_k}$ аналитична и неограниченна в круге $|z|<1$, то всякий радиус этого круга сингулярен для $f(z)$. Н. А. Давыдов

7434. О поведении степенных рядов на окружности сходимости. Корради (Hatványsorok konvergenciatulajdonságairól. Corrádi Keresztély), Mat. lapok, 1959, **10**, № 1-2, 136—141 (венг.; рез. русск., нем.)

Строятся два степенных ряда, один из которых сходится на единичной окружности равномерно, но не абсолютно, а другой сходится в каждой точке единичной окружности и имеет сумму, не ограниченную внутри этой окружности. Примеры таких рядов хорошо известны. Цель автора — дать по возможности их простую конструкцию. Н. А. Давыдов

7435. Об одном способе аналитического продолжения степенных рядов. Лебедев Н. А., Докл. АН СССР, 1959, 125, № 4, 730—732

Рассматривается вопрос об аналитическом продолжении степенных рядов

$$f(z)=\sum_{k=0}^\infty a_{k+1}(z-a)^k \quad \text{при } a\neq\infty,$$

$$f(z)=\sum_{k=0}^\infty \frac{a_k}{z^{k+1}} \quad \text{при } a=\infty,$$

сходящихся в некоторой окрестности точки a, принадлежащей односвязной области G, в которой $f(z)$ регулярна. Автор дает необходимые и достаточные условия аналитического продолжения рядов (1) и ( ), связанные с ростом коэффициентов $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$, где b_k — коэффициенты разложения функций

$$\Phi(z)^k=b_0^{(k)}+\frac{b_1^{(k)}}{z-a}+\ldots+\frac{b_k^{(k)}}{(z-a)^k}+$$

$$+\sum_{v=1}^\infty \alpha_v^{(k)}(z-a)^v \quad \text{при } a\neq\infty,$$

$$\Phi(z)^k=b_0^{(k)}+b_1^{(k)}z+\ldots+b_k^{(k)}z^k+\sum_{k=0}^\infty\frac{\alpha_0^{(k)}}{z^v}$$

при $a=\infty$,

а $\Phi(z)$ — функция, конформно отображающая G на область $|w|>\rho$, $\rho>0$, причем

$$\Phi(z)=\frac{1}{z-a}+\alpha_0+\alpha_1(z-a)+\ldots, \quad a\neq\infty,$$

$$\Phi(z)=z+\alpha_0+\frac{\alpha}{z}+\ldots, \quad a=\infty.$$

Э. З. Шувалова

7436. Некоторые условия для аналитической непродолжимости степенных рядов. Илиев (Някои условия за аналитична непродължимост на степенните редове. Илиев Л.), Изв. Матем. ин-т.Ълг. АН, 1959, 3, № 2, 205—211 (болг.; рез. русск., нем.)

Пусть $E(\alpha)$ обозначает класс степенных рядов

$$f(z)=\sum_{n=0}^\infty c_n z^n, \tag{1}$$

удовлетворяющих условию $|c_n|=O(n^\alpha)$, где α — действительное число. Ограниченная последовательность d_n определяется равенством $c_n=d_n\cdot b_n$, где b_n удовлетворяют двум условиям:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{b_{n+1}}=1, \quad 0<l<\frac{b_n}{n^\alpha}<L.$$

Доказана теорема о том, что если ряд (1) принадлежит классу $E(\alpha)$ и существует такая возрастающая последовательность индексов n_ν ($\nu=1,2,\ldots$), что

$$|d_{n_\nu}-d_{n_{\nu+1}}|>d>0 \quad (\nu=1,2,\ldots),$$

$$\lim_{\nu\to\infty} d_{n_\nu - k} = \lim_{\nu\to\infty} d_{n_{\nu+1}-k}$$

для $k = 1, 2, \ldots, p_{n_\nu}$, где $\lim_{\nu\to\infty} p_{n_\nu} = \infty$, то окружность $|z| = 1$ будет купюрой для $f(z)$. Н. А. Давыдов

7437. О постоянстве лакунарной структуры вдоль аналитического продолжения. Ферлан, Скоф (Sulla permanenza della struttura lacunare attraverso il prolungamento analitico. Ferlan Nives Maria, Skof Fulvia), Riv. mat. Univ. Parma, 1957, 8, № 4-5, 345—360 (итал.)

Пусть степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (1)$$

имеет радиус сходимости $R > 0$. Говорят, что ряд (1) имеет лакунарную структуру с последовательностью лакун $\{p_k; q_k\}$ $(p_k < q_k < p_{k+1})$, если

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n} > \overline{\lim_{m\to\infty}} |a_m|^{1/m},$$

где $p_k \leqslant m \leqslant q_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\lim_{k\to\infty} \frac{q_k}{p_k} > 1$.

Авторы ставят следующую задачу. Пусть ряд (1) имеет лакунарную структуру и пусть точка z_0 принадлежит области аналитичности функции $f(z)$. Будет ли степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \qquad (2)$$

иметь лакунарную структуру и какова его последовательность лакун $\{p_k'; q_k'\}$. Приведем одну из трех теорем, доказанных в работе.

Пусть ряд (1) имеет радиус сходимости $R = 1$ и пусть $a_n = 0$ для $p_k \leqslant n \leqslant q_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\lim_{k\to\infty} \frac{q_k}{p_k} = \infty$. Пусть, далее, $0 < |z_0| < 1$ и $R(z_0)$ — радиус сходимости ряда (2) $(R(z_0) \geqslant 1 - |z_0|)$. Для числа $T > 1 - |z_0|$ обозначим через $\mu = \mu(|z_0|, T)$ корень уравнения

$$(|z_0| + \mu)\ln(|z_0| + \mu) + \mu \ln\frac{T}{\mu} = 0$$

(этот корень принадлежит интервалу $0 < \mu < 1 - |z_0|$). При этих условиях для $T > R(z_0)$ ряд (2) имеет лакунарную структуру с последовательностью лакун $\{p_k'; q_k'\}$, где $p_k' = p_k$, $q_k' = [q_k \cdot \mu/(|z_0| + \mu)]$, причем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |b_n|^{1/n} < \frac{1}{T}, \text{ когда } p_k' \leqslant n \leqslant q_k' \ (k = 1, 2, \ldots).$$

Н. А. Давыдов

7438. Аналитическое продолжение мероморфных функций в нормированных полях. Робертс (Analytic continuation of meromorphic functions in valued fields. Roberts J. B.), Pacif. J. Math., 1959, 9, № 1, 183—193 (англ.)

Пусть k — нормированное полное поле, S — совокупность всех бесконечных рядов, члены которых принадлежат k. Пусть T — множество всех безусловно сходящихся рядов из S. Если k — неархимедово, то T совпадает с множеством всех сходящихся рядов; если k — архимедово, то T есть совокупность всех абсолютно сходящихся рядов. Пусть T^* — множество всех рядов с ненулевой суммой, входящих в T. В множестве M всех матриц (a_{ij}) $(i = 0, 1, \ldots, j = 0, 1, \ldots)$ с элементами из k обычным образом вводится сложение. Произведением матриц $m_1, m_2 \in M$, $m_1 = (a_{ij})$, $m_2 = (b_{ij})$, называется матрица $m_1 m_2 = (\sum_{q=0}^{\infty} a_{iq} b_{qj})$, если все ряды $\sum a_{iq} b_{qj}$ сходятся. Если $C \in S$, $C = \sum_{l=0}^{\infty} c_l$, то по определению $B_C = (b_{ij})$, где $b_{ij} = c_{j-i}$ при $j \geqslant i$, $b_{ij} = 0$ при $j < i$. Если сумма C равна $c \neq 0$, то пусть $A_C = B_C(c)^{-1}$, где (c) — диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны c. В T можно ввести норму, полагая для $C \in T$, $C = \sum_{i=0}^{\infty} c_i$, $|C|_T = \max_i |c_i|$, если k — неархимедово, $|C|_T = \sum_{i=0}^{\infty} |c_i|$, если k — архимедово. В M введем топологию аддитивной группы, определяемую фундаментальной системой окрестностей нуля, состоящей из всех множеств вида

$$M_r = \{(a_{ij}) \in M, \ |a_{ij}| < r, \ i, j = 0, 1, \ldots, r > 0\}.$$

Теорема 1. Пусть $C_n \in T^*$, $n = 1, 2, \ldots$, и пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ сходится (по норме в T). Тогда произведение $\prod_{n=1}^{\infty} A_{C_n}$ сходится (в смысле топологии в M) и равно $A_{\prod_1^\infty c_n}$. Матрицу $m \in M$ назовем T_2-матрицей, если для всякого $C \in S$, сходящегося к сумме c, ряд mC тоже сходится к c. Если $C \in T^*$, то A_C — T_2 — матрица.

Пусть $C(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(x)$, $U(x) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x)$ — ряды, при каждом $x \in X \supseteq k$ входящие в S; пусть при всех $x \in D \supseteq X$ $C(x) \in T^*$, и $U(x)$ сходится при всех $x \in \Delta \supseteq D$, $\Delta \neq \Lambda$. Если $u(x)$ — сумма ряда $U(x)$ $(x \in \Delta)$, а ряд $A_{C(x)} U(x)$ сходится к сумме $u'(x)$ при всех x из некоторого множества $\Gamma \supseteq \Delta$, то u' называется $C(x)$-продолжением функции u.

Пусть функция f задана в круге $D \supseteq k$, с центром в α, $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - \alpha)^i$ $(x \in D, a_i \in k)$. Этот степенной ряд обозначим $[f(x)]_\alpha$. Если $y \in D$, то формально разлагая вновь f по степеням $(x - y)$, получим ряд $[f(x)]_y$. Если поле k — неархимедово, то ряд $[f(x)]_y$ никогда не может сходиться вне круга сходимости ряда $[f(x)]_\alpha$. Функция f называется мероморфной в D, если существуют два ряда $[g(x)]_\alpha$, $[h(x)]_\alpha$, сходящихся в D, так, что f определена для тех и только тех $x \in D$, при которых $h(x) \neq 0$, и при всяком таком x $f(x) = g(x)/h(x)$.

Теорема 4. Пусть f мероморфна в D, ряд $[f(x)]_\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - \alpha)^i$ $(\alpha \in D)$ имеет круг сходимости, содержащийся в D. Тогда $[f(x)]_y = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(y)(x - y)^i$, если $y \in D$, $h(y) \neq 0$, где $f_i(y)$ есть $[h(y)]_\alpha^{i+1}$ — продолжение $i! \sum_{j=0}^{\infty} \binom{i+j}{i} a_{i+j} (y - \alpha)^j$.

Теорема 5. Если функция f, заданная в D, есть $C(x)$ — продолжение степенного ряда $[f(x)]_\alpha$, где $C(x)$ есть ряд вида $[h(x)]_\alpha$, то f мероморфна в D. Библ. 13 назв. В. П. Хавин

7439. О рядах Дирихле с комплексными показателями. Микусинский (On Dirichlet series with complex exponents. Mikusiński J.), Ann. polon. math., 1955, 2, № 2, 254—256 (англ.)

Определяется область сходимости ряда Дирихле $\sum a_n e^{-\beta_n z}$ при условии, что $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\operatorname{Re}\beta_n} = 0$ и все β_n лежат в угле, строго внутреннем к правой полуплоскости

Примечание референта. Из результатов работы референта (Матем. сб., 1942, **10** (**52**), № 1-2, 33—50), по-видимому неизвестной автору, вытекают утверждения и формулы автора как частный случай. Уравнение границы области сходимости ряда Дирихле записано автором неточно. Г. Л. Луц

7440. Последовательности дробно-линейных преобразований. Эрдёш, Пиранян (Sequences of linear fractional transformations. Erdös Paul, Piranian George), Michigan Math. J., 1959, **6**, № 3, 205—209 (англ.)

Множество E точек расширенной z-плоскости называется множеством расходимости (м. р.), если существует последовательность дробно-линейных преобразований

$$T_n(z) = (a_n z + b_n)/(c_n z + d_n),$$

расходящаяся в каждой точке z из E и сходящаяся в каждой точке дополнения к E. Устанавливаются следующие 3 теоремы.

Теорема 1. Множество E, лежащее на прямой, тогда и только тогда будет м. р., если оно типа $G_{\delta\sigma}$. Пусть z таково, что для каждого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что если $|t-z|<\delta$, то найдется w из E такое, что $|w-t|<\varepsilon\,|z-t|$. Множество всех таких точек z обозначим через $gd(E)$. Пусть $E'=E\setminus gd(E)$ и для каждого порядкового числа α $E^\alpha = E^{\alpha-1}\setminus gd(E^{\alpha-1})$, если α — первого рода, и $E^\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} E^\beta$, если α — второго рода.

Теорема 2. Счетное множество E тогда и только тогда будет м. р., если при некотором α множество E^α пусто.

Теорема 3. Всякая часть счетного м. р. также является м. р.

Статья примыкает к работе Пираняна и Трона (РЖМат, 1958, 9741). М. Б. Балк

7441. Оценка ошибки при приближении полиномами аналитических функций на линиях в гладких областях. У Сюе-моу, Ханьшулунь яньцзю баогао, 1958, № 1, 54—58

Рассматриваются аналитические функции $f(z)$ класса E_p (в смысле В. И. Смирнова) в односвязной области D со спрямляемой границей Γ. Вводится норма функции, интегральный модуль непрерывности на Γ, параметрическое уравнение которой $z=z(s)$ (s — длина дуги на Γ) и наилучшее приближение в среднем:

$$\|f(z)\| = \{\int_\Gamma |f(z)|^p\,ds\}^{1/p},$$

$$\omega_p(\delta, f) = \max_{|h|<\delta} \|f(z(s+h)) - f(z(s))\|,$$

$$\rho_p(n, f) = \inf \|f(z) - P_n(z)\|$$

по всевозможным полиномам $P_n(z)$ степени $\leqslant n$.

Теорема III. Пусть Γ — гладкая кривая Жордана и для модуля непрерывности $j(h)$ функции $z'(s)$ выполнено условие $\int_0^\varepsilon j(h)\,h^{-1}dh<\infty$, если $f(z)\in E_p$ ($p>1$) в области D, то $\rho_p(n, f) \leqslant C_1\left\{\int_0^\varepsilon \frac{\omega_p(t, f)}{t}\,dt + n^2\varepsilon + \omega_p\left(\frac{1}{n}, f\right)\lg\frac{1}{\varepsilon}\right\}$ при условии, что интеграл в правой части конечен при некотором $\varepsilon=\varepsilon_0$; здесь $\varepsilon>0$ как угодно мало, C_1 не зависит от n и ε.

Теорема IV. Если Γ — произвольная гладкая кривая Жордана и $f(z)\in E_p(p>1)$, то

$$\rho_{p_1}(n, f) \leqslant C_2\left\{\int_0^\varepsilon \frac{\omega_p(t, f)}{t}\,dt + n^2\varepsilon + \omega_p\left(\frac{1}{n^{1-\delta}}, f\right)\lg\frac{1}{\varepsilon}\right\}$$

при условии, что интеграл в правой части конечен при некотором $\varepsilon=\varepsilon_0$; здесь $\varepsilon>0$, $\delta>0$ как угодно малы, C_2 не зависит от n и ε, p_1 — любое число, заключенное между p и 1, C_2 зависит от p, p_1, $f(z)$ и δ.

Доказываются также теоремы аналогичного характера о порядке наилучшего приближения в среднем аналитической функции $f(z)$ в зависимости от модуля непрерывности $\mathrm{Re}\,f(z)$ на Γ в предположении, что $\mathrm{Re}f(z)\in e_p$. Класс e_p для гармонических функций определяется аналогично классу E_p для аналитических функций.

Примечание референта. При условиях теоремы III можно указать более низкую, и притом точную, оценку сверху наилучшего приближения функций рассматриваемого класса $\rho_p(n, f) \leqslant B\omega_p\left(\frac{1}{n}, f\right)$, без дополнительного ограничения на $\omega_p(\delta, f)$. Эта оценка получена референтом и доложена на III Всесоюзной конференции по ТФКП в мае 1957 г. (сб. Современные проблемы теории функций комплексного переменного, М., 1960). С. Я. Альпер

7442. Интегральные условия непрерывности и степень приближения многочленами или ограниченными аналитическими функциями. Уолш, Расселл (Integrated continuity conditions and degree of approximation by polynomials or by bounded analytic functions. Walsh J. L., Russell H. G.), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **92**, № 2, 355—370 (англ.)

Пусть область G ограничена аналитической жордановой кривой C и пусть $H(k, \alpha, p)$ при $0<\alpha<1$ означает совокупность аналитических в области G функций, у которых производные порядка k имеют ограниченный средний модуль степени $p\geqslant 1$ и удовлетворяют на контуре C интегральному условию Липшица порядка α степени p. Аналогично, производные k-го порядка функций класса $Z(k, p)$ удовлетворяют интегральному условию Зигмунда степени p. Если множество G есть сумма односвязных областей, то принадлежность функции классу $H(k, \alpha, p)$ или $Z(k, p)$ на множестве G означает принадлежность соответствующему классу на каждой компоненте.

Теорема 1. Если функция $f(z)$ принадлежит классу $H(k, \alpha, p)$ или классу $Z(k, p)$ на множестве G, состоящем из конечного числа взаимно не пересекающихся односвязных областей, ограниченных аналитическими жордановыми кривыми, то для каждого n существует такой многочлен $\pi_n(z)$ степени n, что имеет место неравенство

$$\int_C |f(z) - \pi_n(z)|^p\,|dz| \leqslant \frac{M}{n^{(k+\alpha)p}}, \qquad (1)$$

где M есть постоянная из условия Липшица или Зигмунда, не зависящая от n.

Теорема 2. Если область G ограничена аналитической жордановой кривой C и для определенной на кривой C функции $f(z)$ существует такая последовательность многочленов $\{\pi_n(z)\}$, что выполняется неравенство (1), то функция $f(z)$ почти всюду совпадает с граничными значениями функции, принадлежащей в области G классу $H(k, \alpha, p)$, если $0<\alpha<1$, или классу $Z(k, p)$, если $\alpha=1$. Если, кроме того, $\alpha p>1$, то производная $f^{(k)}(z)$ удовлетворяет в замкнутой области $\bar{G}$ условию Липшица порядка $\left(\alpha-\frac{1}{p}\right)$ и имеет место неравенство

$$|f(z) - \pi_n(z)| \leqslant \frac{M}{n^{k+\alpha-\frac{1}{p}}},\ z\in\bar{G}. \qquad (2)$$

Далее, определяя классы $H(k, \alpha, p)$ и $Z(k, p)$ и для отрицательных k, авторы рассматривают приближение

функций, аналитических на замкнутом множестве $\bar{G}$. Пусть C_R есть прообраз круга $|w| = R > 1$ при отображении дополнения множества $\bar{G}$ на дополнение единичного круга, а G_R есть внутренность кривой G_R.

Теорема 3. Если множества G и G_R состоят каждое из конечного числа взаимно не налагающих односвязных областей, ограниченных аналитическими жордановыми кривыми, и если функция $f(z)$ принадлежит на множестве G_R классу $H(k, \alpha, p)$, или классу $Z(k, p)$, то для каждого n существует такой многочлен $\pi_n(z)$, что на замкнутом множестве $\bar{G}$ выполняется неравенство

$$|f(z) - \pi_n(z)| \leqslant \frac{L}{n^{k+\alpha} R^n}. \qquad (3)$$

Теорема 4. Пусть область G, ограниченная аналитической жордановой кривой C, вместе с границей расположена внутри области D, и пусть на контуре C определена функция $F(z)$. Если существует последовательность аналитических в области D функций $f_n(z)$, удовлетворяющих условиям

$$|f_n(z)| \leqslant L_1 R^n, \quad z \in D, \quad R > 1,$$

$$\int_C |F(z) - f_n(z)|^p |dz| \leqslant \frac{L_2}{n^{(k+\alpha)p}}, \quad k \geqslant 0,$$

то функция $F(z)$ совпадает почти всюду на контуре C с граничными значениями функции класса $H(k, \alpha, p)$ в области G, если $0 < \alpha < 1$, и класса $Z(k, p)$, если $\alpha = 1$. Кроме того, если $\alpha p > 1$, то из этих условий следует также неравенство

$$|F(z) - f_n(z)| \leqslant \frac{L_3}{n^{k+\alpha-\frac{1}{p}}}, \quad z \in \bar{G}.$$

В теореме 5 для многочлена, минимизирующего интеграл, стоящий в левой части неравенства (1), устанавливаются оценки, аналогичные неравенствам (1), (2), (3).

Теорема 6. Пусть области G и D удовлетворяют условиям теоремы 4 и в области G определена аналитическая функция $f(z)$, имеющая ограниченный средний модуль степени p. Предположим, что для каждого $M > 0$ существует аналитическая в области D функция $F_M(z)$, которая в классе функций, аналитических в области D и по модулю не превосходящих числа M, минимизирует величину

$$\mu_M^p = \int_C |f(z) - F_M(z)|^p |dz|.$$

Тогда, для того чтобы функция $f(z)$ принадлежала в области G классу $H(k, \alpha, p)$ или классу $Z(k, p)$, необходимо и достаточно, чтобы величина $\mu_M^{\frac{1}{k+\alpha}} \cdot \ln M$ была ограниченна, когда M стремится к бесконечности.

Рассматривается также приближение функций, определенных только на контуре C с помощью многочленов по положительным и отрицательным степеням, и получаются аналогичные результаты.

Формулируется много вспомогательных предположений, часть которых доказывается впервые. Библ. 22 назв.

П. К. Суетин

Примечание редакции. Теоремы 1 и 2 для односвязной области G с границей C были установлены С. Я. Альпером при более широких условиях для границы области. Вместо аналитичности кривой C требуется только, чтобы C была гладкая кривая, удовлетворяющая условию $\int_0^a j(h)\, dh < \infty$, где $j(h)$ — модуль непрерывности функции $z'(s)$. Здесь $z = z(s)$ — параметрическое уравнение кривой C, а s — длина дуги на C. Эти результаты были доложены С. Я. Альпером на III Всесоюзной конференции по ТФКП в мае 1957 г. в Москве (см. сб. Современные проблемы теории функций комплексного переменного, М., 1960).

7443. Заметка о наилучшем квадратическом приближении аналитической функции полиномами, измеренном интегралом по области. Уолш (Note on least-square approximation to an analytic function by polynomials, as measured by a surface integral. Walsh J. L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 2, 273—279 (англ.)

Рассматривается класс $L_p(k, \alpha)$, k — целое $\geqslant 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$, функций $f(z)$, аналитических в круге $|z| < 1$, для которых $f^{(k)}(z)$ принадлежит классу H_p Рисса и

$$\left\{\int_0^{2\pi} |f^{(k)}(e^{i|\vartheta+h|}) - f^{(k)}(e^{i\vartheta})|^p\, d\vartheta\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant A|h^\alpha|. \qquad (1)$$

Класс $L_p(-1, \alpha)$ образуют функции $f(z)$, аналитические в $|z| < 1$, для которых

$$\left\{\int_0^{2\pi} |f(re^{i\vartheta})|^p\, d\vartheta\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant A_1/(1-r)^{1-\alpha}, \qquad (2)$$

A, A_1 и другие константы не зависят от h, r, n и z. Через $\rho_p(n, f)$ обозначим (в отличие от обозначения автора)

$$\inf\left\{\iint_{|z|<1} |f(z) - P_n(z)|^p d\sigma\right\}^{\frac{1}{p}} \qquad (3)$$

по всевозможным полиномам $P_n(z)$ степени $\leqslant n$. Доказывается следующая, основная теорема.

Теорема 1. Для того чтобы аналитическая в $|z| < 1$ функция $f(z) \in L_2(k, \alpha)$, k — целое $\geqslant 0$, $0 < \alpha < 1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\rho_2(n, f) \leqslant A_2/n^{k+\alpha+\frac{1}{2}}$ для всех $n \geqslant 1$. Если показатель $k + \alpha + \frac{1}{2} > 0$, но $\leqslant \frac{1}{2}$, то теорема 1 не дает исчерпывающей характеристики функций $f(z)$. Ее в этом случае дополняет

Теорема 2. Условие $\rho_2(n, f) \leqslant A_3/n^{\alpha-\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$, необходимо и достаточно для того, чтобы $f(z) \in L_2(-1, \alpha)$ в круге $|z| < 1$. В случае $\alpha = 1$ в теореме 1 интегральное условие Липшица заменяется интегральным условием Зигмунда. Обе теоремы распространяются на односвязную область D, ограниченную аналитической кривой C. Если $z = \psi(w)$ отображает однолистно и конформно круг $|w| < 1$ на область D плоскости z, то принадлежность функции $f(z)$ аналитической в D классу $L_p(k, \alpha)$ или $L_p(-1, \alpha)$ в этой области обозначает то, что $f[\psi(w)]$ принадлежит $L_p(k, \alpha)$, соответственно $L_p(-1, \alpha)$ в круге $|w| < 1$; двойной интеграл в (3) берется по области D.

С. Я. Альпер

7444. Приближение с помощью ограниченных аналитических функций: общие конфигурации. Уолш (Approximation by bounded analytic functions: general configurations. Walsh J. L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 2, 280—285 (англ.)

Доказывается теорема, которая представляет обобщение недавних результатов автора (РЖМат, 1959, 1400) в направлении свойств множеств, на которых происходит приближение.

Теорема. Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_\mu, C_1, C_2, \ldots, C_\nu$ представляет систему попарно непересекающихся жордановых аналитических кривых; обозначим через B сумму

всех B_j и через C сумму всех C_j. Пусть D — ограниченное открытое множество, граница которого состоит из всех линий C и из части (не обязательно собственной) линий B_j, так что при этом каждая связная компонента D ограничена непустой частью B_j и непустой частью C. Пусть C не разделяет D. Пусть E — замкнутое множество с границей B, точки которого не содержатся в D, E не обязательно является замыканием открытого множества. Множество $D+E$ предполагается связным. Пусть $u(z)$ будет гармоническая функция в D, непрерывная в замыкании D, равная 0 на B и 1 на C. Через Γ_σ, $0<\sigma<1$ обозначается геометрическое место точек, для которых $u(z)=\sigma$ в D, а через D_σ — множество с $0<u(z)<\sigma$ в D. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция во внутренних точках E, непрерывная на E, которая будет также аналитична в D_ρ, где Γ_ρ не имеет кратных точек. Таким образом $f(z)$ аналитична во внутренних точках $E+D_\rho$. Пусть $f(z)$ будет класса $L(p,\alpha)$ для $0<\alpha<1$ или Z_p для $\alpha=1$ на Γ_ρ (определение классов $L(p,\alpha)$ и Z_p, p — целое $\geqslant 0$ или <0 такое, как в цитированной работе автора). Тогда существуют функции $f_n(z)$, аналитические во внутренних точках $D+E$ и непрерывные на E, удовлетворяющие неравенствам $(n=0,1,2,\ldots)$

$$|f(z)-f_n(z)|\leqslant A_1 e^{-n\rho}/n^{p+\alpha},\ z \text{ на } E,$$

$$|f_n(z)|\leqslant A_2 e^{n(1-\rho)}/n^{p+\alpha},\quad z \text{ в } D+E,$$

где постоянные A_1 и A_2 не зависят от n и z.

Один из приведенных примеров множеств E и D состоит в следующем: $E: 2\leqslant|z|\leqslant 4$, $D: 1<|z|<2$ плюс $4<|z|<5$, $D_\rho: \rho_1<|z|<2$ плюс $4<|z|<\rho_2$, $1<\rho_1<2$, $4<\rho_2<5$. С. Я. Альпер

7445. О теоремах Мюнца и Саса. Крам (On the theorems of Müntz and Szász. Crum. M. M.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 4, 433—437 (англ.)

Вначале автор приводит доказательство хорошо известного результата об условиях полноты на вещественной полуоси множества конечных сумм $\sum c_n e^{-\lambda_n x}$, установленного впервые Сасом для пространства $L^2(0,\infty)$ (Szász O., Math. Ann., 1916, **77**, 482—4 6) и Мюнцем для пространства $C_0(0,\infty)$ непрерывных при $x\geqslant 0$ функций $f(x)$ с условием $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ (Müntz C. H., Schwarz's Festschrift, Berlin, 1914, 303—312). Необходимое и достаточное условие для полноты в указанных пространствах системы $\{e^{-\lambda_n x}\}$, где λ_n предполагаются различными действительными числами >0, имеет вид

$$\sum \frac{\lambda_n}{1+\lambda_n^2}=\infty. \qquad (1)$$

Одновременно показывается, что (1) будет являться необходимым и достаточным условием для полноты рассматриваемой системы в любом пространстве $L^p(0,\infty)$, $p\geqslant 1$. Далее автор переходит к изучению условий полноты в тех же самых пространствах системы $\{e^{-\lambda_n x}\}$ уже с комплексными λ_n (с $\operatorname{Re}\lambda_n>0$). Аналогом условия (1) для этого общего случая служит

$$\sum \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{1+|\lambda_n|^2}=\infty. \qquad (2)$$

Как указывает автор, изложенный метод доказательства для действительных λ_n, позволяет установить, что (2) является необходимым и достаточным условием для полноты в пространствах L^p, $p\geqslant 1$, или C_0 системы $\{e^{-\lambda_n x}\}$, если только на расположение λ_n накладывается дополнительное условие. Например, предполагается, что все λ_n лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda>\delta>0$ или в круге, касающемся прямой $\operatorname{Re}\lambda=0$. Если же последовательность $\{\lambda_n\}$ имеет бесконечно много предельных точек на прямой $\operatorname{Re}\lambda=0$, то в приведенной только что формуле результат не будет справедлив, ибо автор показывает, что в пространстве L^1 условие (2) может выполняться, а полноты не быть. Для общего случая расположения чисел $\{\lambda_n\}$ доказывается, что для полноты $\{e^{-\lambda_n x}\}$ в пространствах L^p, $1\leqslant p\leqslant 2$, необходимо, а в пространствах L^p, $p\geqslant 2$, C_0 достаточно выполнения условия (2). Г. Ц. Тумаркин

7446. Исправление и добавление к статье «О теоремах Мюнца и Саса». Крам (Corrigendum and addendum: On the theorems of Müntz and Szász. Crum M. M.), J. London Math. Soc., 1957, **32**, № 4, 512 (англ.)

Автор отмечает неточность в своей статье (реф. 7445), связанную с записью функционала в пространстве C_0, не повлиявшую, однако, на правильность последующих выводов. В дополнение к ранее установленным результатам показывается, что из выполнения условия (2) может не следовать полнота системы $\{e^{-\lambda_n x}\}$ не только в пространстве L^1, но и в L^p с $1<p<2$. Г. Ц. Тумаркин

7447. Целые функции и полнота. Редхеффер (Ganze Funktionen und Vollständigkeit. Redheffer R. M.), Anz. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1957, **94**, № 1-15. 96—99 (нем.)

Пусть $F(z)$ — целая функция с действительными нулями. Известно, что наличие у $F(z)$, наряду с положительными нулями, отрицательных нулей влияет на рост функции вдоль действительной оси, именно, рост понижается. Приводятся примеры функций, у которых достаточно нулей и в то же время рост вдоль оси достаточно мал. Например, пусть $\{\lambda_n\}$ — последовательность действительных чисел, $\Lambda(u)$ — числовая функция: $\Lambda(0)=0$, приращение $\Lambda(u)$ на любом интервале равно числу точек λ_n из этого интервала (для $u\leqslant 0$ очевидно $\Lambda(u)\leqslant 0$). Если при некотором $D>0$

$$-H_1(u)\leqslant \Lambda(u)-D(u)\leqslant H_2(u),$$

где $H_i(u)$ — непрерывные функции, $H_i(0)=0$, $H_i(-u)=H_i(u)$, для $u>0$ $H_i'\geqslant 0$, $\left(\frac{H_i}{u}\right)'\leqslant 0$, и если сходится интеграл (в смысле главного значения) $c=\sum\frac{1}{\lambda_n}=\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda(u)\frac{du}{u^2}$, то функция $F(x)=e^{-cx}\prod\left(1-\frac{x}{\lambda_n}\right)e^{\frac{x}{\lambda_n}}$ удовлетворяет при больших x неравенству

$$\ln|F(x)|\leqslant a\left(H_1\ln\frac{x}{H_1}+H_2\ln\frac{x}{H_2}\right)-R,$$

где $R=x\int_x^{\infty}[\Lambda(u)+\Lambda(-u)]\frac{du}{u^2}$ и $a>2$. При $a=1$ имеются функция и последовательность точек $x=x_j\to\infty$, для которых выполняется обратное неравенство.

Пусть $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ — последовательности действительных чисел, $\Lambda_1(u)$, $\Lambda_2(u)$ — их числовые функции. Утверждается, что если $|\Lambda_1(u)-\Lambda_2(u)|<H(u)$, где функция $H(u)$ того же типа, что $H_i(u)$, то при условии $\int_1^{\infty}H(u)\ln u\frac{du}{u^2}<\infty$ последовательности $\{e^{i\lambda_n x}\}$ и

$\{e^{i\mu_n x}\}$ имеют один и тот же интервал полноты (сходимость в смысле L^p). Доказательства отсутствуют.

А. Ф. Леонтьев

7448. О полноте системы аналитических функций $\{F(z^{\lambda_n})\}$. **Альпер С. Я.**, Уч. зап. Физ. матем. фак. Ростовск.-н/Д ун-т, 1959, 43, № 6, 7—12

С помощью известного признака полноты системы аналитических функций, в основе которого лежит теорема Фишера-Рисса, и некоторых теорем единственности доказываются три теоремы о полноте системы функций $\{F(z^{\lambda_n})\}$ при различных предположениях относительно функции $F(z)$ и последовательности чисел $\{\lambda_n\}$.

Теорема 1. Если $F(z)$ — аналитическая функция в круге $|z|<e^{\pi}$ и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — различные комплексные числа, удовлетворяющие условиям: $|\lambda_n|\leqslant 1$, $\operatorname{Re}\lambda_n \geqslant 0$, то система функции $\{F(z^{\lambda_n})\}$ будет полной в круге $|z|<1$ с разрезом от точки $z=0$ до единичной окружности вдоль отрицательной части действительной оси.

Во второй теореме устанавливается другое условие полноты такой же системы функций в разрезанном круге, а в третьей — в разрезанном кольце. И. Ф. Лохин

7449. Об энтропии одного класса аналитических функций. Бабенко К. И., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 2, 9—16

Пусть G — односвязная область комплексной плоскости и B_M — класс аналитических функций, регулярных внутри G и удовлетворяющих условию $\sup\limits_{z\in G}|f(z)|\leqslant M$. Пусть, кроме того, Γ — кривая Жордана, лежащая внутри G, и Q — область, границей которой является континуум Γ. Устанавливается, что в компакте B_M, где $\rho(f,g)=\max\limits_{z\in Q}|f(z)-g(z)|$, для ε-энтропии $H_\varepsilon=\log_2 N_\varepsilon$ (N_ε есть количество элементов минимальной ε-сети на B_M) при $\varepsilon\to 0$ имеет место асимптотическая оценка

$$H_\varepsilon=\frac{\log^2\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{R}{r}}+o\left(\log^2\frac{1}{\varepsilon}\right), \qquad (1)$$

где r и R — соответственно внутренний и наружный радиусы кольца, на которое однолистно отображается двухсвязная область $G-Q$.

Оценку порядка роста H_ε впервые получил А. Н. Колмогоров (РЖМат, 1957, 3281). В некоторых частных случаях асимптотическое равенство (1) ранее получил А. Г. Витушкин (РЖМат, 1958, 7605). А. Ф. Тиман

7450. Несколько замечаний о полноте последовательных производных аналитической функции. Казьмин Ю. А., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 3, 62—70

Рассматривается функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z|<R$, и доказываются необходимые и достаточные условия полноты системы $\left\{\frac{1}{n!}f^{(n)}(z)\right\}$ в пространстве A_r, (A_r — пространство функций, аналитических в круге $|z|<r$, $r<R$), заключающиеся в том, чтобы эта система была ω-линейно независима в $\left(|z|<R_1-r,\ \overline{A}_{\frac{1}{r}}\right)$, где: 1) $\overline{A}_{\frac{1}{r}}$ есть пространство последовательностей $\{x_n\}$, являющихся решением бесконечной системы линейных уравнений

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=l} f(\zeta)\left[\frac{n!}{1}\frac{x_0}{\zeta^{n+1}}+\frac{(n+1)!}{1!}\frac{x_1}{\zeta^{n+2}}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{(n+k)!}{k!}\frac{x_k}{\zeta^{n+k+1}}+\ldots\right]d\zeta=0,$$

$$n=0,1,\ldots,\ r<l<R$$

и удовлетворяющих условию $\overline{\lim}\sqrt[n]{|x_n|}<r$, 2) ω-линейная независимость функций $f_n(z)$ в G, $\mathfrak{A}$ обозначает, что из условия $\sum_0^\infty C_n f_n(z)\equiv 0$ равномерно в G и $C_n\in\mathfrak{A}$ следует, что $C_n\equiv 0$. Из этой теоремы и соответствующего результата Гончарова автор получает необходимые и достаточные условия полноты системы $\{f^{(n)}(z+\lambda_n)\}$. В качестве иллюстрации к теореме приводятся примеры плотно-полных систем, т. е. систем, остающихся полными после удаления любого конечного числа функций. В частности, показывается плотная полнота системы полиномов Эрмита $H_n(z)$. Э. З. Шувалова

7451. Об асимптотическом поведении многочленов с экстремальными свойствами и об их нулях. Фекете, Уолш (On the asymptotic behavior of polynomials with extremal properties, and of their zeros. Fekete M., Walsh J. L.), Итон леаналиса математит. J. analyse math., 1954, 1955, 4, № 1, 49—87 (англ.; рез. иврит., 4, № 2, 2—3)

Пусть E — бесконечное ограниченное замкнутое множество. Каждому многочлену

$$A_n(z)=z^n+a_1^{(n)}z^{n-1}+\ldots+a_n^{(n)} \qquad (1)$$

ставится в соответствие неотрицательное число $N[A_n(z),E]$ — его норма на множестве E. Эта норма называется монотонной, если для всякого многочлена $B_n(z)=z^n+b_1z^{n-1}+\ldots+b_n$, нижнего относительно многочлена $A_n(z)$, т. е. такого, что $|B_n(z)|<|A_n(z)|$ в тех точках E, где $A_n(z)\neq 0$, и $B_n(z)=0$ на E там, где $A_n(z)=0$, имеет место неравенство $N[B_n(z),E]<N[A_n(z),E]$. Норма называется непрерывной, если для каждого ε существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что неравенство $|A_n(z)-B_n(z)|<\delta(\varepsilon)$, $z\in E$, влечет за собой неравенство $|N[A_n(z),E]-N[B_n(z),E]|<\varepsilon$. Если $N[A_n(z),E]$ — монотонная и непрерывная норма, то в классе многочленов (1) существует по крайней мере один многочлен $A_n^*(z)$, наименее уклоняющийся от нуля на E в смысле указанной нормы. Если норма $N[A_n(z),E]$ только непрерывна, то среди многочленов вида (1), все нули которых лежат на E, существует многочлен $A_n^{**}(z)$, наименее уклоняющийся от нуля на E. При том же предположении непрерывности нормы в классе многочленов вида (1), все нули которых лежат на границе множества E, существует многочлен $A_n^{***}(z)$, который минимизирует рассматриваемую норму. Норма $N[A_n(z),E]$ называется квазичебышевской (кратко N^T-нормой), если она удовлетворяет условиям:

1) $\sup\limits_{A_n(z)}\{N[A_n(z),E]/\max\limits_{z\in E}|A_n(z)|\}=U(E)<+\infty$;

2) при данном $\varepsilon>0$ отношение, стоящее в левой части 1), имеет при $n\geqslant n_0(\varepsilon)$ такую положительную нижнюю грань $L_n(E,\varepsilon)$, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lim\limits_{n\to\infty}[L_n(E,\varepsilon)]^{1/n}=1$.

Пусть $h(r)$ — непрерывная на $0\leqslant r<\infty$, строго возрастающая функция, удовлетворяющая условиям $h(0)=0$, $h(1)=1$, $h(r_1\cdot r_2)\geqslant h(r_1)h(r_2)$. Пусть $w(z)>0$ на E. Нормы, определяемые равенствами

$$h\{N[A_n(z), E]\} = \max_{z\in E}\{w(z)\,h[\,|A_n(z)|\,]\},$$

$$h\{N[A_n(z), E]\} = \iint_E w(z)\,h[\,|A_n(z)|\,]\,d\sigma,$$

$$h\{N[A_n(z), E]\} = \int_B w(z)\,h[\,|A_n(z)|\,]\,|dz|,$$

где B — граница E, являются N^T-нормами. Если $N_1 = N_1[A_n(z), E]$, $N_2 = N_2[A_n(z), E]$ суть N^T-нормы, то их абстрактное среднее $N(N_1, N_2)$, удовлетворяющее неравенствам $\min(N_1, N_2) \leqslant N(N_1, N_2) \leqslant \max(N_1, N_2)$, также будет N^T-нормой. Пусть $N[A_n(z), E]$ есть N^T-норма, причем при каждом n существует многочлен $A_n^*(z)$, наименее уклоняющийся от нуля на E в смысле этой нормы. Положив

$$\nu_n = N[A_n^*(z), E],\ \mu_n = \max_{z\in E}|A_n^*(z)|,$$

имеем

$$\lim_{n\to\infty}\nu_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\mu_n^{1/n} = \tau(E), \qquad (2)$$

где $\tau(E)$ — трансфинитный диаметр множества E. Аналогичные результаты справедливы для $A_n^{**}(z)$ и $A_n^{***}(z)$. Если для некоторой последовательности многочленов (1)

$$\lim_{n\to\infty}\{N^T[A_n(z), E]\}^{1/n} = \tau(E), \qquad (3)$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\{\max_{z\in E}|A_n(z)|\}^{1/n} = \tau(E), \qquad (4)$$

причем и обратно, (4) влечет за собой (3).

Доказывается, что

$$\lim_{n\to\infty}|A_n^{**}(z)|^{1/n} = \lim_{n\to\infty}|A_n^{***}(z)| = |\varphi(z)|, \qquad (5)$$

где $w = \varphi(z)$ отображает внешность E на $|w| > \tau(E)$. Доказывается ряд теорем о распределении нулей экстремальных многочленов.

В. С. Виденский

7452. Асимптотическое поведение экстремальных многочленов с дополнительными ограничениями и об их нулях. Фекете, Уолш (Asymptotic behavior of restricted extremal polynomials and of their zeros. Fekete M., Walsh J. L.), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 2, 1037—1064 (англ.)

Пусть S — компактное множество точек плоскости z, $A_n(z)$ — многочлен вида $z^n + a_{1n}z^{n-1} + \ldots + a_{nn}$ и $N[A_n(z), S]$ — положительный функционал, названный авторами квазичебышевской нормой (реф. 7451) $A_n(z)$ в S, который является обобщением чебышевской нормы, $\max_{z\in S}|A_n(z)|$ для $A_n(z)$ в S. Обозначим через $A_n(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ семейство многочленов $A_n(z)$, для которых $a_{jn} = \gamma_j$, $j = 1, 2, \ldots, k < n$, где $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ — комплексные числа, которые могут зависеть от n, и через $A_n(z, N)$ — многочлен семейства $A_n(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ с наименьшей нормой $N[A_n(z), S]$. Работа посвящена изучению числовой последовательности $\nu_n = [N(A_n(z, N)), S]^{1/n}$, $n = 1, 2, \ldots$ и последовательности функций $\varphi_n(z) = |A_n(z, N)|^{1/n}$, $n = 1, 2, \ldots$, где $A_n(z, N) \in A_n(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ и числа $k, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ могут зависеть от n.

Известно, что если N — чебышевская норма и $A_n(z; N)$ — многочлен Чебышева для S, тогда последовательность $\{\nu_n\}$ сходится к трансфинитному диаметру $\tau(S)$ множества S. С другой стороны, если $\tau(S) > 0$, тогда последовательность $\{\varphi_n(z)\}$ сходится вне S в $e^{G(z)}\tau(S)$, где $G(z)$ — функция Грина дополнительной к S области D, содержащей бесконечно удаленную точку. Авторы обобщают этот результат для случая, в котором N является некоторой квазичебышевской нормой и параметры $\gamma_1 = \gamma_1(n)$, $\gamma_2 = \gamma_2(n), \ldots, \gamma_k = \gamma_k(n)$ удовлетворяют весьма общим условиям и доказывают несколько интересных предложений, касающихся распределения нулей многочленов $p_n(z) = z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n$, для которых $\overline{\lim_{n\to\infty}} M_n^{1/n} \leqslant \tau(S)$, где $M_n = \max_{z\in S}|p_n(z)|$.

F. Leja

7453. Об асимптотическом поведении ортогональных последовательностей полиномов. Фрей Т., Матем. сб., 1959, 49, № 2, 133—180

Пусть $f(t)$, $g(t)$ — неотрицательные на отрезке $[0, 2\pi]$ функции, причем f, g, $\ln f$, $\ln g \in L_{2\pi}$, и пусть $\{F_n(z)\}$, $\{G_n(z)\}$ — последовательности полиномов, ортогональных на окружности $|z| = 1$ относительно весов $f(t)$ и $g(t)$. Пусть в некоторой точке $z_0 = e^{it_0}$ существует асимптотическое представление для полиномов $\{F_n(e^{it_0})\}$, а на всем отрезке $[0, 2\pi]$ вся последовательность $\{|\sqrt{f(t)}\times F_n(e^{it})|\}$ равномерно ограничена; полагая $k(t) = \dfrac{g(t)}{f(t)}$, автор подчиняет функцию $k(t)$ некоторым условиям, достаточным для того, чтобы и для полиномов $\{G_n(e^{it_0})\}$ имело место асимптотическое представление.

В качестве примера приведем условия теоремы 6.1: $0 < k_1 \leqslant k(t) \leqslant k_2$, $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$, $|k(t) - k(t_0)| \leqslant C|t - t_0| \cdot q(|t - t_0|)$, $-\pi \leqslant t - t_0 \leqslant \pi$, где $q(\tau)$ — монотонно возрастающая, а $\dfrac{q(\tau)}{\tau}$ — монотонно убывающая функция τ при $\tau > 0$, причем $\int_0^{2\pi}\dfrac{q(\tau)}{\tau}\,d\tau < \infty$.

Автор доказывает ряд теорем сперва при жестких глобальных условиях, а затем значительно улучшает результаты при помощи теорем сравнения, являющихся обобщением известной теоремы Короуса. В конце работы приведены условия, достаточные для справедливости асимптотической формулы в данной точке.

Я. Л. Геронимус

7454. Аппроксимация некоторых функций посредством экспоненциальных сумм на полуоси. Косис (Approximation of certain functions by exponentials on a half line. Koosis Paul), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 3, 428—435 (англ.)

Рассматриваются функции, определенные на полуоси $[0, +\infty)$ и периодические в среднем (по поводу функций, определенных на всей оси и периодических в среднем, см. диссертацию Кагана, РЖМат, 1958, 2015). Пусть $f(x)$ непрерывна на $[0, +\infty)$ (в целях дальнейшего доопределим $f(x)$ на $[-\infty, 0)$, положив ее там равной нулю). По определению она будет периодической в среднем на $[0, +\infty)$, если не каждую непрерывную на $[0, \infty)$ функцию $\varphi(x)$ можно на любом конечном интервале из $[0, \infty)$ приблизить равномерно с любой точностью конечными линейными комбинациями функций системы $\{f(x + h)\}$, где $h \geqslant 0$, или, что то же самое, если найдется такой интервал на $(-\infty, 0]$ и на нем мера $m(-x)$, что

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,dm(y)=0 \text{ на } [0,\infty).$$

Функция $g(x)$ отлична от нуля только на некотором конечном интервале. Введем преобразования Фурье

$$M(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\,dm(x),\quad G(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}g(x)\,dx$$

(это целые функции экспоненциального типа). Отношение $F(\lambda)=G(\lambda)/M(\lambda)$ называется преобразованием Фурье функции $f(x)$ (периодической в среднем). Пусть E_f — класс функций, непрерывных на $[0,\infty)$, которые (в указанном выше смысле) могут быть аппроксимированы посредством системы $\{f(x+h)\}$, $h\geqslant 0$. Как и в упомянутой выше работе Кагана, доказывается, что функция $x^n e^{-i\alpha x}$, $x\geqslant 0$, принадлежит E_f тогда и только тогда, когда точка $\lambda=a$ является полюсом порядка $\geqslant n+1$ для функции $F(\lambda)$. Обозначим X_f систему функций вида $x^n e^{-i\alpha x}$, принадлежащих E_f. Ставится вопрос о том, для каких $h\geqslant 0$ функции $f(x+h)$ могут быть аппроксимированы линейными комбинациями функций из X_f. Нижнюю грань чисел h, для некоторых такая аппроксимация возможна, обозначим через A_f. Обозначим далее через L_f нижнюю грань чисел L, обладающих свойством: найдется мера m с носителем на $[-L,0]$, удовлетворяющая условию (1). Основной результат состоит в том, что $0\leqslant A_f\leqslant L_f$. Как следствие отсюда получается, что если система X_f пустая, то $f(x)=0$ при $x>L_f$. В заключение приводятся примеры, когда $A_f=0$ и $A_f=L_f>0$. А. Ф. Леонтьев

7455. О функциях, периодических в среднем на полуоси. Косис (On functions which are mean periodic on a half-line. Koosis Paul), Communs Pure and Appl. Math., 1957, **10**, 133—149 (англ.)

Пусть имеется некоторый класс функций, определенных на полуоси $[0,\infty)$, и задана метрика, определенный вид сходимости. Будем говорить, что функция $f(x)$ из этого класса является периодической в среднем на $[0,\infty)$, если система $\{f(x+h)\}$, где $h\geqslant 0$, не полна в принятой метрике в рассматриваемом классе. В § 1 рассматриваются функции, периодические в среднем, когда под сходимостью понимается равномерная сходимость на любом конечном интервале из $[0,\infty)$. Здесь излагаются те же результаты, но несколько более подробно, что и в предыдущей статье автора (реф. 7454). В § 2 рассматриваются функции, периодические в среднем, когда под сходимостью понимается сходимость в смысле L_2; относительно этих функций ставятся задачи, аналогичные задачам из § 1. Точнее, речь идет о следующем. Обозначим через $L_{2,\varepsilon}$ ($\varepsilon>0$) пространство определенных на $[0,\infty)$ функций $f(x)$ таких, что $\|f\|_\varepsilon^2=\int_0^\infty |f(x)|^2 e^{-\varepsilon x}\,dx<\infty$, и положим $(f,g)_\varepsilon=\int_0^\infty f(x)\,g(x)\,e^{-\varepsilon x}\,dx$. При $\varepsilon=0$ знак ε опускаем, так что, например, $L_{2,0}=L_2$. Для $T\subseteq L_2$ обозначим через T^ε замыкание T в $L_{2,\varepsilon}$ в смысле $\|\ \|_\varepsilon$ и $T^B=\bigcap_{\varepsilon>0} T^\varepsilon\cap L_2$. Для $f\in L_2$ пусть S_f — совокупность конечных линейных комбинаций функций $f(x+h)$, где $h\geqslant 0$. Используя введенные обозначения, полагаем $E_f=S_f^B$. Функция $f\in L_2$ называется периодической в среднем (B) (в топологии Бейрлинга), если E_f — собственная часть L_2. Для того чтобы $f\in L_2$ была периодической в среднем (B), необходимо и достаточно, чтобы существовала функция (не нуль) $k\in L_{2,\varepsilon}$ (для некоторого $\varepsilon>0$) такая, что

$$g(t)=\int_0^\infty f(x+t)\,k(x)\,e^{-\varepsilon x}dx=(f(x+t),k)_\varepsilon=0$$

для $t\geqslant 0$. (1)

Для $\varepsilon>0$ пусть B_f^ε — верхняя грань чисел $b\geqslant 0$, для которых из условий $g\in L_{2,\varepsilon}$, $(f(x+h),g)_\varepsilon=0$ при $h\geqslant 0$ вытекает, что $g(x)=0$ почти всюду на $[0,b]$. Пусть $B_f=\inf_{\varepsilon>0} B_f^\varepsilon$. Для функций, периодических в среднем, и только для них $B_f<\infty$. Допустим, что $f(x)$ — периодическая в среднем и для нее имеет место (1). Доопределив функции $f(x)$ и $k(x)$ на $(-\infty,0)$, положив их здесь равными нулю, определим функцию $g(t)$ по формуле (1) для отрицательных t и затем положим

$$G(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}g(x)\,dx,\quad K(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}k(x)e^{-\varepsilon x}dx,$$

$$F(\lambda)=\frac{G(\lambda)}{K(\lambda)}.$$

Функция $F(\lambda)$ называется преобразованием Фурье функции $f(x)$. Оказывается, что функция $x^n e^{-i\alpha x}$ принадлежит E_f тогда и только тогда, когда точка $\lambda=a$ является полюсом порядка $\geqslant n+1$. Совокупность конечных линейных комбинаций функций $x^n e^{-i\alpha x}$, принадлежащих E_f, обозначим через Y_f и положим $\Lambda_f=Y_f^B$. Обозначим далее через A_f нижнюю грань чисел $h\geqslant 0$ таких, что $f(x+h)\in\Lambda_f$. Основная теорема состоит в том, что для функции $f(x)$, периодической в среднем (B), имеем $A_f=B_f$. Отсюда следует, что если у $F(\lambda)$ нет полюсов, то $f(x)=0$ для достаточно больших x. Бейрлинг (Beurling, Math. scand., 1953, **1**, 127—130) показал, что если $f(x)$ не равна нулю для всех достаточно больших x, то у $F(\lambda)$ есть полюсы. А. Ф. Леонтьев

7456. О многочленах ортогональных по площади. Суетин П. К., Докл. АН СССР, 1959, **126**, № 5, 943—945

Рассматривается система полиномов $\{K_n(z)\}$ ортонормальных с весом $n(z)$ по площади области G, ограниченной спрямляемой жордановой кривой Γ. Пусть $n(z)=|\gamma(z)|^2$, где $\gamma(z)$ — аналитическая функция в области G, отличная от нуля в замкнутой области $\bar{G}$, $\gamma^{(p)}(z)$ непрерывна в $\bar{G}$ и удовлетворяет условию Липшица с показателем α. Если производная порядка $p+2$ от функции, отображающей область G на круг $|w|<1$ непрерывна в $\bar{G}$, то доказывается, что для всякого замкнутого множества F из области G существует такая постоянная $C(F)$, что для всех n и всех $z\in F$ выполняется неравенство $|K_n(z)|\leqslant\frac{C(F)}{n^{p+\alpha}}$. Если Γ — аналитическая кривая и $\gamma(z)$ — аналитическая функция в замкнутой области $\bar{G}$, то для всех n и всех $z\in F$ $|K_n(z)|\leqslant C_1(F)\,q^n$, $0<q<1$. Имеются опечатки. С. Я. Альпер

7457. Об одном свойстве одного класса интегралов Стилтьеса. Давыдов Н. А., Матем. об., 1959, **48**, № 4, 429—446

Пусть $\alpha(t)$ — неубывающая функция, определенная на положительной полуоси, $\alpha(0)=0$, $\lim_{t\to+\infty}\alpha(t)=+\infty$, $A(t)$ — комплекснозначная функция, непрерывная в $[0,+\infty)$,

$$A^{(p)}(x)=\frac{1}{(p-1)!}\int_0^x (x-t)^{p-1}A(t)\,d\alpha(t),$$

$(p=1,2,3,\ldots)$

$$B^{(p)}(x)=\frac{1}{(p-1)!}\int_0^x (x-t)^{p-1}\,d\alpha(t),$$

$$\sigma^{*(p)}(x)=\frac{A^{(p)}(x)}{B^{(p)}(x)}.$$

Пусть далее $\overline{G}$ — отличное от всей комплексной плоскости выпуклое множество, а $\overline{G}_\varepsilon$ — замкнутая выпуклая область, содержащая $\overline{G}$, и каждая точка границы которой отстоит от $\overline{G}$ на расстояние, меньшее или равное ε.

По определению $\overline{G}$ является $(\alpha(t); p)$-множеством функции $A(t)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует последовательность отрезков $[\alpha_k, \beta_k]$, $(k=1, 2, 3,\ldots)$; $\beta_k<\alpha_{k+1}$, $\lim \alpha_k=+\infty$, таких, что $A(x)\in\overline{G}_\varepsilon$ при $\alpha_k\leqslant x\leqslant\beta_k$, $(k=1, 2, 3,\ldots)$ и

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{B^{(p)}(\beta_k)}{Q^{(p)}(\alpha_k; h_k)}<+\infty,$$

где

$$h_k=\frac{\beta_k-\alpha_k}{p},\quad Q^{(p)}(\alpha_k;h_k)=\sum_{\nu=0}^{p}(-1)^{p-\nu}\binom{p}{\nu}B^{(p)}(\alpha_k+\nu h_k).$$

Основным результатом работы является следующая теорема:

Если $\lim\limits_{x\to+\infty}\sigma^{*(p)}(x)=S$ и если множество $\overline{G}$ является $(\alpha(t); p)$-множеством функции $A(t)$, то $S\in\overline{G}$. Если можно указать последовательность отрезков $[\alpha_k, \beta_k]$ $(k=1, 2, 3,\ldots)$; $\beta_k<\alpha_{k+2}$, $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k=\infty$, и последовательность замкнутых выпуклых множеств $\overline{G}_k$, $(k=1, 2, 3,\ldots)$, стягивающихся к бесконечно удаленной точке, такие, что $A(x)\in\overline{G}_k$ при $\alpha_k\leqslant x\leqslant\beta_k$, и

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{B^{(p)}(\beta_k)}{Q^{(p)}(\alpha_k; h_k)}<+\infty,$$

то $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}\,|\sigma^{*(p)}(x)|=+\infty$.

В качестве следствий отсюда автор получает ряд предложений о суммировании рядов и интегралов методом Чезаро.

А. Ф. Тиман

7458. Добавление к докладу *TW*33. Асимптотическое разложение некоторых коэффициентов Фурье. Лекеркеркер, Левелт (Supplement to rapport TW 33. Asymptotic expansion of a certain Fourier coefficient. Lekkerkerker C. G., Levelt A. H. M.), Rapp. Math. centrum, 1957, № ZW-012, 1—12 (англ.)

Рассматриваются функции $f(x)$, которые на интервале $(0, \pi)$ являются суммами рядов вида

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx+\mu\pi),$$

где $\mu\neq 0$ и $|\operatorname{Re}\mu|<\frac{1}{2}$. В предположении, что функция $\varphi(t)=f(\arccos t)$ имеет заданное число производных на $[-1, 1]$, устанавливается асимптотическая формула для коэффициентов b_n при $n\to\infty$.

А. Ф. Тиман

7459. О применении некоторых интегро-дифференциальных операторов. Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б., Докл. АН СССР, 1958, 121, № 2, 210—213

Сперва вводятся операторы $L^{(\mu_k)}$ и с помощью их формулируются условия разложимости функции $F(\sigma)$ в ряд Дирихле с показателями μ_k. Пусть $\mu_0=0$, $\mu_k\uparrow\infty$, $\mu_{k+1}-\mu_k\leqslant 1$. Положим $\alpha_k=1-(\mu_k-\mu_{k-1})$. По определению

$$L^{(\mu_0)}F(\sigma)=F(\sigma),\quad L^{(\mu_k)}F(\sigma)=-\frac{d_e^{-\alpha_k}}{d_e\sigma^{-\alpha_k}}\left\{\sigma\frac{d}{d\sigma}L^{(\mu_{k-1})}F(\sigma)\right\},$$

где

$$\frac{d_e^{-\alpha}}{d_e\sigma^{-\alpha}}\varphi(\sigma)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^{+\infty}(e^{-\sigma}-e^{-u})^{\alpha-1}e^{-u}\varphi(u)\,du.$$

Будем говорить, что $F(\sigma)\in L(\mu_n, \sigma_0)$, если существуют и непрерывны на $(\sigma_0, +\infty)$ все функции $L^{(\mu_k)}F(\sigma)$, имеются конечные пределы $L^{(\mu_k)}F(+\infty)=\lim\limits_{\sigma\to\infty}L^{(\mu_k)}F(\sigma)$, непрерывны и абсолютно интегрируемы на $(\sigma_1, +\infty)$, где $\sigma_1>\sigma_0$ — любое, все функции $e^{\sigma}\frac{d}{d\sigma}L^{(\mu_k)}F(\sigma)$.

В теореме 1 утверждается, что если $F(\sigma)\in L(\mu_n, \sigma_0)$, то при любом $n\geqslant 0$ и $\sigma\in(\sigma_0, +\infty)$ имеет место формула

$$F(\sigma)=\sum_{k=0}^{n}\frac{L^{(\mu_k)}F(+\infty)}{\Gamma(1+\mu_k)}e^{-\mu_k\sigma}+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\mu_{n+1})}\int_\sigma^{+\infty}(e^{-\sigma}-e^{-u})^{\mu_{n+1}-1}e^{-u}L^{(\mu_{n+1})}F(u)\,du. \quad (1)$$

Указаны условия, при которых остаток в формуле (1) стремится к нулю и, следовательно, $F(\sigma)$ разлагается в ряд Дирихле. Например, если $\sup\limits_{(\sigma_0,+\infty)}|L^{(\mu_k)}F(\sigma)|\leqslant$ $\leqslant Me^{-\sigma_0\mu_k}\Gamma(1+\mu_k)$, то $F(\sigma)$ различается в ряд Дирихле. Затем вводятся операторы $D^{(k)}$, с их помощью определяется квазианалитический класс функций в обобщенном смысле $C_{m_n}(\alpha_k)$ и указываются условия принадлежности функции к этому классу. Пусть $\{\alpha_n\}$, $0<\alpha_k<1$,—заданная последовательность чисел и $f(x)$ — функция, непрерывная на $[0, +\infty)$. Полагаем

$$D^0f(x)=\frac{d^{-\alpha_0}}{dx^{-\alpha_0}}f(x),\quad D^{(k)}f(x)=\frac{d^{-\alpha_k}}{dx^{-\alpha_k}}\frac{d}{dx}D^{(k-1)}f(x),$$

где

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt.$$

Пусть $\{m_n\}$ — некоторая последовательность положительных чисел. Относим к классу $C_{m_n}(\alpha_k)$ те функции $f(x)$, для которых: 1) все $D^kf(x)$ непрерывны на $[0, +\infty)$; 2) все $\frac{d}{dx}D^{(k)}f(x)$ непрерывны на $(0, +\infty)$ и абсолютно интегрируемы на любом отрезке $[0, \delta]$, $\delta>0$; 3) $|D^{(k)}f(x)|\leqslant AB^{\sum_1^k(1-\alpha_i)}m_ke^{Cx}$, $0\leqslant x<\infty$, где A, B, C — постоянные, зависящие от $f(x)$; 4) $e^{-Cx}\left|\frac{d}{dx}D^{(k)}f(x)\right|\in L_1(0, +\infty)$.

Скажем, что $C_{m_n}(\alpha_k)$ есть квазианалитический класс в обобщенном смысле, если для его любых двух функций

$f_1(x)$ и $f_2(x)$ из равенств $D^{(k)}f_1(0) = D^{(k)}f_2(0)$ следует $f_1(x) \equiv f_2(x)$. Утверждается, что для квазианалитичности $C_{m_n}(\alpha_k)$ необходимо и достаточно, чтобы было $\int_1^{+\infty} \frac{\ln T_\alpha(r)}{r^2}\,dr = +\infty$, где $T_\alpha(r) = \sup_{n>1} \frac{r^{\sum_1^n (1-\alpha_k)}}{m_n}$.

Наконец, вводятся операторы

$$R^0 f(x) = W^{\alpha_0} f(x),\quad R^{(k)} f(x) = W^{\alpha_k} \frac{d}{dx} R^{(k-1)} f(x),$$

где $W^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt$, и с их помощью формулируется, при каких условиях из оценок сверху для $|R^{(k)} f(x)|$ и $\left|\frac{d}{dx} R^{(k)} f(x)\right|$ следует, что $f(x) \equiv 0$.

А. Ф. Леонтьев

7460. Некоторые методы и результаты теории однолистных функций. Куфарев П. П., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. Т. 3. М., АН СССР, 1958, 189—198

Доклад автора на III Всесоюзном съезде математиков. Дается краткий обзор задач, рассматриваемых в теории однолистных функций и краткая характеристика некоторых основных методов этой теории, а именно: метода параметрического представления, вариационно-геометрического метода М. А. Лаврентьева, вариационного метода Г. М. Голузина, метода интегральных средних, метода контурного интегрирования, метода интегральных представлений и метода мажорант. Приводятся некоторые основные результаты, полученные с помощью этих методов. Кратко характеризуются результаты автора в направлении развития метода параметрического представления. Отмечается, что метод М. А. Лаврентьева применим к исследованию не только внутренних, но и граничных экстремальных задач, а также к решению прикладных задач и что имеется некоторая связь между этим методом и вариационным методом Г. М. Голузина. Кратко характеризуются результаты автора в направлении объединения вариационного метода Г. М. Голузина и метода параметрического представления. В заключение обзора автор указывает, что хотя в исследовании задач теории однолистных функций достигнуты значительные успехи, но многие простые по постановке проблемы еще не решены и что одной из задач дальнейшего развития этой теории является расширение ее связей с проблемами прикладных наук.

Ю. Е. Аленицын

7461. Приближенное вычисление сингулярных интегралов. Иванов В. В., Научн. тр. Новочерк. политехн. ин-т, 1958, 67 (81), 75—86

Исследуется два способа приближенного вычисления сингулярных интегралов. В первом применяется разложение интеграла по гладкой замкнутой дуге L,

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-t_0}, \qquad (1)$$

рассматриваемого как функция точки $t_0 \in L$, в равномерно сходящийся ряд по полиномам Фабера, соответствующим континууму L. Коэффициенты ряда выражаются в виде интегралов по кривой L, содержащих функции $f(t)$ и $\Phi(t)$, где $W = \Phi(z)$ — функция, дающая конформное отображение односвязной области D^-, содержащей бесконечно удаленную точку и имеющей границей линию L, на круг $|w| > \rho$, $\lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} = 1$. (Полиномы Фабера также, как известно, определяются через $\Phi(z)$). В теоремах 1.1 и 2.1 предполагается, что производная порядка p $f^{(p)}(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера, $f^{(p)}(t) \in H(\lambda)$, $0 < \lambda < 1$, и устанавливается, что n-й остаток упомянутого ряда не превосходит $\frac{\text{const}}{n^{p+\lambda-\varepsilon}}$, где $\varepsilon > 0$ произвольно мало (в теореме 1.1 $p = 0$, т. е. сама функция $f(t) \in H(\lambda)$). Явное выражение для const в этой оценке отсутствует. Далее рассматриваются интегралы по гладкой дуге L с концами a и b.

$$\frac{1}{\pi i}\int_{ab} \frac{f(t)\,dt}{(t-c)^\gamma (t-t_0)},\quad \gamma = \alpha + i\beta,\ \alpha < 1,\quad c = a \text{ или } c = b. \qquad (2)$$

С помощью полиномов Фабера даются разложения этого интеграла в ряды более сложного вида. Отмечается, что практический интерес имеют частные случаи доказанных теорем (L — окружности; ab — отрезок вещественной оси, и тогда полиномы Фабера совпадают с многочленами Чебышева, наименее уклоняющимися от нуля). Второй способ приближенного вычисления состоит в следующем: дуга L разбивается некоторым специальным образом на n частичных дуг; интеграл (1) преобразуется с целью выделения особенности (в результате в числителе подынтегрального выражения будет стоять $f(t) - f(t_0)$ вместо $f(t)$) и приближенно заменяется интегральной суммой (как в квадратурной формуле прямоугольников), в которой опущены члены, соответствующие частичным дугам, соседним с точкой t_0. Погрешность — в предположении, что $f(t) \in H(\lambda)$ — не превосходит $8H_f\left(\ln n + \frac{1}{\lambda}\right) M \left(\frac{L}{n}\right)^\lambda$, где H_f — постоянная Гёльдера, L — длина контура, постоянная M также определяется видом контура. В случае, когда $f^{(p)}(t) \in H(\lambda)$, предлагается другая формула, более точная и более сложная (используются значения в точках деления производных до порядка p функции $f(t)$).

Наконец, интеграл вида (2) заменой переменной приводится к случаю, когда ab есть отрезок вещественной оси $(-1, +1)$. Исследуется (в предположении, что $f(x) \in H(\lambda)$) аналогичная квадратурная формула, погрешность которой, естественно, увеличивается, когда x_0 приближается к концу промежутка C ($C = -1$ или $C = +1$). Отмечается, что полученные в работе формулы позволяют провести численное решение краевой задачи Римана, а также некоторых обратных краевых задач.

Имеются опечатки: на стр. 77 (строка 2 сверху) неточное разложение в ряд, на стр. 82 в определении функции $Q_p(t, t_0)$ пропущен множитель $t - t_0$ в одном из членов, на стр. 83, строка 4 сверху, пропущен множитель H_f.

Б. А. Вертгейм

7462. Об одной гипотезе относительно однолистных функций. Эпстейн, Шёнберг (On a conjecture concerning schlicht functions. Epstein Bernard, Schoenberg I. J.), Bull. Amer. Math. Soc., 1959, 65, № 4, 273—275 (англ.)

Мандельбройт и Шиффер высказали следующую гипотезу, приведенную в недавней работе Пойа и Шёнберга (РЖМат, 1959, 10999): если степенные ряды $\sum_{\nu=1}^\infty a_\nu z^\nu$, $\sum_{\nu=1}^\infty b_\nu z^\nu$ однолистны в единичном круге, то и степенной ряд $\sum_{\nu=1}^\infty \frac{a_\nu b_\nu}{\nu} z^\nu$ однолистен в единичном круге. Опираясь на недавно полученные (цит.) результаты для средних Валле-Пуссена и на хорошо известные интегральные представления Лёвнера для

коэффициентов a_2 и a_3 в классе однолистных функций, авторы весьма просто показывают, что указанная гипотеза неверна. Ю. Е. Аленицын

7463. О некоторых классах однолистных функций, введенных П. Монтелем и В. Рогозинским. Левандовский (Sur certaines classes de fonctions univalentes introduites par P. Montel et W. Rogosinski. Lewandowski Z.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1959, 7, № 5, 261—265 (франц.; рез. русск.)

Рассматриваются классы голоморфных и однолистных в $|z|<1$ функций, нормированные следующим образом: 1) если $f(z)\in S$ то $f(0)=0$, $f'(0)=1$; 2) если $f(z)\in S_0$, то $f(0)=0$, $f(z_0)=z_0$; 3) если $f(z)\in S_p$ $(p=1,2,\ldots)$, то $f(0)=0$, $f^{(p)}(z_0)=1$, где z_0 — фиксированное для данного класса число такое, что $|z_0|<1$, S^*, S_0^*, S_p^* $(p=1,2,\ldots)$ — подклассы соответственно классов S, S_0, S_p, состоящие из функций, отображающих круг $|z|<1$ на области, звездообразные относительно начала координат. Приводятся семь теорем, доказательство которых основывается на простой связи классов S_0 и S_p с классом S. Например,

Теорема 2. Образ круга $|z|<1$, полученный при помощи любой функции $f(z)\in S_1$, покрывает круг $|z|<\frac{1}{4}\frac{(1-|z_0|)^3}{1+|z_0|}$.

Теорема 3. Если любая функция $f(z)\in S$, $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ удовлетворяет гипотезе Бибербаха: $|a_n|\leqslant n$, $n=1,2,\ldots,p$, то образ круга $|z|<1$, полученный при помощи произвольной функции класса S_p, покрывает круг $|z|<\frac{1}{4}\frac{(1-|z_0|)^{p+2}}{p!(p+|z_0|)}$. Во всех этих теоремах приводятся экстремальные функции. Без доказательства приводится следующая

Теорема 4. Множество значений функционала $\sqrt{\frac{z}{\varphi(z)}}$ при фиксированном z, $|z|<1$, в классе S_0^* есть замкнутый круг

$$\left|\sqrt{\frac{z}{\varphi(z)}}-\frac{1-z\bar{z}_0}{1-|z_0|^2}\right|\leqslant\frac{|z-z_0|}{1-|z_0|^2}.$$

С помощью теоремы 4 легко выводятся точные оценки для $\varphi(z)\in S_0^*$:

$$|z|\left(\frac{1-|z_0|^2}{|z-z_0|+|1-z\bar{z}_0|}\right)^2\leqslant|\varphi(z)|\leqslant$$
$$\leqslant|z|\left(\frac{|z-z_0|+|1-z_0\bar{z}|}{1-|z|^2}\right)^2.$$

В. А. Рейнер

7464. Об однолистных функциях. I. Какэхаси (On schlicht functions. I. Kakehashi Tetsujiro), Proc. Japan Acad., 1959, 35, № 3, 134—136 (англ.)

Рассматриваются однолистные и аналитические в $|z|<1$ функции вида

$$F_k(z)=\left[\ldots\left\{\left[\left\{\left(\frac{1+z}{1-z}+i\lambda_1\right)^2+\mu_1\right\}^{1/2}+i\lambda_2\right]^2+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\mu_{k-1}\right\}^{1/2}+i\lambda_k\Big]^2$$

($\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ — вещественные; $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{k-1}$ — положительные числа).

Положим

$$F_k(z)=A_0^{(k)}+A_1^{(k)}z+A_2^{(k)}z^2+\ldots+A_n^{(k)}z^n+\ldots$$

Доказываются две теоремы о коэффициентах Маклорена для таких функций.

Теорема 1. Для любого множества вещественных чисел $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ и любого множества положительных чисел $\mu_1,\mu_2,\ldots$ и для любых $k=0,1,2,\ldots$ мы имеем $|A_1^{(k)}|\geqslant 4$. Знак равенства имеет место только для $k=0$.

Теорема 2. Для любого положительного целого k мы имеем следующее асимптотическое отношение:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n^{(k)}}{nA_1^{(k)}}=\varkappa,\quad|\varkappa|<1.$$

Эта теорема означает, что для достаточно больших n мы имеем

$$\begin{cases}\left|A_n^{(k)}/A_1^{(k)}\right|<n, & k\neq 0,\\ A_n^{(0)}/A_1^{(0)}=n.\end{cases}$$

Я. С. Фельдман

7465. Об оценке среднего модуля в классе ограниченных однолистных функций. Базилевич И. Е., Матем. сб., 1959, 48, № 1, 93—104

Пусть S — класс функций $w=f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}c_kz^k$, регулярных и однолистных в круге $|z|<1$; S_M $(M>1)$ — класс функций $f(z)\in S$ таких, что $|f(z)|<M$ в $|z|<1$. В работе доказана теорема: для каждой функции $f(z)\in S_M$, $M>4$, мера $l(r,x,M)$ $(r>0{,}5;$ $x\geqslant 8r)$ пересечения окружности $|w|=x$ с образом $D(r)$ круга $|z|\leqslant r<1$ не превосходит меры $l^*(r,x,M)$ пересечения той же окружности с образом $D^*(r)$ круга $|z|<1$ при отображении функцией $w=f^*(z)\in S_M$, отображающей круг $|z|<1$ на круг $|w|<M$, из которого удален некоторый радиальный отрезок (соединяющий точку $w=M$ с точкой $w=2M-1-2\sqrt{M^2-M}$). Из этой теоремы автор получает ряд следствий. Для функций класса S аналогичная теорема доказана автором ранее (Матем. сб. 1951, 28 (70), 147—164).

Н. А. Лебедев

7466. О радиальном порядке однолистной функции. Флетт (On the radial order of a univalent function. Flett T. M.), J. Math. Soc. Japan, 1959, 11, № 1, 1—3 (англ.)

В недавней заметке (РЖМат, 1957, 7844) Геринг дал новое доказательство следующей теоремы, установленной Данжуа (Denjoy A., C. r. Acad. sci. Paris, 1941, 212, 1071—1073), а также Сейделем и Уолшем (Seidel W., Walsh J. L., Trans. Amer. Math. Soc., 1942, 52, 128—216):

Пусть $f(z)$ регулярна и однолистна в $|z|<1$. Тогда для почти всех θ имеем: $f'(z)=o((1-|z|)^{-1/2})$ равномерно, когда $z\to e^{i\theta}$, оставаясь внутри угла с вершиной в $e^{i\theta}$, стороны которого не касаются $|z|=1$. Доказательство Геринга хотя и является очень кратким, но оно использует так называемую максимальную теорему Харди и Литлвуда (см., например, Зигмунд, Тригонометрические ряды, М.-Л, 1939, стр. 247), которая сама по себе является весьма трудной теоремой. В связи с этим автор предлагает новое доказательство цитированной теоремы Данжуа, Сейделя и Уолша, использующее методы теории суммирования рядов. Подобным же приемом, как указывает автор, может быть доказана следующая теорема Дюфренуа (Dufresnoy J., C. r. Acad. sci. Paris. 1941, 213, 393—395):

Пусть $f(z)$ регулярна в $|z|<1$ и

$$\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}(1-\rho)^{k-kr-1}|f'(\rho e^{i\theta})|\,k\,d\rho\,d\theta<\infty,$$

где $k \geqslant 1$ и $0 < r < 1$. Тогда для почти всех θ $f'(z) = o((1-|z|)^{r-1})$ равномерно при том же характере стремления z к $e^{i\theta}$, что и ранее. Г. Ц. Тумаркин

7467. О некоторых однолистных отображениях. Сакагути (On a certain univalent mapping. Sakaguchi Koichi), J. Math. Soc. Japan, 1959, **11**, № 1, 72—75 (англ.)

Автор вводит класс „звездных относительно симметричных точек" регулярных в круге $|z| < 1$ функций $f(z)$ таких, что для каждого $r < 1$ и достаточно близкого к единице и любого ζ, $|\zeta| = r$, имеет место неравенство $\operatorname{Re} \dfrac{zf'(z)}{f(z) - f(-\zeta)} > 0$, $z = \zeta$, $|\zeta| = r$. Этот класс включает в себя выпуклые и нечетные звездные функции и сам является подклассом почти выпуклых функций. На основании остроумных элементарных соображений доказывается теорема:

Пусть $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ регулярна в $|z| < 1$.

Необходимым и достаточным условием однолистности $f(z)$ и принадлежности классу „звездных относительно симметричных точек" функций является выполнение неравенства

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z) - f(-z)} > 0, \quad |z| < 1.$$

Для коэффициентов Тейлорова разложения рассматриваемых функций имеет место точная оценка $|a_n| \leqslant 1$, $n \geqslant 2$. Полученные результаты обобщаются теоремой 3:

Пусть $f(z) = z + \ldots$ регулярна в $|z| < 1$ и пусть для некоторого положительного целого k имеет место неравенство

$$\operatorname{Re}\left\{ zf'(z) \Big/ \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{f(\varepsilon^\nu z)}{\varepsilon^\nu} \right\} > 0, \quad |z| < 1, \qquad (1)$$

где $\varepsilon = e^{2\pi i/k}$. Тогда $f(z)$ однолистна и почти выпукла в $|z| < 1$. Условие (1) обобщается далее:

Пусть $f(z) = z + \ldots$ регулярна в $|z| < 1$ и пусть $F_0(z) = f(z)$, $F_1(z) = zf'(z)$, $F_2(z) = z(zf'(z))' \ldots$ Если для некоторого неотрицательного n имеет место неравенство

$$\operatorname{Re}\left\{ zF_n'(z) \Big/ \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{F_n(\varepsilon^\nu z)}{\varepsilon^\nu} \right\} > 0, \quad |z| < 1,$$

где k — положительное целое и $\varepsilon = e^{2\pi i/k}$, то $f(z)$ однолистна и почти выпукла в $|z| < 1$.

Рассматриваются также p-листные почти выпуклые функции в единичном круге. С. А. Касьянюк

7468. Об одной теореме покрытия в классе однолистных функций. Мокану (Despre o teorema de acoperire în clasa funcţiilor univalente. Mocanu P. T.), Gaz. mat. şi fiz., 1958, **10**, № 8, 473—477 (рум.; рез. франц., русск.)

Пусть S — класс функций вида $f(z) = z + c_2 z^2 + \ldots$, регулярных и однолистных в $|z| < 1$. Доказывается следующая

Теорема покрытия. Образ внутренности круга в плоскости z, ограниченного кривой $\rho = \cos\theta$, при отображении любой функцией $f(z) \in S$ всегда покрывает область, представляющую собой внутренность кривой Г, заданной следующими параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} R = \dfrac{1-t^2}{4t^2}\,|t|^{\frac{2(1-t^2)}{1+t^2}}, \\ \gamma = 2\left[\operatorname{arctg} t + \dfrac{2t^3}{1+t^6}\ln|t|\right], \end{cases}$$

где $-1 \leqslant t \leqslant 1$, а R и γ суть соответственно радиус-вектор и полярный угол точек кривой Г. Кривая Г по форме очень близка к эллипсу, имеющему малую ось на отрезке $[0;\ 1/4]$ вещественной оси. Доказательство основано на использовании другого результата автора (Mocanu P. T., Studii şi Cercetări mat. Acad. RPR Fil. Cluj, 1957, 8, № 3-4, 303—317). Я. С. Фельдман

7469. К теории специальных классов однолистных функций. Зморович (До теорії спеціальних класів однолистих функцій. Зморович В. А.), Доповіді АН УРСР, 1959, № 1, 5—9 (укр.; рез. русск., англ.)

Устанавливаются структурные формулы некоторых классов регулярных, однолистных в круге функций. Пусть K — класс однолистных и регулярных в $|z| < 1$ функций, отображающих круг $|z| < 1$ на выпуклые области. Функцией класса K_0 назовем такую регулярную в круге $|z| < 1$ функцию $f(z)$, для которой можно найти функцию $\varphi(z) \in K$ и действительное число γ так, что имеет место неравенство $\operatorname{Re}[e^{i\gamma} f'(z)/\varphi'(z)] > 0$ при $|z| < 1$. Доказываются теоремы:

Пусть $F(z, \theta)$ — непрерывная функция аргументов z, θ при $0 \leqslant \theta < 2\pi$ и $|z| \leqslant \rho < 1$, где ρ как угодно близко к 1. Пусть при $\theta \in [0, 2\pi]$ функция $F(z, \theta)$ регулярна в круге $|z| < 1$, причем $\operatorname{Re} F(z, \theta) > 0$ в $|z| < r < 1$. Тогда при $\varphi(z) \in K$ и $\mu(\theta)$, неубывающей на сегменте $[0, 2\pi]$ функцией с ограниченной вариацией, класс функций представляемых структурной формулой $f(z) = \int_0^{2\pi} \Phi(z, \theta)\, d\mu(\theta)$, где $\Phi(z, \theta) = \int_0^z \varphi'(\zeta) F(\zeta, \theta) d\zeta$ есть класс однолистных в круге $|z| < r$ регулярных в круге $|z| < 1$ аналитических функций, для которых круг $|z| < r$ является наименьшим кругом однолистности (в этом классе есть функции, однолистные лишь в этом круге). Областью класса $B(\alpha, \beta)$; $0 < \alpha < \pi$; $-\pi < \beta < 0$ называется такая односвязная, однолистная область плоскости z, которая обладает следующим свойством: если $z \in B(\alpha, \beta)$ и $\operatorname{Im} z > 0$ ($\operatorname{Im} z < 0$), то отрезок, проведенный из z до действительной оси под углом α (под углом β) к ней полностью принадлежит области $B(\alpha, \beta)$. Каждую регулярную в круге $|z| < 1$ функцию $f(z)$, однолистно отображающую круг $|z| < 1$ на области вида $B(\alpha, \beta)$, назовем функцией класса $B(\alpha, \beta)$.

Теорема 2. Необходимым и достаточным условием того, что $f(z) \in B(\alpha, \beta)$ является ее представлением формулой

$$e^{i\sigma}(1 - ze^{i\gamma})^{1-\lambda}(1 - ze^{-i\delta})^{1+\lambda} f'(z) = ih + c\int_0^{2\pi} \frac{1 + ze^{-i\theta}}{1 - ze^{-i\theta}}\, d\mu(\theta),$$

где $\mu(\theta)$ — неубывающая на сегменте $[0, 2\pi]$ функция, нормированная условием $\int_0^{2\pi} \mu(\theta)\, d\theta = 1$; $\lambda = \dfrac{\alpha - \beta}{\pi}$, γ, δ, σ, h, c — действительные постоянные $c > 0$, $\gamma < \delta < \gamma + 2\pi$, $\sigma = \dfrac{1}{2}\gamma(1-\lambda) + \dfrac{1}{2}\delta(1+\lambda) + \pi\lambda - \alpha$. Кроме того, дается формула, позволяющая преобразовать симметричную относительно вещественной оси функцию класса $B\left(\dfrac{\pi}{2}; -\dfrac{\pi}{2}\right)$ в функцию того же класса. Как частные случаи, получаются структурные формулы для классов Чакалова (РЖМат, 1957, 340) и Тейла (РЖМат, 1957, 3946). В заключение доказывается, что функции вида $f(z) = \alpha\varphi(z) + \beta z\varphi'(z)$; $\varphi(z) \in K$, $\alpha + \beta = 1$, $\dfrac{\beta}{\alpha} = \lambda e^{i\theta}$, $\lambda > 0$, $|\theta| < \dfrac{\pi}{2}$ принадлежат к классу K_0. Б. Н. Рахманов

7470. О границах колебания кривизны образа плоской кривой при однолистных конформных отображениях. Зморович (Про границі коливання кривизни образу плоскої кривої при однолистих конформних відображеннях. Зморович В. А.), Доповіді АН УРСР, 1959, № 4, 351—354 (укр.; рез. русск., англ.)

Пусть B_z — однолистная область плоскости z, L_ζ — дважды дифференцируемая кривая, проходящая через точку $\zeta \in B_z$, C_ζ — пучок дважды дифференцируемых кривых, проходящих через ту же точку и имеющих в ней общую кривизну K, $S(B_z)$ — класс функций $w=f(z)$, однолистных и регулярных в B_z, компактный в этой области. Полагая $K \geqslant 0$, $\underline{P}(\zeta) \leqslant |f'(\zeta)| \leqslant \overline{P}(\zeta)$, $\underline{P}_1(\zeta) \leqslant |f''(\zeta)/f'^2(\zeta)| \leqslant \overline{P}_1(\zeta)$, автор доказывает, что в классе $S(B_z)$ для кривизны, K^* в точке $\omega = f(\zeta)$ образов кривых пучка C_ζ, реализуемых функциями $S(B_z)$, справедливы оценки

$$\frac{K}{\overline{P}(\zeta)} - \overline{P}_1(\zeta) \leqslant K^* \leqslant \frac{K}{\underline{P}(\zeta)} + \overline{P}_1(\zeta),$$

$$\lambda(\zeta)[K - \overline{Q}(\zeta)] \leqslant K^* \leqslant \frac{1}{\underline{P}(\zeta)}[K + \overline{Q}(\zeta)],$$

где $\underline{Q}(\zeta) \leqslant \left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right| \leqslant \overline{Q}(\zeta)$, $\lambda(\zeta) = 1/\overline{P}(\zeta)$ при $K \geqslant \overline{Q}(\zeta)$, $\lambda(\zeta) = 1/\underline{P}(\zeta)$ при $K \leqslant \overline{Q}(\zeta)$.

Приводятся два примера получения точных оценок величины K^* элементарными способами: в классе U функций, однолистных и регулярных в единичном круге с нормировкой $f(0)=0$, $f'(0)=1$, и в подклассе $\widetilde{U}$ класса U, состоящем из функций с „ограниченным вращением". Устанавливается величина колебания кривизны $\operatorname{Osc} K^* = 2\left|\frac{f''(\zeta)}{f'^2(\zeta)}\right|$ при отображении пучка C_ζ функцией $w=f(z)$, однолистной и аналитической в области B_z, регулярной на кривой L_ζ. Г. В. Корицкий

7471. О конформном отображении кругового кольца. Абэ, Сугаку, 1956, 8, № 1, 25—27 (японск.)

Пусть D — образ кольца $0<r<|z|<1$ при конформном отображении его. Мы предполагаем, что соответствующие образы C_r и C_1 окружностей $|z|=r$ и $|z|=1$ — аналитические жордановы кривые и что C_r лежит в области ограниченной кривой C_1. Обозначим через $L(\rho)$ длину образа окружности $|z| \leqslant \rho$, $r \leqslant \rho < 1$, и через $A(\rho)$ площадь области, ограниченной образом $|z|=\rho$. Автор доказывает, что $L(\rho)/\rho$ — возрастающая функция от ρ, что $2(1-r^2)A(1) \geqslant L(1) - \frac{L(r)}{r} \geqslant 2(1-r^2)A(r)/r^2$ и что $A(1) - A(r) \geqslant (1-r^2)L^2(r)/(4\pi r^2)$. Если, кроме того, C_r и C_1 — выпуклые кривые, тогда $A(1) - A(r) < L^2(1)\ln(1/r)/\pi$. M. Ohtsuka

Перевод из Math. Revs, 1959, 20, № 6, 3995.

7472. О звездообразности отображений области регулярными однолистными в круге функциями. Александров И. А., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 4, 9—15

Пусть B — принадлежащая кругу $|w|<1$ произвольная односвязная область, ограниченная гладкой кривой $\Gamma: w = \omega + r(\varphi)e^{i\varphi}$, где $r(\varphi)$ — однозначная функция, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$; M — класс всех функций $f(w) = c_0 + c_1 w + c_2 w^2 + \ldots$, регулярных и однолистных в $|w|<1$. Доказываются шесть теорем.

Теорема 1. Необходимым и достаточным условием звездообразности образа области B при отображении круга $|w|<1$ любой функцией $f(\omega)$ класса M относительно точки $f(\omega)$ является выполнение неравенства $L \leqslant \min\{\pi - \Psi, \Psi\}$ в тех точках $w \in \Gamma$, где $r' \leqslant 0$ и неравенства $L \leqslant \min\{\pi + \Psi, -\Psi\}$ в тех точках $w \in \Gamma$, где $r' > 0$. Здесь

$$L = \ln\frac{|1-\bar{\omega}w| + |w-\omega|}{|1-\bar{\omega}w| - |w-\omega|} \text{ и } \Psi = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{r}{r'}\right) + \arg(1-\bar{\omega}w).$$

В теореме 2 рассматривается частный случай, когда область B симметрична относительно прямой, проходящей через точки 0 и ω; в этом случае неравенства теоремы 1 следуют друг из друга. Теорема 3 — следствие из теоремы 1 при $\omega = 0$. Теоремы 4, 5 и 6 являются несущественными обобщениями (вместо класса S нормированных обычным образом функций рассматривается класс M) соответствующих теорем, опубликованных автором без доказательства ранее (РЖМат, 1953, 8745). Ю. Е. Аленицын

7473. Об $\arg f'(z)$ p-листной звездной функции. Гальперин И. М., Укр. матем. ж., 1959, 11, № 2, 207—210

Рассматривается класс функций $w = z^p + a_{p+1}z^{p+1} + a_{p+2}z^{p+2} + \ldots$, регулярных, звездных и p-листных в круге $|z|<1$. Доказано, что максимум и минимум $\arg f'(z)$ при фиксированном z реализует функция $w = \frac{z^p}{(1+ze^{i\alpha})^{2p}}$. При доказательстве используются идеи В. Строганова, примененные им в 1934 г. при решении этой задачи для случая $p=1$ (Тр. Физ.-матем. ин-та им. Стеклова, 1934, 5, 247—58). Ю. Д. Максимов

7474. Об аналитических функциях с ограниченным граничным вращением в n-связных круговых областях. Дундученко, Касьянюк (Про два класи функцій, регулярних в n-зв'язних круговых областях. Дундученко Л. О., Касьянюк С. А.), Доповіді АН УРСР, 1959, № 5, 468—472 (укр.; рез. русск., англ.)

В. А. Зморовичем рассмотрен класс функций $B(K_n)$, регулярных в области K_n, состоящей из плоскости с выброшенными из нее n кругами $|c_k - z| \leqslant R_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, и удовлетворяющих условиям

$$\int_0^{2\pi} |\operatorname{Re} f(c_k + \rho e^{i\theta})|\,d\theta < L(f) < +\infty,$$

где $R_k < \rho < R_k + \delta$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, $\delta > 0$ — достаточно малое число, $L(f)$ — константа. Авторы вводят класс $P(k_n)$ функций $f(z)$, регулярных в k_n и удовлетворяющих условию $1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in B(k_n)$ для всех $z \in k_n$. Этот класс авторы называют классом функций ограниченного граничного вращения и считают его обобщением на n-связные круговые области соответствующего класса Паатеро. Следует заметить, что из определения класса, данного авторами, вовсе не следует что каждая функция $f(z) \in P(k_n)$ будет иметь ограниченное вращение в смысле Паатеро. Авторы также ошибаются, считая, что из полученной ими структурной формулы класса $P(k_n)$ следует n-связный аналог формулы Кристоффеля — Шварца. Функции, ими указанные, при $n>2$ не будут отображать область k_n на область, ограниченную многоугольниками. Ошибка авторов в том, что для $n>2$ скорость изменения угла между касательной к образу окружности $|z - c_k| = R_k$ и вещественной осью равна $1 + \operatorname{Re}\frac{(z-c_k)f''(z)}{f'(z)}$, а не $1 + \operatorname{Re}\left[\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]$, как полагают авторы. Ю. Д. Максимов

7475. Круговая симметризация и функция Грина. Кшиж (Circular symmetrization and Green's function. Krzyż J.), Bull. Acad. polon. sci. Ser. sci. math., astron. et phys., 1959, 7, № 6, 327—330 (англ.; рез. русск.)

Пусть Ω — произвольная односвязная область гиперболического типа плоскости z, P_ξ — произвольный луч, выходящий из точки P, $z_0, z_1 \in G$, причем $|Pz_0| \neq |Pz_1|$. Если $\zeta_0, \zeta_1 \in P_\xi$, $|P\zeta_k| = |Pz_k|$, $k = 0, 1$, и Ω^* есть область, полученная из области Ω посредством круговой симметризации относительно P_ξ, то $g(\zeta_0, \zeta_1; \Omega^*) \geq g(z_0, z_1; \Omega)$, где g — функция Грина.

Ю. Е. Аленицын

7476. О принципе соответствия границ в теории конформных отображений. Ремизова М. П. Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1956, **19**, 240—251

По принципу соответствия границ, определенная в односвязной области D (конечной или нет) с границей C аналитическая в D и непрерывная в $\overline{D}$ функция $\omega = f(z)$ конформно отображает D на ограниченную область D^* с границей C^*, если $f(z)$ осуществляет взаимно однозначное отображение C на C^* (с сохранением направления обхода). Автор доказывает пять однотипных теорем, распространяющих указанный принцип на случай, когда $C^* \ni \omega = \infty$. Приведем одну из них.

Теорема 2. Пусть D^* содержит на границе бесконечно удаленную точку и $\zeta_0 \in C$ соответствует точке $\omega = \infty$. Тогда, если $\omega = f(z)$ осуществляет взаимно однозначное соответствие контура C на контур C^*, аналитична в D и непрерывна в $\overline{D}$, кроме $z = \zeta_0$, где имеет особенность типа $\exp \frac{\lambda}{(z-\zeta_0)^\mu}$, то для того, чтобы осуществлялся принцип соответствия границ, необходимо и достаточно: 1) чтобы к точке ζ_0 нельзя было подойти по направлению, образующему с осью Ox угол, равный $\pm \frac{\pi}{2\mu} + \frac{\arg \lambda}{\mu}$; 2) чтобы угол α между ветвями кривой C в точке ζ_0 равнялся нулю, $\alpha \neq 0$; 3) чтобы $\alpha = \alpha(|z - \zeta_0| = r) = O(r^{\mu+1})$. Отмечается, что все теоремы переносятся на однолистные отображения k-связных областей. В заключение формулируется принцип соответствия границ для многолистных отображений.

Имеются опечатки. В ряде случаев отсутствуют необходимые пояснения обозначений. И. А. Александров

7477. О конформном отображении многосвязной области на каноническую поверхность наложения. Мидзумото (On conformal mapping of a multiply- connected domain onto a canonical covering surface. Mizumoto Hisao). Kodai Math. Semin. Repts, 1958, **10**, № 4, 177—188 (англ.)

Пусть F — конечнолистная риманова поверхность, лежащая над плоскостью w, граница Γ которой состоит из континуумов Γ_j $(j = 1, \ldots, N)$. Допустим, что два или более граничных континуума представляют собой замкнутые кривые, разделяющие две точки a' и a'' на плоскости w, и пусть на $\overline{F}$ нет точек, лежащих над a' или a''. Такую поверхность F назовем конечнолистной поверхностью наложения, разделяющей точки a' и a''. Величину $\nu_j = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j^*} d\arg(z - a')$, где Γ_j^* — простая замкнутая аналитическая кривая на F, гомотопная Γ_j, а интегрирование производится в положительном направлении по отношению к F, назовем вращением Γ_j относительно точки a'. Конечнолистная поверхность наложения, разделяющая точки a' и ∞, проекции всех граничных компонент которой на плоскость w суть окружности или их дуги с общим центром в точке a', называется поверхностью наложения кольцевого типа с круговыми разрезами, имеющими центр в a'. Опираясь на одно экстремальное свойство таких поверхностей, автор обобщает известную теорему о конформном отображении плоской конечно связной области на круговое кольцо с концентрическими круговыми разрезами:

Всякая конечносвязная плоская область B z-плоскости, граница C которой состоит из континуумов C_j $(j = 1, \ldots, N)$, может быть конформно отображена на поверхность наложения кольцевого типа с круговыми разрезами, имеющими центр в начале. Вращение ν_j образа каждой граничной компоненты относительно начала может быть задано произвольно при условии, что их сумма равна нулю (за исключением случая, когда вращение каждой граничной компоненты равно нулю). Если все ν_j заданы, то отображающая функция $w = \Phi(z)$ при дополнительном условии $\Phi(z_0) = 1$ определяется единственным образом, где z_0 — произвольно заданная точка области B.

С. А. Гельфер

7478. Функции, типично вещественные и мероморфные в круговом кольце. Чжан Кай-мин (Chang Kai-ming), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1959, **9**, № 1, 37—50 (кит.; рез. англ.)

Через $T_r(R_q)$ обозначается класс функций $f(z)$, мероморфных в кольце $R_q: q < |z| < 1$, и удовлетворяющих условию $\operatorname{Im}(f(z)) \cdot \operatorname{Im}(z) > 0$. Пусть полюсы p_j функции $f(z)$ перенумерованы так, что $q < \ldots \leqslant |p_{-2}| \leqslant |p_{-1}| < |p_1| \leqslant |p_2| \leqslant \ldots < 1$. Пусть $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n z^n$ есть лорановское разложение $f(z)$ в кольце $p' < |z| < p$ $(p' = |p_{-1}|, \quad p = |p_1|)$. Через $T_r(p', p)$, $q < p' < p < 1$, обозначается класс таких функций, для которых p' и p фиксированы. Через $T_r(p', 1)$ $(T_r(q, p))$ обозначается подкласс функций класса $T_r(R_q)$, регулярных в $p' < |z| < 1$ $(q < |z| < p)$. Функция $S_q(z, a) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{q^{2\nu} z}{1 - 2aq^{2\nu}z + q^{4\nu}z^2}$, где a вещественно и $|a| < \frac{1}{2}\left(q + \frac{1}{q}\right)$, однолистна и типично вещественна в R_q. Автор дает точные оценки модулей $|f(z)|$, $|f'(z)|$, b_n и других величин. Приведем наиболее важные из них.

Теорема 2. Если $f(z) \in T_r(R_q)$, то для всякого $z \in R_q$, $\operatorname{Im}(z) \neq 0$, найдется такое вещественное число $a = a(z)$, $|a| < \frac{1}{2}\left(q + \frac{1}{q}\right)$, что $\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \left|\frac{S'_q(z, a)}{S_q(z, a)}\right|$.

Теорема 5. Пусть $b_0 = 0$. 1) Если $f(z) \in T_r(q, p)$, то $-B(n, p)(b_1 - b_{-1}) \leqslant b_n - b_{-n} \leqslant B(n, p)(b_1 - b_{-1})$, когда n четно; $\mu(n, p)(b_1 - b_{-1}) \leqslant b_n - b_{-n} \leqslant B(n, p)(b_1 - b_{-1})$, когда n нечетно, где $B(n, p) = \frac{1}{p^{n-1}}(1 + p^2 + \ldots + p^{2(n-1)})$, $\mu(n) = \min_{0 < \theta < 2\pi} \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}$. 2) Если $f(z) \in T_r(p', 1)$, то

$$-B\left(n, \frac{p'}{q}\right)(b_1 q - b_{-1} q^{-1}) \leqslant$$

$$\leqslant b_n q^n - b_{-n} q^{-n} \leqslant B\left(n, \frac{p'}{q}\right)(b_1 q - b_{-1} q^{-1})$$

для четных n;

$$\mu(n)(b_1 q - b_{-1} q^{-1}) \leqslant$$

$$\leqslant b_n q^n - b_{-n} q^{-n} \leqslant B\left(n, \frac{p'}{q}\right)(b_1 q - b_{-1} q^{-1})$$

для нечетных n. 3) Если $f(z) \in T_r(p', p)$, то

$$|b_n| \leqslant \frac{1}{1 - q^{2n}}\left\{\left[B(n, p) + q^{n+1} B\left(n, \frac{p'}{q}\right)\right] b_1 - \left[B(n, p) + q^{n-1} B\left(n, \frac{p'}{q}\right)\right] b_{-1}\right\},$$

$$|b_{-n}| \leqslant \frac{q^n}{1-q^{2n}}\left\{\left[q^n B(n,p)+qB\left(n,\frac{p'}{q}\right)\right]b_1 - \left[q^n B(n,p)+q^{-1}B\left(n,\frac{p'}{q}\right)\right]b_{-1}\right\},$$

когда n четно;

$$b_n \leqslant \frac{1}{1-q^{2n}}\left\{\left[B(n,p)-q^{n+1}\mu(n)\right]b_1 - \left[B(n,p)-q^{n-1}\mu(n)\right]b_{-1}\right\},$$

$$b_n \geqslant \frac{1}{1-q^{2n}}\left\{\left[\mu(n)-q^{n+1}B\left(n,\frac{p'}{q}\right)\right]b_1 - \left[\mu(n)-q^{n-1}B\left(n,\frac{p'}{q}\right)\right]b_{-1}\right\},$$

$$b_{-n} \leqslant \frac{q^n}{1-q^{2n}}\left\{[q^n B(n,p)-q\mu(n)]\,b_1 - [q^n B(n,p)-q^{-1}\mu(n)]\,b_{-1}\right\},$$

$$b_{-n} \geqslant \frac{q^n}{1-q^{2n}}\left\{\left[q^n\mu(n)-q\,B\left(n,\frac{p'}{q}\right)\right]b_1 - \left[q^n\mu(n)-q^{-1}B\left(n,\frac{p'}{q}\right)\right]b_{-1}\right\},$$

когда n нечетно. С. А. Гельфер

7479. Алгоритм и принцип классификации функций с положительной вещественной частью. Эфферц, Брёйер (Ein Algorithmus und ein Klassifikationsprinzip für Funktionen mit nichtnegativem Realteil. Effertz F. H., Breuer K. H.), Math. Ann., 1959, 138, № 4, 335—341 (нем.)

Авторы называют неотрицательными функции комплексного переменного, регулярные в правой полуплоскости и имеющие в ней неотрицательную вещественную часть: если, кроме того, они принимают на вещественной оси вещественные значения, то они называются вещественными неотрицательными функциями. Если $F_\nu(\lambda)$ — неотрицательная функция, удовлетворяющая условиям

$$F_\nu(\lambda_i^{(\nu)}) = s_\nu, \quad \operatorname{Re}\lambda_i^{(\nu)} > 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, m_\nu)$$

и не имеющая формы

$$F_\nu(\lambda) = \frac{s_\nu \bar{g}_\nu(\lambda) + \varepsilon \bar{s}_\nu g_\nu(-\lambda)}{\bar{g}_\nu(\lambda) - \varepsilon g_\nu(-\lambda)},$$

где $|\varepsilon| = 1$, $g_\nu(\lambda) = \prod_{i=1}^{m_\nu}(\lambda+\lambda_i^{(\nu)})$,

то функция

$$F_{\nu+1}(\lambda) = \frac{KS_\nu(\lambda) - \bar{K}T_\nu(\lambda)}{S_\nu(\lambda)+T_\nu(\lambda)}, \quad \operatorname{Re}K > 0,$$

$$S_\nu(\lambda) = \bar{\varepsilon}g_\nu(-\lambda)[\bar{s}_\nu + F_\nu(\lambda)],$$

$$T_\nu(\lambda) = \bar{g}_\nu(\lambda)[s_\nu - F_\nu(\lambda)]$$

также неотрицательна. Полагая $m_\nu = 1$, авторы вводят классификацию неотрицательных функций в зависимости от того, можно ли неограниченно продолжить этот алгоритм, или же для некоторого значения n будем иметь $S_n(\lambda)+T_n(\lambda)=0$; первый случай подразделяется на два в зависимости от того, будем ли иметь $F_n(\lambda) \equiv F_n(\lambda_n)$, начиная с некоторого значения n, или нет; если нет, то снова два возможных случая в зависимости от того, является ли $F_0(\lambda)$ рациональной функцией или нет. Я. Л. Геронимус

7480. Задача коэффициентов для функций, регулярных внутри эллипса. Ройстер (Coefficient problems for functions regular in an ellipse. Royster W. C.), Duke Math. J., 1959, 26, № 3, 361—371 (англ.)

Если функция $f(z)$ регулярна в области E, ограниченной эллипсом с фокусами в точках ± 1, то ее можно разложить в ряд по полиномам Чебышева, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(z)$, $z \in E$. Автор дает оценки коэффициентов a_n таких разложений для следующих классов функций, регулярных в E: 1) (T) — класс типично вещественных функций, т. е. функций, принимающих в E вещественные значения тогда и только тогда, когда z вещественно; 2) (F) — класс функций, выпуклых в направлении мнимой оси, т. е. функций, отображающих всякий внутренний софокусный эллипс в кривую, пересекаемую прямыми, параллельными мнимой оси, не более чем в двух точках; 3) (R) — класс функций, звездных в направлении вещественной оси, т. е. функций, отображающих всякий внутренний софокусный эллипс в кривую, пересекаемую вещественной осью точно в двух точках; 4) (S) — класс функций, звездных относительно начала; 5) (D) — класс функций, обладающих диаметральной линией, т. е. функций, для которых существует такая точка $\zeta \in E$, что три точки $f(\zeta)$, 0, $f(-\zeta)$ лежат на одной прямой и пересечение этой прямой с образом E связно, причем направление, в котором функция $f(z)$, звездна совпадает с направлением диаметральной линии. Положим $R = a+b$, где a и b — полуоси эллипса. Доказаны теоремы:

1. Если $f(z) \in (T)$, $a_0 = 0$, то $|a_n| \leqslant n|a_1|\frac{R-R^{-1}}{R^n-R^{-n}}$, $n = 1, 2, \ldots$ Оценка точная.

2. Если $f(z) \in (F)$, $a_0 = 0$, a_n — вещественны, то $|a_n| \leqslant |a_1|\frac{R+R^{-1}}{R^n+R^{-n}}$, $n = 1, 2, \ldots$ Оценка точная.

3. Если $f(z) \in (R)$, то $|a_n R^n - \bar{a}_n R^{-n}| \leqslant n^2 |a_1 R - \bar{a}_1 R^{-1}|$.

4. Если $f(z) \in (S)$, $a_0 = 0$, то $|a_n| \leqslant n|a_1| \times \frac{R+R^{-1}}{R^n-R^{-n}}$, $n = 1, 2, \ldots$

5. Если $f(z) \in (D)$, то $|a_n| \leqslant n\frac{|a_1 R - \bar{a}_1 R^{-1}|}{R^n - R^{-n}}$. $n = 1, 2, \ldots$ С. А. Гельфер

7481. Замечание об ограниченных функциях. Каулинг (A remark on bounded functions. Cowling V. F.), Amer. Math. Monthly, 1959, 66, № 2, 119—120 (англ.)

Приводится теорема:

Пусть $f(z) = \sum a_n z^n$ отображает круг $|z| < 1$ на область конечной площади. Тогда, полагая $\bar{M}(r) = \sum |a_n| r^n$, имеем:

$$\lim_{r\to\infty} \bar{M}(r)\left(\log\frac{1}{1-r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

Доказательство немедленно следует из оценки:

$$\bar{M}(r) = \sum_{n=0}^{k}|a_n| r^n + \sum_{k+1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}}|a_n| n^{-\frac{1}{2}} r^n \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{k}|a_n| r^n + \left(\sum_{k+1}^{\infty} n|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \sum n^{-1} r^{2n} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{k} |a_n| r^n + \left(\sum_{k+1}^{\infty} n |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\log \frac{1}{1-r^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Откуда

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\, \overline{M}(r)\left(\log \frac{1}{1-r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{k+1}^{\infty} n |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

где правая часть при $k \to \infty$ становится как угодно малой. Г. Ц. Тумаркин

7482. Оценки ограниченных систем функций. Эрве (Abschätzungen für beschränkte Funktionensysteme. Erwe Friedhelm), Math. Z., 1959, **71**, № 4, 414—426 (нем.)

Автор продолжает исследования ограниченных систем функций одной комплексной переменной, начатые ранее совместно с Пешлем (РЖМат, 1954, 4404). Указанные исследования распространяются для получения оценки разности двух ограниченных систем функций. При этом оказывается возможным найти радиус наибольшего круга с центром в нулевой точке, в котором значения двух ограниченных систем функций с отличными друг от друга начальными коэффициентами их разложений в окрестности нулевой точки, не совпадают. Наконец, даются обобщения леммы Шварца, в которых подчеркивается различие между случаем $n = 1$ и $n > 1$. А. В. Лебедев

7483. О радиальных граничных значениях аналитических функций. Давыдов Н. А., Успехи матем. наук, 1959, 14, № 1, 157—164

В первой части рассматриваются ряды многочленов

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(z), \qquad (1)$$

$$F_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{R^n} P_n(z), \qquad (2)$$

$$P_n(z) = z^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + \ldots + a_0^{(n)}.$$

Автор приводит пример ряда (1), сходящегося к функции $f(z)$, аналитической во всей комплексной плоскости за исключением одной точки на контуре $\Gamma(|z| = 1)$, для которой при любом R функция $F_R(z)$ не имеет конечных радиальных значений почти всюду на Γ_R ($|z| = R$). Далее автор показывает, что для любого ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z) \qquad (3)$$

с радиусом сходимости, равным 1, путем подходящей расстановки скобок, можно получить такой ряд (1), для которого ряд (2) при любом $R > 1$ будет иметь Γ_R своей купюрой. Предполагая дополнительно, что $\overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n| > 0$, можно получить такой ряд (1), для которого функция $F_R(z)$ при $R > 2$ не будет иметь конечных радиальных значений почти всюду на Γ_R.

Во второй части работы исследуются граничные свойства лакунарных рядов. Например, автор доказывает следующую теорему:

Теорема 5. Пусть дан степенной ряд, в котором $a_n = 0$ для $n \neq n_k$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} = \infty, \quad 0 < \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n| < \infty.$$

Тогда почти для всех $\zeta \in \Gamma(|z| = 1)$ множество частичных пределов последовательности $s_n(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \zeta^\nu$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) имеет по крайней мере одну общую точку с каждым замкнутым кругом радиуса $r = \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|$, лежащим в комплексной плоскости. Э. З. Шувалова

7484. О проблеме Ловатера. Пиранян (On a problem of Lohwater. Piranian G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 3, 415—416 (англ.)

Багемил (РЖМат, 1956, 2940) показал, что для каждой комплекснозначной функции, определенной в единичном круге D, может существовать самое большее счетное множество точек $e^{i\theta}$, являющихся концами двух дуг $\gamma_1(\theta)$ и $\gamma_2(\theta)$, для которых соответствующие предельные множества $C(f, e^{i\theta}, \gamma_1(\theta))$ и $C(f, e^{i\theta}, \gamma_2(\theta))$ могут не иметь общих точек. ($a \in C(f, e^{i\theta}, \gamma(\theta))$, если найдется последовательность точек $\{z_n\}$, $z_n \in \gamma(\theta)$, $\lim z_n = e^{i\theta}$, такая, что $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = a$. В связи с этим Ловатер поставил недавно вопрос о том, может ли существовать функция $f(z)$, имеющая несчетное множество точек $e^{i\theta}$, в каждой из которых заканчиваются три жордановы дуги $\gamma_1(\theta)$, $\gamma_2(\theta)$, $\gamma_3(\theta)$ такие, что пересечение $C(f, e^{i\theta}, \gamma_1(\theta)) \cap C(f, e^{i\theta}, \gamma_2(\theta)) \cap C(f, e^{i\theta}, \gamma_3(\theta))$ является пустым множеством. Автор устанавливает существование непрерывных в D функций $f(z)$, имеющих только что указанное свойство даже в каждой точке $|z| = 1$. В заключение автор отмечает, что в выходящей в скором времени работе Багемила, Пираняна и Янга строится пример ограниченной в $|z| < 1$ аналитической функции с несчетным множеством точек $e^{i\theta}$, в которых выполняется условие Ловатера. Г. Ц. Тумаркин

7485. Доказательство теоремы братьев Рисс. Косис (Proof of a theorem of the brothers Riesz. Koosis P.), Studia math., 1958, **17**, № 3, 295—298 (англ.)

Приводится доказательство известной теоремы братьев Рисс: Пусть $F(\theta)$ $\left(F(\theta) = \frac{1}{2}[F(\theta+) + F(\theta-)]\right)$ — периодическая функция ограниченной вариации на $[-\pi, \pi]$ с периодом 2π. Тогда, если функция $f(z)$:

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}\, dF(\theta),$$

аналитична в $|z| < 1$, то $F(\theta)$ абсолютно непрерывна (см., например, Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, изд. 2-е, М.—Л, 1950, гл. II). Доказательство опирается на необходимое и достаточное условие, для того чтобы функция ограниченной вариации являлась абсолютно непрерывной, заключающееся в существовании у функции $F(\theta)$ почти всюду по мере (dF) конечной производной (см. Сакс, Теория интеграла). Помимо этого в рассуждениях используется ряд других фактов как из теории функций действительного переменного (теорема Лебега о почленном интегрировании и др.), а также теорема Фату о существовании почти всюду радиальных предельных значений у ограниченной в круге $|z| < 1$ функции. Другими способами теорема братьев Рисс была доказана в последнее время Хелсоном (РЖМат, 1956, 3771) и Карлесоном (РЖМат, 1959, 7949); работа последнего автором не упомянута. Г. Ц. Тумаркин

7486. О теореме единственности для аналитических функций и ее приложениях. Цзоу Синь-ти. (Chou Hsin-ti), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1959, **9**, № 2, 114—120 (кит.; рез. англ.)

Доказана теорема: Пусть $f(z)$ аналитична в области D, ограниченной спрямляемой кривой Γ. Предположим, что $f(z)$ непрерывна вплоть до дуги $\Gamma' \subset \Gamma$, включая концы a и b дуги Γ'. Пусть, кроме того, существует последовательность простых спрямляемых кривых $\{\lambda_n\}$, лежащих в области D, концы которых z_n' и z_n'' расположены на Γ', сходящаяся при $n \to \infty$ к кривой Γ'', где $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\lambda_n}|f(z)||dz|=0, \qquad (1)$$

тогда $f(z)\equiv 0$ в D. В качестве приложения этого результата установлен следующий критерий сходимости последовательности аналитических функций. Пусть при тех же предположениях о D, Γ, Γ', Γ'' и $\{\lambda_n\}$ в области D задана последовательность аналитических функций $\{f_n(z)\}$ непрерывных и равномерно ограниченных на Γ':

$$|f_n(z)|\leqslant C \text{ при } z\in\Gamma' \ (n=1,2,\ldots).$$

Пусть, кроме того, существует последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$, такая, что для любых фиксированных чисел ε_k и λ_k существует целое число N, так что из условия $m,\ n\geqslant N$ следует

$$\int_{\lambda_k}|f_m(z)-f_n(z)||dz|\leqslant\varepsilon_k. \qquad (2)$$

Тогда $\{f_n(z)\}$ будет равномерно сходиться внутри области D.

Примечание референта. Предположения о непрерывности рассматриваемых функций на Γ и о равномерной ограниченности их на Γ' (в критерии сходимости) являются излишне жесткими; ничуть не усложняя доказательство, можно значительно их ослабить. Например, в критерии сходимости достаточно потребовать существования последовательности спрямляемых кривых $\{\mu_k\}$, $\mu_k\subset D$, сходящихся при $k\to\infty$ к Γ и такой, что $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{\mu_k}|f_n(z)|^p|dz|\leqslant C$, $n=1,2,\ldots$, где p — какое-либо число >0.

Точно так же можно вместо условий (1) или (2) брать аналогичные условия, в которых фигурируют интегралы от p-й степени модуля, $p>0$. Г. Ц. Тумаркин

7487. О логарифмически средней сходимости и о представлении регулярных функций в единичном круге. Танака (On the logarithmic mean convergence and the representation of the regular functions in the unit circle. Tanaka Chuji), Duke Math. J., 1959, **26**, № 3, 409—417 (англ.)

Помимо хорошо известных классов H_p и класса регулярных в $|z|<1$ функций ограниченного вида, обозначаемого автором H_0, вводится подкласс H_0^* класса H_0, определяемый условием $f(z)\in H_0^*$, если $f(z)\in H_0$ и, кроме того,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\arg\frac{f(re^{i\theta})}{\pi(re^{i\theta})}\right|d\theta<M(f)<\infty \ (0<r<1), \qquad (1)$$

где $\pi(z)$ — произведение Бляшке для нулей $f(z)$, а $M(f)$ не зависит от r. Доказываются две теоремы:

Теорема 1. Если $f(z)\in H_0^*$ в $|z|<1$, то

А. $$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}|\ln|f(re^{i\theta})|-\ln|f(e^{i\theta})||d\theta=0;$$

В. функция $f(z)$, $z=re^{i\theta}$, может быть представлена следующими формулами:

$$f(z)=\pi(z)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left(\frac{f(e^{i\varphi})}{\pi(e^{i\varphi})}\right)P(r,\varphi-\theta)\,d\varphi\right\}, \quad \text{(i)}$$

$$f(z)=\pi(z)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(e^{i\varphi})|\,Q(z,\varphi)\,d\varphi+i\lambda\right\}, \quad \text{(ii)}$$

где $P(r,\varphi)=\dfrac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\varphi}$, $Q(z,\varphi)=\dfrac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}$, λ — действительная постоянная.

Теорема 2. Пусть $f(z)\in H_0$ в $|z|<1$, тогда

А. $\lim\limits_{r\to 1}\int_0^{2\pi}|\ln|f(re^{i\theta})|-\ln|f(e^{i\theta})||^{\delta}d\theta=0$ при любом $0<\delta<1$;

В. $f(z)$ представима в виде $f(z)=\pi(z)\exp\{\pi_1(z)F(z)\}$. Здесь $\pi_1(z)$ — произведение Бляшке для нулей функции $\ln\dfrac{f(z)}{\pi(z)}$, которая входит в класс H_δ, $\delta<1$; $F(z)=\left\{\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lambda(\varphi)P(r,\varphi-\theta)\,d\varphi\right\}^{1/\delta}$, где $\lambda(\varphi)=\left\{\dfrac{1}{\pi_1(e^{i\varphi})}\ln\dfrac{f(e^{i\varphi})}{\pi(e^{i\varphi})}\right\}^{\delta}$.

Примечание референта. Теоремы автора немедленно выводятся из известных результатов. Действительно, положим $\dfrac{f(z)}{\pi(z)}=g(z)$, $g(z)\neq 0$ при $|z|<1$. Тогда, если $f(z)\in H_0^*$, то из определения (1) имеем

$$\int_0^{2\pi}|\arg g(re^{i\varphi})\,d\varphi|<M<\infty, \ 0\leqslant r<1. \qquad (2)$$

В то же время хорошо известно, что для всякой функции $f(z)$ ограниченного вида

$$\int_0^{2\pi}|\ln|g(re^{i\varphi})||d\varphi<M_1<\infty, \ 0<r<1. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) сразу следует, что $\ln g(z)$ — регулярная в $|z|<1$ функция, входящая в класс H_1, ибо получаем

$$\int_0^{2\pi}|\ln g(re^{i\theta})|\,d\theta<M+M_1.$$

Так как $\ln g(z)\in H_1$, то

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}|\ln|g(re^{i\theta})|-\ln|g(e^{i\theta})||d\theta=0.$$

Отсюда следует А. Если теперь воспользоваться представлением всякой функции $g(z)\in H_1$ интегралом Пуассона через свои граничные значения

$$\ln g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln g(e^{i\varphi})P(r,\theta-\varphi)\,d\varphi,$$

то мы получим формулу (i) автора. Если же воспользоваться представлением функции класса H_1 интегралом Шварца через граничные значения действительной части

$$\ln g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|g(e^{i\theta})|\,Q(z,\varphi)\,d\varphi+i\lambda, \qquad (4)$$

то приходим к формуле (ii) теоремы 1. При этом надо лишь учесть, что $|\pi(e^{i\varphi})|=1$ почти всюду на $|z|=1$. Поэтому из (4) будет следовать, что

$$\frac{f(z)}{\pi(z)}=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(e^{i\varphi})|\,Q(z,\varphi)\,d\varphi+i\lambda\right\}.$$

Возможность столь быстрого вывода формулы (ii) автором не замечена. Так же быстро сводится к известным результатам, которые можно найти, например, во второй главе монографии И. И. Привалова „Граничные свойства аналитических функций", и теорема 2 автора. Г. Ц. Тумаркин

7488. О скорости роста функций класса H_p и об умножении интегралов типа Коши-Стилтьеса. Хавин В. П., Докл. АН СССР, 1959, **127**, № 4, 757—759

Известно, что допущение сколь угодно медленного роста до ∞ для максимума модуля $M(r,f)$ аналитической в круге $|z|<1$ функции не может гарантировать

хороших граничных свойств функции $f(z)$, например, наличие у функции $f(z)$ конечных радиальных граничных значений ни на каком множестве положительной меры (Маркушевич А. И., Успехи матем. наук, 1949, **4**, вып. 4, 3—18). Функции $f(z)$ класса H_p, $p>0$, характеризуются, как известно, равномерной ограниченностью интегралов от $|f(z)|^p$ по окружностям $|z|=r$, $0<r<1$, что ограничивает соответствующим образом рост $M(r, f)$ при $r\to 1$. Поэтому можно было ожидать, что дополнительное предположение о достаточно медленном росте $M(r, f)$ влечет за собой включение $f(z)$ в класс $H_{p'}$ с $p'>p$. Однако, автор показывает в теореме 1, что это не так. Он доказывает существование в любом классе H_p, $p>0$, функций со сколь угодно медленно растущим максимумом модуля которые не принадлежат никакому классу $H_{p'}$ с $p'>p$. Аналогичный характер имеет приводимая в заметке теорема 2. В ней утверждается существование функций, входящих во все классы $H_{p'}$ с $p'<p$, но не входящих в класс H_p, у которых $M(r, f)$ сколь угодно медленно растет до ∞ при $r\to 1$. В теореме 3 говорится, что установленный в теореме факт для класса H_p имеет место и для класса H_∞ ограниченных аналитических в $|z|<1$ функций.

В заключение приведены две теоремы, посвященные решению следующего вопроса: охарактеризовать регулярные в единичном круге функции φ такие, чтобы из условия представимости в круге $|z|<1$ функции ψ интегралом типа Коши—Стилтьеса $\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{dg(\theta)}{e^{i\theta}-z}$ вытекало бы, что функция $\varphi\psi$ будет также представима в круге $|z|<1$ интегралом типа Коши — Стилтьеса (класс, состоящий из функций, регулярных в $|z|<1$, представимых интегралом типа Коши — Стилтьеса и обладающих этим свойством, в дальнейшем обозначается через K).

Теорема 4. Пусть $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных чисел, причем $m_n=o(\log n)$ $\lim m_n=+\infty$. Тогда существует такая регулярная в $|z|<1$ и непрерывная в $|z|\leqslant 1$ функция φ, что 1) $\varphi(1)=0$, 2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}|\varphi^{(n)}(0)|m_n<+\infty$, 3) $\varphi\frac{1}{1-z}\in K$ (хотя $\frac{1}{1-z}\in K$).

Теорема 5. Пусть регулярная в $|z|<1$ функция такова, что $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}|\varphi^{(n)}(0)|\log n<\infty$. Тогда $\varphi\psi\in K$, если только $\psi\in K$.

Г. Ц. Тумаркин

7489. Поведение интеграла типа Коши вблизи точек разрыва плотности и особый случай краевой задачи Римана. Мельник И. М., Уч. зап. физ.-матем. фак. Ростовск.-н/Д ун-т, 1959, **43**, № 6, 59—71

Изучено поведение интеграла типа Коши в том случае, когда плотность интеграла вблизи некоторых точек линии интегрирования имеет вид:

$$\varphi(t)=\varphi^*(t)(t-c)^{\gamma}\ln\ln(t-c), \qquad (1)$$

где $\varphi^*(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера вблизи c, включая c; $\gamma=\alpha+i\beta$, $-1<\alpha\leqslant 0$. Случай, когда в формуле (1) отсутствует множитель $\ln\ln(t-c)$, был раньше изучен Н. И. Мусхелишвили (Сингулярные интегральные уравнения, М., 1946, 80), результаты которого и распространяет автор на свой случай. Далее автор полученные результаты применяет, следуя опять-таки Н. И. Мусхелишвили, к изучению граничной задачи теории функций комплексного переменного

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\quad t\in L,$$

(по поводу этой задачи см. Н. И. Мусхелишвили, стр. 243 цитированной книги). Рассматривается случай, когда L — конечная совокупность замкнутых или разомкнутых гладких линий, $G(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера и отлична от нуля на любой закрытой дуге, принадлежащей L и не содержащей некоторых точек, вблизи которых она имеет вид: $G(t)=G_*(t)\ln^r(t-c)$, где $G_*(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера, а r — вещественное число.

Б. В. Хведелидзе

7490. Об обобщённой граничной задаче Пуанкаре. Погожельский (Problème aux limites de Poincaré généralisé. Pogorzelski W.), Ann. polon. math., 1955, 2, № 2, 257—270 (франц.)

Пусть L — замкнутая линия Ляпунова, $a(s), b(s)$ — известные функции, определенные на этой линии и удовлетворяющие условию Гёльдера, $F(s, u, v)$ — известная функция, определенная для всех $s\in L$, $|u|\leqslant R_1$, $|v|\leqslant R_2$, где R_1, R_2 — некоторые положительные числа. Предположим, что функция $F(s, u, v)$ удовлетворяет условию Гёльдера относительно переменных s и u и условию Липшица относительно v. В работе рассмотрена следующая нелинейная граничная задача: в области, ограниченной линией L, найти такую гармоническую функцию $u(x, y)$, которая на границе области удовлетворяет условию

$$du/dn+a(s)u+b(s)\,du/ds=\lambda F(s, u, du/ds), \qquad (1)$$

где du/dn и du/ds обозначают нормальную и касательную производные искомой функции, а λ — числовой параметр. В первой части работы при некоторых предположениях относительно линии L и плотности изучены граничные свойства логарифмического потенциала простого слоя и его нормальных и касательных производных. Затем с помощью логарифмического потенциала простого слоя решение задачи сведено к нелинейному интегральному уравнению, в которое наряду с обычными несобственными интегралами входят также интегралы в смысле главного значения по Коши. Существование решения этого интегрального уравнения доказывается с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке при некоторых ограничениях, налагаемых на постоянные Гёльдера элементов, участвующих в задаче (1), а также на функции $a(s), b(s)$ и числовой параметр λ. Подробно рассмотрен случай $b(s)\equiv 0$, а насчет случая $b(s)\not\equiv 0$ указывается, что, при соответствующих предположениях, его можно изучить аналогично предыдущему.

Б. В. Хведелидзе

7491. Задача Римана—Гильберта для голоморфного вектора. Боярский Б. В., Докл. АН СССР, 1959, **126**, № 4, 695—698

Дается новый способ исследования краевой задачи Римана — Гильберта и изучается ее устойчивость. Пусть D — односвязная область комплексной плоскости и L — ее граница, Ω — множество непрерывных по Гёльдеру, неособенных матриц-функций, заданных на L. Однородная задача Римана — Гильберта (или задача Гильберта, по терминологии Ф. Д. Гахова) состоит в отыскании голоморфного в D и непрерывного в $D+L$ вектора $\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ по граничному условию $\mathrm{Re}\,[A(t)\varphi(t)]=0$ на L ($A(t)\in\Omega$). Матрицы $A_1, A_2\in\Omega$ назовем эквивалентными относительно задачи Римана — Гильберта: $A_1^p\sim A_2$, если $A_1(t)=S(t)\cdot A_2(t)\psi(t)$, где $S(t)$ — вещественная матрица, а $\psi(t)$ — граничное значение матрицы, голоморфной и неособенной в D. Соотношение P разбивает Ω на классы эквивалентности, каждый из которых содержит единственную квазидиагональную матрицу вида

$$\lambda(t)=\{Q_i(t)\},\ \text{где}\ Q_i(t)=t^{\varkappa_i'}\ \text{или}\ Q_i(t)=\begin{pmatrix} t^{\varkappa_i''+1} & it^{\varkappa_i''} \\ 0 & t^{\varkappa_i''}\end{pmatrix},$$

причем $\varkappa_i\geqslant\varkappa_j$ при $i\leqslant j$, а в случае равенства блоки

второго порядка стоят впереди диагональных элементов. Числа $\varkappa_l'$ назовем свободными частицами индексами, а $\varkappa_l''+1$, $\varkappa_l''$ — связанными частными индексами данного класса (и любой матрицы этого класса). Система частных индексов характеризует класс эквивалентных матриц $A\in\Omega$, который обозначим $\Omega^{\varkappa}_{\{\varkappa_l\}}$ ($\varkappa=\sum\varkappa_l=\frac{1}{2\pi}\Delta_L\arg\det A(t)$). При $\varkappa=nk+r$, $0<r<n$, устойчивым, т. е. содержащим каждую матрицу вместе с ее окрестностью в Ω, среди классов $\Omega^{\varkappa}_{\{\varkappa_l\}}$ оказывается лишь класс $\Omega^{\varkappa}_{\underbrace{(k+1,\,k),\ldots,(k+1,\,k)}_{r\text{ раз}},\,k,\ldots,\,k}$, если $r<\frac{n}{2}$, и класс $\Omega^{\varkappa}_{\underbrace{k+1,\ldots,\,k+1}_{r\text{ раз}},\,(k+1,\,k),\ldots,(k+1,\,k)}$, если $r>\frac{n}{2}$. Сумма всех неустойчивых классов не содержит ни одной внутренней в Ω точки. Исследуется условие устойчивости числа линейно независимых решений задачи. Доказательства только намечены. Г. Н. Чеботарев

7492. Распределение корней целых функций. Левин Б. Я., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, 3. М., АН СССР, 1958, 208—218

Статья представляет собой изложение обзорного доклада, прочитанного автором на III Всесоюзном математическом съезде. Вскоре после съезда вышла в свет одноименная монография автора (РЖМат, 1 58, 1027К), в которой затронутые в докладе вопросы были изложены подробно. Поэтому в настоящем реферате можно ограничиться кратким перечислением этих вопросов. Вначале автор отмечает, что теоремы о связи между ростом целой функции и распределением ее корней дают сильный аппарат для решения различных вопросов анализа. Особенно точно эту связь удается исследовать для так называемых функций вполне регулярного роста (в. р. р.), теория которых была развита одновременно и независимо друг от друга А. Пфлюгером и автором. Приводятся основные факты этой теории. Далее автор останавливается на результатах, связанных с изучением функций класса A, т. е. функций целых или голоморфных в полуплоскости с корнями, удовлетворяющими условию $\sum\left|\operatorname{Im}\frac{1}{a_k}\right|<\infty$. Утверждается, что функции этого класса представляют собой обширное поле для приложений теории функций в. р. р., в доказательство чего приведен ряд результатов. Отмечено, что функции, с которыми часто приходится встречаться в приложениях, а именно функции конечной степени в полуплоскости, ограниченные на вещественной оси или принадлежащие $L^p(-\infty,\infty)$, суть функции класса A и в. р. р. Далее автор говорит о приложениях теории функций в. р. р. к изучению распределения корней экспоненциальных сумм и функций, приближаемых в известном смысле такими суммами. Много внимания уделяется распределению корней почти периодических функций. В заключение автор останавливается на круге вопросов, связанных с проблемой Гурвица для целых функций и экстремальными свойствами целых функций. Высказывается предположение, что развитый здесь аппарат окажется полезным в вопросах приближения с весом целыми функциями одной и нескольких переменных. Автор формулирует следующие задачи, решением которых, по его мнению, было бы целесообразно заняться: 1) обобщение теории вполне регулярного роста на субгармонические функции;) получение необходимых и достаточных условий, которые нужно наложить на корни целой функции конечной степени для того, чтобы она была ограниченной на вещественной оси или принадлежала $L^p(-\infty,\infty)$; 3) дальнейшее изучение делителей почти периодических полиномов (высказана гипотеза, что два почти периодических полинома с бесконечным числом общих корней имеют общий делитель — почти периодический полином); 4) нахождение самого общего класса целых мажорант, для которых подчинение функции (в смысле определения 1 стр. 452 монографии автора) влечет подчинение производных (высказано предположение, что таким классом является класс P^*).

Примечание референта. Имеются многочисленные опечатки. Формулировка теоремы М. Г. Крейна и автора на стр. 213 строки 12—18 св. неточна: приведенное условие является только достаточным. Однако с помощью метода М. Г. Крейна и автора, изложенного на стр. 575—594 упомянутой выше монографии, без труда можно получить и необходимое и достаточное условие (которое выглядит несколько громоздко). Результат референта на стр. 213, строки 10—3 сн. сформулирован неточно. На самом деле референт доказал, что для всякой мероморфной функции вида

$$\varphi(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{z-h_k},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{A_k}{h_k}\right|<\infty,\ \sum_{k=1}^{\infty}\left|\operatorname{Im}\frac{1}{h_k}\right|<\infty,$$

асимптотически

$$T_{\varphi}(r)<N_{\varphi}(\theta r,0)+C_{\varphi,\theta}\cdot r\quad(\theta>1).$$

Первая из предложенных автором задач была частично решена в 1959 г. в дипломной работе студента Харьковского университета В. С. Азарина. И. В. Островский

7493. О существовании в векторном пространстве нормы, более слабой, чем данное семейство норм. Субба-Рао (On the existence of a norm weaker than a given family of norms on a vector space. Subba Rao M. V.), J. Indian Math. Soc., 1958 (1959), 22, № 2, 53—58 (англ.)

Доказывается, что для существования на линейном множестве E нормы N, более сильной, чем заданное семейство норм N_i, $i=1,2,\ldots$, необходимо и достаточно условие: $\sup_i N_i(x)<+\infty$ при всяком $x\in E$.

Пусть E — пространство всех целых функций $a(z)=\sum a_nz^n$ с семейством норм $N[z;R]=\sum|a_n|R^n$, $0<R<\infty$. Доказывается (теорема 4), что на E не существует нормы, более сильной, чем все $N[z;R]$. Устанавливается также что пространство всех функций $f(z)=\sum a_nz^n$, регулярных в круге $|z|<R$, с топологией, заданной семейством норм $N[f;r]=\sum|a_n|r^n$ ($0<r<R$) не нормируемо (теорема 6).

Примечание референта. 1) Теоремы 4 и 6 известны и являются немедленными следствиями теоремы А. Н. Колмогорова о нормируемости линейного топологического пространства (Studia math, 1934, 5, 29—33). Утверждение, более сильное, чем теорема 6, было доказано П. С. Урысоном в 1924 г. (Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. I, ГИТТЛ, 1951, стр. 17—176). 2) См. РЖМат, 1960, 6381, примечание 1). В. П. Хавин

7494. Некоторые вопросы интерполирования с помощью целых функций. Фирсакова О. С., Докл. АН СССР, 1958, 120, № 3, 477—480

Обозначим через $[\rho(r),\infty]$ класс целых функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln M(r)}{r^{\rho(r)}}<\infty),\quad M(r)=\max|f(z)|\ \text{ для }\ |z|=r,$$

где $\rho(r)$ — уточненный порядок роста: $\lim\rho(r)=\rho$, $\lim r\rho'(r)\ln r=0$. Рассматривается фиксированная после-

довательность точек $\{\lambda_k\}$, $|\lambda_k| \uparrow \infty$, и произвольная система чисел $\{a_n\}$ со свойством

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|a_n|}{|\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)}} \leqslant \rho. \qquad (1)$$

Ставится задача: найти условия на $\{\lambda_n\}$, при которых для любой системы $\{a_n\}$ со свойством (1) имеется в классе $[\rho(r), \infty)$ функция $f(z)$ такая, что $f(\lambda_n) = a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. При $\rho(r) \equiv \rho$ эта задача рассматривалась и другими авторами (по поводу литературы см., например, статью референта РЖМат, 1959, 7953).

Утверждается (теоремы 1 и 2), что искомые условия (необходимые и достаточные) имеют вид:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)}} < \infty, \qquad (2)$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{|\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)}} \ln\left|\frac{1}{\Phi'(\lambda_n)}\right| < \infty,$$

где $\Phi(z)$ — любая присоединенная функция последовательности $\{\lambda_n\}$. При этом присоединенная функция $\Phi(z)$ определяется следующим образом: в случае, если ρ — не целое или если ρ — целое, но

$$\delta = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{L(r)} \left|\frac{1}{\rho} \sum_{|\lambda_n|<r} \frac{1}{\lambda_n^{\rho}}\right| < \infty, \quad L(r) = r^{\rho(r)-\rho}, \qquad (3)$$

$\Phi(z)$ есть каноническое произведение

$$\Phi(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\lambda_n}\right)\exp\left(\frac{z}{\lambda_n}+\frac{z^2}{2\lambda_n^2}+\ldots+\frac{z^p}{p\lambda_n^p}\right)$$

$([\rho]=p)$

с нулями в λ_n; в случае, если ρ — целое и $\delta = \infty$, $\Phi(z)$ есть каноническое произведение с нулями в λ_k и μ_n, где μ_n подбираются так, чтобы для последовательности, составленной из λ_k и μ_n, выполнялись условия вида (1) и (3) и чтобы, кроме того, было: расстояние любой из точек $\{\mu_n\}$ до точек из $\left\{\lambda_n \exp\left(\frac{n\pi i}{\rho}\right)\right\}$ $(k=0, 1, \ldots, 2\rho-1)$ больше $d|\lambda_n|^{1-\rho(|\lambda_n|)}$, $0 < d < 1$, и

$$|\mu_{n+1}| - |\mu_n| > k|\mu_n|^{1-\rho(|\mu_n|)}, \quad k > 0$$

(утверждается, что такие μ_n подобрать можно). При $\rho(r) \equiv \rho$ аналогичный результат, но в других терминах установлен референтом (РЖМат, 1957, 6916).

Далее рассматривается интерполяционная задача в классе M_H. Пусть множество $\{\lambda_n\}$ правильно распределено в плоскости (по поводу определения см. Левин Б. Я., Распределение корней целых функций, 1956, гл. II, § 1; РЖМат, 1958, 2027 К). Обозначим через $F(z)$ каноническую функцию (при ρ не целом $F(z)$ — каноническое произведение с нулями в λ_n, при ρ целом $F(z)$ — каноническое произведение, умноженное на $\exp(cz^{\rho})$) и через $H(\varphi)$ — индикатор роста $F(z)$:

$$H(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|F(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}}.$$

По определению M_H есть класс целых функций $f(z)$, для которых индикатор $h(\varphi) \leqslant H(\varphi)$ при уточненном порядке $\rho(r)$. Утверждается (теорема 3), что при любой системе $\{a_n\}$ со свойством

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|a_n|}{|\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)} H(\psi_n)} < 1 \quad (\psi_n = \arg\lambda_n)$$

интерполирующая функция $f(z)$ из класса M_H найдется тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\left|\frac{1}{F'(\lambda_n)}\right|}{|\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)} H(\psi_n)} \leqslant -1.$$

В конце изучается случай, когда узлы интерполяции расположены не во всей плоскости, а внутри некоторого угла и имеют угловую плотность. Формулируется результат, подобный предыдущему. А. Ф. Леонтьев

7495. О целых функциях, почти периодических в двух направлениях. Торнехаве (On entire functions almost periodic in two directions. Torneháve Hans), Math. scand., 1958, 6, № 2, 160—174 (англ.)

Изучаются целые функции $f(z) = f(x+iy)$, почти периодические в каждой полосе $|x| < a$ и в каждой полосе $|y| < b$. Нетривиальный пример такой функции был построен Петерсеном (Petersen R., Mat.-fys. medd. Kgl. danske vid. selskab, 1938, 15, № 8). Его функция предельно периодическая в обоих направлениях. В работе строится пример непостоянной целой функции $f(z)$, почти периодической в каждой из полос $|x| < a$, $|y| < b$, причем базис показателей Фурье функции $f(z)$ в каждом из указанных направлений является целым, двучленным. Б. М. Левитан

7496. К теории аналитических функций, наименее уклоняющихся от нуля в области. Мейман Н. Н., Докл. АН СССР, 1959, 126, № 2, 274—277

С единой точки зрения рассматривается ряд задач о функциях, наименее уклоняющихся от нуля, решение которых сводится к исследованию свойств функций, принадлежащих замыканию класса HB (РЖМат, 1959, 5767), изученного автором в предыдущих его работах. К таким задачам относятся, например, задачи:

1. Из всех функций вида $P_n(z) + \sqrt{1-z^2}\, Q_{n-1}(z)$, где $P_n(z)$ и $Q_{n-1}(z)$ — вещественные полиномы степени n и $n-1$ с фиксированными старшими коэффициентами, найти наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-1, 1]$.

2. Среди целых функций первого порядка и типа $\leqslant \sigma$, нормированных условиями $f_0 = a_0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = a_2$, найти наименее уклоняющуюся от нуля на всей вещественной оси.

3. Нахождение верхней грани производной допустимой аналитической функции (РЖМат, 1959, 5767), имеющей заданную мажоранту.

Общий метод иллюстрируется на ряде конкретных примеров. А. Ф. Тиман

7497. О теоремах Линделёфа о целых функциях. Шанкар (On Lindelöf's theorems on entire functions. Shankar Hari), J. Indian Math. Soc., 1958(1959), 22, № 2, 137—147 (англ.)

В известных теоремах Линделёфа о связи между типом целой функции и верхней плотностью ее корней (РЖМат, 1958, 2027 К, гл. 1, теоремы 14 и 15) при определении типа и плотности за функцию сравнения выбирается r^{ρ}, $0 < \rho < \infty$. Автор показывает, что эти же теоремы остаются в силе, если за функцию сравнения взять $r^{\rho}L(r)$, где $L(r) > 0$ непрерывна при $r \geqslant r_0$, $L(ar) \sim L(r)$ при любом фиксированном $a > 0$ и в случае, когда рассматриваются целые функции целого порядка, дополнительно предполагается, что $L(r)$ — неубывающая функция. На простых примерах показано, что это дополнительное предположение в случае целого порядка нельзя отбросить.

Примечание референта. Для случая, когда $L(r) = r^{\rho(r)-\rho}$, где $\rho(r)$ — уточненный порядок целой функции, обобщение теорем Линделёфа можно найти, например, в монографии Б. Я. Левина (РЖМат, 1959, 2027 К, гл. 1, теоремы 17 и 18). Общий случай, рас-

смотренный в реферируемой статье, может быть получен несущественной модификацией соответствующих доказательств. А. А. Гольдберг

7498. Улучшения некоторых границ для случайных ответов. Земанян (Improvements in some bounds on transient responses. Zemanian Armen H.), Proc. I. R. E., 1958, **46**, № 12, 1958—1959 (англ.)

Рассматривается система функций $Z(s)$, полюсы которых имеют отрицательные вещественные части и таких, у которых число нулей не больше числа полюсов. Пусть

$$Z(s) = K + \frac{1}{C_s} + \frac{K_2}{s^2} + \ldots — \quad (1)$$

разложение $Z(s)$ для достаточно больших $|s|$ и

$$Z(s) = r + k_1 s + k_2 s^2 + \ldots — \quad (2)$$

разложение $Z(s)$ в окрестности нуля. В случае, когда $\frac{I(\omega)}{\omega}$ монотонно убывает на полуоси $\omega \geqslant 0$, где $I(\omega)$ — мнимая часть $Z(s)$, $(s = j\omega)$, даны оценки сверху и снизу для функции

$$A(t) = r + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{I(\omega)}{\omega}\cos\omega t d\omega \quad (t \geqslant 0),$$

содержащие коэффициенты правых частей (1) и (2).

А. Ф. Тиман

7499. Некоторые теоремы о дробных интегралах. Флетт (Some theorems on fractional integrals. Flett T. M.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1959, 55, № 1, 31—50 (англ.)

Работа является продолжением исследований автора, относящихся к изучению функций типа Литлвуда—Пели и их применению к так называемой сильной суммируемости. Приведено довольно много результатов из указанной области. Сформулируем некоторые из них.

Пусть $\varphi(z)$ аналитична в $|z| < 1$ и

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^\infty c_n z^n, \quad \varphi_\alpha(z) = \sum_{n=1}^\infty (in)^{-\alpha} c_n z^n,$$

где α — любое вещественное число. Полагается

$$g_{k,\alpha}(\theta) = \left\{\int_0^1 (1-\rho)^{k-k\alpha-1} |\rho^{-1}\varphi_{\alpha-1}(\rho e^{i\theta})|^k d\rho\right\}^{\frac{1}{k}}.$$

Функция $g_{k,\alpha}(\theta)$ при $\alpha = 0$ обращается в функцию Литлвуда — Пели. Далее полагается

$$G^*_{k,\alpha}(\theta) = \left\{\int_0^1 \frac{|\varphi_\alpha(\rho e^{i\theta}) - \varphi_\alpha(\rho^2 e^{i\theta})|^k}{(1-\rho)^{1+k\alpha}} d\rho\right\}^{\frac{1}{k}}$$

и

$$G_{k,\alpha}(\theta) = \left\{\int_0^1 \frac{|\varphi_\alpha(e^{i\theta}) - \varphi_\alpha(\rho e^{i\theta})|^k}{(1-\rho)^{1+k\alpha}} d\rho\right\}^{\frac{1}{k}},$$

$$G_k(\theta) = G_{k,0}(\theta),$$

где через $\varphi_\alpha(e^{i\theta})$ обозначено радиальное предельное значение (оно предполагается существующим) функции $\varphi_\alpha(z)$ при $z = \rho e^{i\theta} \to e^{i\theta}$.

Справедливы:

Теорема 1. Если $k > 1$, $\alpha > 0$ и $g_{k,\alpha}(\theta)$ конечно, то $G_{k,\alpha}(\theta)$ существует и

$$G_{k,\alpha}(\theta) \leqslant B g_{k,\alpha}(\theta),$$

где постоянная B не зависит от $\varphi(z)$.

Теорема 2. Если $k \geqslant 2$, $0 < \alpha < 1$, $\lambda > 0$ и $\varphi(z) \in H^\wedge$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} G^\lambda_{k,\alpha}(\theta) d\theta \leqslant B \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(e^{i\theta})|^\lambda d\theta.$$

Теорема 2 (и даже несколько более общая) справедлива с заменой в ней $G_{k,\alpha}(\theta)$ на $G^*_{k,\alpha}(\theta)$.

Теорема 6. Если $1 < k \leqslant 2$, $\lambda > 1$, $\alpha > -1$ и если $G^*_{k,\alpha}(\theta) \in L^\lambda$, то $\varphi(z) \in H^\lambda$ и

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(e^{i\theta})|^\lambda d\theta \leqslant B \int_{-\pi}^{\pi} \left\{G^*_{k,\alpha}(\theta)\right\}^\lambda d\theta.$$

Пусть $\varphi(e^{i\theta})$ — предельное радиальное значение функции $\varphi(z)$ в точке $e^{i\theta}$. Обозначим через $\sigma^\beta_n(\theta)$ чезаровские средние порядка β от ряда $\sum c_n e^{in\theta}$, а через $\tau^\beta_n(\theta)$ — чезаровские средние от последовательности $nc_n e^{in\theta}$ и положим

$$H_{k,\beta}(\theta) = \left\{\sum_{n=0}^\infty \frac{|\sigma^\beta_n(\theta) - \varphi(e^{i\theta})|^k}{n+1}\right\}^{\frac{1}{k}},$$

$$h_{k,\beta}(\theta) = \left\{\sum_{n=1}^\infty \frac{|\tau^\beta_n(\theta)|^k}{n}\right\}^{\frac{1}{k}}.$$

Тогда справедливы

Теорема 13. 1) Если $k > 1$, $\beta > -1$ и $H_{k,\beta}(\theta)$ конечно, то

$$G_k(\theta) \leqslant B H_{k,\beta}(\theta).$$

2) Если $k > 1$, $\beta > -1$ и $G_k(\theta)$, $h_{k,\beta+1}(\theta)$ конечны, то

$$H_{k,\beta}(\theta) \leqslant G_k(\theta) + B h_{k,\beta+1}(\theta).$$

Теорема 16. Если $G_2(\theta) \in L^2$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(e^{i\theta})|^2 \log^+ |\varphi(e^{i\theta})| d\theta \leqslant AC \log(e + C),$$

где A — абсолютная постоянная, а $C = \int_{-\pi}^{\pi} G_2^2(\theta) d\theta$.

П. Л. Ульянов

7500. Об оценке голоморфной функции, обладающей двумя исключительными значениями *B*. Се Хуэй-чунь (Sur la limitation d'une fonction holomorphe admettant deux valeurs exceptionnelles *B*. Shieh Hui-chun). Sci. Rec., 1959, 3, № 6, 225—228 (франц.)

Доказываются четыре теоремы, усиливающие результаты Сюн Цин-лая (РЖМат, 1958, 64; 1 5), 8995, 9017). Их можно объединить в следующей формулировке. Пусть $f(z)$ голоморфна в $|z| < 1$ и при $0 < r < 1$ для некоторого $k = 0, 1, 2, \ldots$ $(f^{(0)} = f)$ $\overline{N}(r, f^{-1}) < -\lambda_1 \ln(1-r)$; $\overline{N}(r, (f^{(k)} - 1)^{-1}) < -\lambda_2 \ln(1-r)$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $f(0) \neq 0$, $f^{(k)}(0) \neq 1$. Тогда $\ln M(r, f) < (1-r)^{-1}[H_k(\ln^+|f(0)| - \ln r) - K_k \ln(1-r)]$, где H_k и K_k — положительные постоянные, зависящие только от k и $\max(\lambda_1, \lambda_2)$.

Примечание референта. Теорема 1 отличается от теоремы Сюн Цин-лая (РЖМат, 1953, 3676) тем, что вместо N стоит $\overline{N}$; ссылка на эту статью отсутствует.

А. А. Гольдберг

7501. О некоторых решениях линейного разностного уравнения с линейными коэффициентами. Леонтьев А. Ф., Матем. сб., 1958, 45, № 3, 323—332

Для уравнения

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k z+b_k)\,y(z+h_k)=0,\quad h_0<h_1<\ldots<h_n \qquad (1)$$

ищется решение, регулярное в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} z>\alpha$ и имеющее особые точки (они могут быть только простыми полюсами); такое решение автор называет решением типа Γ (по аналогии с гамма-функцией). Легко устанавливается, что при $a_0=0$ решение, регулярное в полуплоскости, регулярно на всей плоскости. Поэтому решения типа Γ возможны только при $a_0\neq 0$. В этом предположении ищется решение типа Γ, представимое в виде $y(z)=\int_C \gamma(t)\,e^{zt}\,dt$, где C — некоторый контур, $\gamma(t)$ — неизвестная функция. Подставляя это выражение в (1), можно показать, что оно будет решением, если $\gamma(t)$ и контур C удовлетворяют условиям $\vartheta(t)\gamma'(t)+[\vartheta'(t)-\vartheta(t)]\gamma(t)=0, \vartheta(t)\gamma(t)e^{tz}|_C=0$, где $\vartheta(t)=\sum_{k=0}^{n}a_k e^{h_k t}$, $\nu_1(t)=\sum_{k=0}^{n}b_k e^{h_k t}$. Отсюда выводится, что если $a_n=0$, то решение типа Γ существует и представимо в виде $y(z)=\int_{-\infty+id}^{+\infty+id}\gamma(t)\,e^{tz}\,dt$, где d определяется через постоянные, фигурирующие в уравнении (1). Если же $a_n\neq 0$, то решение типа Γ существует, если хотя бы в одном нуле a функции $\vartheta(t)$ функция $\gamma(t)=\dfrac{A}{\vartheta(t)}\exp\left(\int_{t_0}^{t}\dfrac{\vartheta_1(t)}{\vartheta(t)}\,dt\right)$ либо имеет особую точку, в окрестности которой неоднозначна (тогда $y(z)=\int_{-\infty}^{(a)}\gamma(t)e^{tz}dt$, контур берется по действительной оси от $-\infty$ до a, обходит a против часовой стрелки и снова идет в $-\infty$), либо $\gamma(t)$ в точке a регулярна, или имеет существенно особую точку, или полюс порядка $<s$, s — кратность нуля a (в этом случае $y(z)=\int_{-\infty}^{(a)}[\gamma(t)\ln(t-a)+\psi(t)]\,e^{tz}\,dt$, $\psi(t)$ — однозначна и регулярна при $t\neq a$). Если же в каждом нуле $\vartheta(t)$ функция $\gamma(t)$ имеет полюс кратности не меньшей, чем кратность нуля, то уравнение (1) решения типа Γ не имеет. Для доказательства автор сперва показывает, что в этом случае функция $\eta(t)=\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\dfrac{\vartheta_1(t)}{\vartheta(t)}\,dt\right)$ есть квазиполином, т. е. $\eta(t)=\sum_{m=0}^{r}\beta_m e^{p_m t}$, а затем подействовав на обе части уравнения (1) оператором $M(y)=\sum_{m=0}^{r}\beta_m y(z+p_m)$, показывает, что после сокращения на z получается уравнение с постоянными коэффициентами; если бы (1) имело решение типа Γ, то и полученное уравнение с постоянными коэффициентами имело бы решение типа Γ, что невозможно. Автор отмечает, что этот результат в случае, когда $h_0, h_1, \ldots, h_n$ соизмеримы, был им получен раньше не только для разностного, но и для дифференциально-разностного уравнения (Тр. Горьковск. пед. ин-та, физ.-матем. фак., 1951, 3—30).

М. Г. Хапланов

7502. Одно свойство целых функций малого порядка и конечного типа. Рахман (A property of entire functions of small order and finite type. Rahman Q. I.), Duke Math. J., 1959, 26, № 3, 407—408 (англ.)

Автор доказывает следующее утверждение:

Если $f(z)$ — целая функция конечного порядка $\rho\ (0<\rho<2)$ и нормального типа, то

$$\left|\int_R^S \ln|f(z)|\,|z|^{-1-\rho}\,d|z|\right|=O(1),$$

если R и $S\to\infty$ так, что $R<S$ и $S/R=O(1)$, а z изменяется по любому пути, соединяющему R и S.

Примечание референта. Незначительное изменение доказательства (рассмотрение вместо $f(z)$ функции $f(z)f(-z)$ функции $f(z)f(\omega z)\ldots f(\omega^{k-1}z)$, где $k=[\rho+1]$, $\omega=\exp(2\pi i k^{-1})$) позволяет избежать ограничения $\rho<2$.

И. В. Островский

7503. К теории функций классов *HB* и *B*. Мейман Н. Н., Докл. АН СССР, 1959, 125, № 5, 974—977

Статья тесно примыкает к другой статье автора (ЖМат, 1960, 3935), в ней использованы те же обозначения. Приведено следующее обобщение теоремы Руше.

Теорема 1. Пусть $\omega(z)$ — функция класса B в G (или $\widetilde{G}$), а $f(z)$ — допустимая в этой области функция; на границе области $|f(z)|\leqslant|\omega(z)|$ и при любом $\eta>0$ $|f(z)/\omega(z)|<1+\eta$, $|\overline{f}(z)/\omega(z)|<1+\eta$ при $\rho(z)>R(\eta)$. Тогда при любом $|t|<1$ функция $\omega(z)-tf(z)\in B$ в G (или $\widetilde{G}$) и число нулей этой функции равно числу нулей функции $\omega(z)$.

В теореме 2 исследуется изменение числа нулей $\omega(z)-tf(z)$ и $(\overline{\omega})(z)-\overline{t}\,\overline{f}(z)$ при движении параметра по некоторой кривой. Пусть γ — система интервалов $\gamma^\nu=(x_{0\nu}, x_{1\nu})$ на действительной оси такая, что $\{\operatorname{Im} z\neq 0\}+\sum_\nu\gamma^\nu=G_\beta$. Индекс $\nu=0$, если $0\in\gamma^\nu$. Пусть $\omega(z)=u(z)+iv(z)\in HB$ в $\operatorname{Im} z>0$, $v(z)$ имеет хотя бы по одному нулю x_ν в γ^ν и $u(z)$ не равна нулю в концах γ^ν и имеет α_ν нулей в γ^ν. Обозначим

$$\gamma_\nu(z)=\left[\left(1-x_{0\nu}^{-1}z\right)\left(1-x_{1\nu}^{-1}z\right)\right]^{1/2}\left(1-x_\nu^{-1}z\right)^{-1},\ \nu\neq 0,$$

$$\gamma_0(z)=[(z-x_{00})(z-x_{10})]^{1/2}(z-x_0)^{-1},$$

где ветви корней выбраны так, что $\gamma_\nu(z)$ положительны на верхних краях разрезов β и отрицательны на нижних краях. Вводится функция

$$\omega_{\gamma,A}(z)=u(z)+iAv(z)\prod_\nu\gamma_\nu(z),\quad A>0.$$

Теорема 3. Число нулей $\omega_{\gamma,A}(z)$ в области G_β равно $\sum\alpha_\nu$. Для $\omega_{\gamma,A}(z)\in B$ в G_β необходимо и достаточно, чтобы $\sum\alpha_\nu<+\infty$. Для $\omega_{\gamma,A}(z)\in HB$ необходимо и достаточно, чтобы $\alpha_\nu=0$ при всех ν. Далее подробно рассмотрен случай, когда γ состоит из одного интервала $(-c, c)$. Получены различные обобщения результатов Хермандера (РЖМат, 1957, 6312), в том числе

Теорема 5. Пусть $|\omega(x)|\equiv\text{const}$ и $f(\zeta)$ — функция, допустимая на римановой поверхности R, являющейся образом G_β при отображении $\zeta=\sqrt{z^2-c^2}$, $\operatorname{Im} f(\zeta)=0$ при $\operatorname{Im}\zeta=0$, $F(z)=f(\sqrt{z^2-c^2})$, $F(-c)=u(-c)$, $F(c)=u(c)$. Тогда $f(\zeta)\neq u(x_0)$ при $|\zeta|\leqslant c$.

Рассмотрены примеры. Доказательства не приводятся. Имеются опечатки, в том числе в списке литературы.

А. А. Гольдберг

7504. О нормальных ограниченных семействах голоморфных функций. **Вильсон** (Sur les familles normales bornées de fonctions holomorphes. Wilson Alan), C. r. Acad. sci., 1959, 248, № 24, 3391—3392 (франц.)

Пойа (Polya, Math. Z, 1929, 29, 549—640) установил ряд замечательных теорем о связи роста по лучам целой функции $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k(f)}{k!}z^k$ экспоненциального типа и расположением особых точек рядов $\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(f)\,z^{-k-1}$ и $\psi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f(k)\,z^k$. Автор называет семейство целых функций $\mathfrak{F}=\{f(z)\}$ целым семейством экспоненциального типа, если а) для любого $k=0,1,2,\ldots$ конечна величина $A_k=\sup\limits_{\mathfrak{F}}|a_k(f)|$ и $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k^{1/k}=0$, б) $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\,r^{-1}\{\sup\limits_{\mathfrak{F}}\max\limits_{|z|=r}|f(z)|\}<\infty$ и анонсирует четыре теоремы, являющиеся аналогами теорем Пойа.

И. В. Островский

7505. Множество значений трансцендентных функций. **Хоэйзель** (Wertevorrat transzendenter Funktionen. Hoheisel G.), Sitzungsber. Berliner Math. Ges., 1957—1958, 20—23 (нем.)

Доказана следующая теорема: Если $f(z)$ и $h(z)$ — целые функции и $T(r,h)<\frac{1}{2}T(r,f)$, то $N(r,a,f-h)>\frac{1}{2}T(r,f)-O[\ln(rT(r,f))]>0$ для всех a, за возможным исключением множества a плоской меры нуль. Этот и другие подобные результаты, показывающие, что качественная сторона теоремы Руше остается в силе, если в ее условии неравенства между $|f(z)|$ и $|h(z)|$ заменить неравенствами между их неванлинновскими характеристиками, получены путем сопоставления хорошо известных теорем. В качестве следствия получено одно высказывание о целых решениях обыкновенных дифференциальных уравнений. Автору, по-видимому, неизвестна теорема Виттиха—Валирона (Виттих Г., Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям, М., 1960, стр. 115), содержащая это следствие автора как весьма частный случай и показывающая, что большинство ограничений можно отбросить.

А. А. Гольдберг

7506. О прямых Жюлиа рядов Дирихле. **Танака** (On Julia-lines of Dirichlet series. Tanaka Chuji), Kodai Math. Semin. Repts, 1958, 10, № 4, 161—171 (англ.)

Рассматривается ряд Дирихле $F(s)=\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ ($s=\sigma+it$, $\lambda_n\uparrow\infty$), сходящийся во всей плоскости. (R)-порядок функции $F(s)$ обозначается ρ (определение (R)-порядка см. Мандельбройт С., Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. Изд-во ин. лит. 1955, стр. 253; РЖМат, 1956, 6553 К). Прямая $t=t_0$ называется прямой аргументов для $F(s)$, если в любой горизонтальной полосе, содержащей эту прямую, $|F(s)|\to\infty$ равномерно и $\arg F(s)$ принимает бесконечное множество раз любое значение. Если в любой полосе, содержащей прямую $t=t_0$, справедливо утверждение, содержащееся в теореме Пикара, то $t=t_0$ — прямая Жюлиа. В статье доказывается следующая теорема:

Если $\varliminf\limits_{n\to\infty}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=h>0$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\frac{n}{\lambda_n}=\delta$ и $F(s)$ имеет (R)-порядок ρ, то в случае $\rho>0$ во всякой горизонтальной полосе ширины $2\pi\delta$ имеется по крайней мере одна прямая Жюлиа, а в случае $\rho=0$ во всякой такой полосе имеется по крайней мере или одна прямая Жюлиа, или одна прямая аргументов для $F(s)$ (если $\delta=0$, то при $\rho>0$ всякая горизонтальная прямая является прямой Жюлиа, а при $\rho=0$ всякая горизонтальная прямая является или прямой Жюлиа или прямой аргументов). В этом утверждении содержатся некоторые теоремы Мандельбройта (в частности, при малом ρ теорема 4. VI из цитированной книги, стр. 260).

Г. Л. Лунц

7507. Разложение мероморфных функций в обобщенный ряд Маклорена. **Джрбашян М. М.**, Докл. АН СССР, 1959, 125, № 4, 707—710

Пусть $\{a_k\}$, $|a_k|>1$,— произвольная последовательность комплексных чисел, занумерованных в порядке возрастания их модулей и удовлетворяющих условию $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\infty$. Через $R\{a_k\}$ обозначается класс функций $\Phi(z)$, мероморфных на всей плоскости z, все полюсы которых расположены среди точек последовательности $\{a_k\}$, причем порядок кратного полюса не превосходит кратности соответствующей точки в последовательности $\{a_k\}$. Полагая $\alpha_k=\frac{1}{\bar{a}_k}$, автор для удобства переходит к рассмотрению класса $R\{1/\bar{\alpha}_k\}$. Рассматривается система рациональных дробей $\{\varphi_n(z)\}$ с полюсами в точках $a_k=1/\bar{\alpha}_k$:

$$\varphi_0(z)=\left(\frac{1-|\alpha_0|^2}{2\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{1-\bar{\alpha}_0 z},$$

$$\varphi_n(z)=\left(\frac{1-|\alpha_n|^2}{2\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{1-\bar{\alpha}_n z}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{z-a_k}{1-\bar{a}_k z}\quad(n=1,2,\ldots).$$

Система $\{\varphi_n(z)\}$ ортонормальна на $|\zeta|=1$ (Walsh Interpolation and approximation by rational functions, N. Y., 1935). Изучению свойств рядов Фурье по системе $\{\varphi_n(z)\}$ была посвящена работа автора (РЖМат, 1958, 4802). Теперь автор применяет ряды по системе $\{\varphi_n(z)\}$ для представления функций, мероморфных во всей плоскости. Доказывается

Теорема. Пусть $\Phi(z)$ — мероморфная функция из класса $R\{1/\bar{\alpha}_k\}$. Тогда имеет место разложение $\Phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\varphi_n(z)$, равномерно и абсолютно сходящееся в любой ограниченной и замкнутой области, не содержащей точек последовательности $\{1/\bar{\alpha}_k\}$ ($k=0,1,2,\ldots$). Для коэффициентов $\{c_n\}$ справедливы формулы

$$c_n=\int_{|\zeta|=1}\Phi(\zeta)\,\overline{\varphi_n(\zeta)}\,|d\zeta|=$$

$$=\frac{\sqrt{(1-|\alpha_n|^2)(1-|\alpha_{n+1}|^2)}}{2\pi i}\times$$

$$\times\int_{|\zeta|=R}\Phi\frac{d\zeta}{(1-\bar{\alpha}_n\zeta)(1-\bar{\alpha}_{n+1}\zeta)\,\varphi_{n+1}(\zeta)},$$

где R — любое число из подходящим образом выбранного интервала $(|\alpha_0|, ln)$ $ln=1/|\alpha_n|$ (в случае, если $|\alpha_n|<|\alpha_{n-1}|$).

Г. Ц. Тумаркин

7508. Пикаровские значения мероморфных функций и их производных. **Хейман** (Picard values of meromorphic functions and their derivatives. Hayman W. K.), Ann. Math., 1959, 70, № 1, 9—42 (англ.)

Основные результаты статьи (некоторые из них приводим в ослабленной формулировке):

Теорема 3. Если $f(z)$ мероморфна в $z \neq \infty$ и имеет конечное число a-точек ($a \neq \infty$), то все производные $f^{(n)}(z)$ принимают бесконечное число раз любое конечное, не равное 0 значение.

Эта теорема была известна ранее при дополнительном предположении $\delta(\infty, f) = 1$ (Виттих Г., Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям, М., 1960, стр. 50).

Теорема 5. Если $f(z)$ мероморфна в $z \neq \infty$ и вместе с $f''(z)$ имеет только конечное число нулей и полюсов, то $f(z) = R(z) \exp P(z)$, где $R(z)$ — рациональная функция, $P(z)$ — многочлен. Если $f(z)$ и $f''(z)$ вообще не имеют нулей, то $f(z) = \exp(az + b)$ или $(az + b)^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$

Автор отмечает, что если предполагать $f(z)$ целой функцией без нулей, то более сильный результат сформулирован в статье Тумура (Tumura Y., Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 1937, 19, 29—35), но его доказательство содержит существенные пробелы.

Теорема 6. Если $f(z)$ регулярна в $|z| < 1$ и $\overline{\lim}_{r \to \infty} (1 - r) \ln \ln M(r, f) = +\infty$, то $f(z)$ или $f''(z)$ принимают каждое конечное значение бесконечное число раз.

Теорема 7. Если $f(z)$ мероморфна в $|z| < \infty$ и $f(z) \neq 0$, $f'(z) \neq 0$, $f''(z) \neq 0$, то $f(z) = \exp(az + b)$ или $f(z) = (az + b)^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$

Теорема 9. Если $f(z)$ мероморфна в $z \neq \infty$ и не является рациональной функцией, n — натуральное число $\geqslant 5$ и $a \neq 0, \infty$, то $f'(z) - a[f(z)]^n$ принимает бесконечное число раз каждое конечное значение.

Для доказательства этих теорем автор использует ряд новых интересных неравенств, среди которых выделим следующее. Если $f(z)$ мероморфна в $|z| < R \leqslant \infty$, то при $r < R$

$$T(r,f) < \left(2 + \frac{1}{k}\right) N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \left(2 + \frac{2}{k}\right) \overline{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)} - 1}\right) + S(r),$$

где $S(r)$ — остаточный член, удовлетворяющий обычным в неванлинновской теории условиям (теоремы 1 и 2).

А. А. Гольдберг

7509. Фуксовы функции второго семейства. Лежандр (Fonctions fuchsiennes de la deuxième famille. Legendre Robert), C. r. Acad. sci., 1959, 248, № 22, 3097—3098 (франц.)

Изучаются фуксовы функции второго семейства (к этому семейству Пуанкаре относит те из фуксовых функций, для которых каждая вершина фундаментального многоугольника этой функции принадлежит параболическому циклу, см. Acta math., 1882, 1). Ряды

$$P_l = \sum [(a - cz_l)z + (b - dz_l)]^{-4} = \sum H[\tau(z)](cz + d)^{-4},$$

$$H(z) = (z - z_l)^{-4},$$

где z_l — вершина фундаментального многоугольника, a, b, c, d — коэффициенты линейного преобразования $z' = \tau(z)$ группы и сумма берется по тем слагаемым, в которых точка $z' = \tau(z)$ принадлежит фундаментальной области параболического преобразования с неподвижной точки z_l, являются тета-фуксовыми функциями. (Для построения тета-ряда используется обычно рациональная функция $H(z)$, ограниченная на главной окружности; в рядах P_l функция $H(z)$ не ограничена на главной окружности). Все фуксовы функции группы выражаются рационально через функции P_l. Приводятся результаты, в которых выявлены предельные значения, нули и полюсы функций P_l, и поведение этих функций при линейных преобразованиях аргумента и фундаментального многоугольника. Аналогичные результаты о симметричных фуксовых функциях второго семейства автор сообщил в своей предыдущей работе (РЖМат, 1959, 7965).

А. Г. Нафталевич

7510. Теорема относительно существования деформируемых конформных отображений. Хейнс (A theorem concerning the existence of deformable conformal maps. Heins Maurice), Semin. Analyt. Funct. Vol. 2. Princeton, N. J., Inst. Advanced Study, (1958), 32—38 (англ.)

Автор приводит изложенное им также в другой статье (РЖМат, 1959, 5777) доказательство теоремы о необходимом и достаточном условии для принадлежности гиперболической поверхности классу D, состоящему из римановых поверхностей, допускающих конформное отображение в себя. См. по этому поводу также работу автора РЖМат, 1959, 7968.

Г. Ц. Тумаркин

7511. Некоторые аспекты теории эллиптических модулярных и абелевых модулярных функций. Розати (Qualche aspetto della teoria delle funzioni ellittiche modulari ed abeliane modulari. Rosati Mario), Archimede, 1956, 8, № 4-5, 145—153 (итал.)

Обзорная статья, не содержащая новых результатов.

А. А. Кириллов

7512. Абелевы модулярные функции в лекциях и неопубликованных рукописях Фабио Конфорто. Розати (Funzioni abeliane ed abeliane modulari nelle lezioni e nei manoscritti inediti di Fabio Conforto. Rosati Mario), Rend. mat. e applic., 1955, 14, № 4, 696—711 (итал.)

Статья посвящена памяти Ф. Конфорто. Является частью обзора научного наследства Конфорто, который автор намерен опубликовать совместно с проф. Бенедикти. Приведены некоторые результаты Конфорто и вопросы, поставленные в его работах по теории абелевых модулярных функций.

А. А. Кириллов

7513. О поведении среднего значения и коэффициентов Фурье целых автоморфных форм. Петерсон (Über Betragmittelwerte und die Fourier-Koeffizienten der ganzen automorphen Formen. Petersson Hans), Arch. Math., 1958, 9, № 3, 176—182 (нем.)

Рассматриваются целые автоморфные формы типа $(\Gamma, -r, v)$, где Γ — дискретная группа дробно-линейных преобразований верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, фундаментальная область которой имеет параболическую вершину в ∞. Как известно, автоморфную форму $f(z)$ в этом случае можно разложить в ряд Фурье

$$f(z) = \sum_{n+\varkappa > 0} b_{n+\varkappa} e^{2\pi i (n+\varkappa) z},$$

где $\varkappa$ определяется из условия $v(u) = e^{2\pi\varkappa l}$, $0 \leqslant \varkappa < 1$ ($u(z) = z + 1$). Основным результатом работы являются следующие оценки для коэффициентов Фурье:

$$b_{n+\varkappa} = O(n^{r-1}), \quad r > 2;$$

$$b_{n+\varkappa} = O(n \ln n) \quad r = 2;$$

$$b_{n+\varkappa} = O(n^{r/2}), \quad 0 < r < 2; \quad r \neq 2^{-h};$$

$$b_{n+\varkappa} = O(n^{r/2} \ln^{r/2} n), \quad r = 2^{-h}, \quad h = 1, 2, \ldots$$

Вначале дается оценка среднего значения $M_y(f) = \int_0^1 |f(x + iy)|\, dx$ при $y \to 0$, согласно которой $M_y(f) = O(y^{1-r})$ при $r > 2$, $M_y(f) = O(y\,|\ln y|)$ при $r = 2$ и $M_y(f) = O(y^{-r/2})$ при $1 < r < 2$. Оценка эта получается при помощи некоторых соображений из гиперболической геометрии. Из оценки $M_y(f)$ при $r > 1$ автор с помощью неравенства Коши выводит оценку $M_y(f)$ для всех r. Из оценки $M_y(f)$ оценки коэффициентов получаются обычным способом.

И. И. Пятецкий-Шапиро

7514. Об определении аналитической функции многих комплексных переменных. Хитоцумацу, Сугаку, 1956, 8, № 1, 25 (японск.)

Автор отмечает, что аналитическую функцию многих комплексных переменных можно определить следующим способом: $f(z)$, $z=(z_1,\ldots,z_n)$ аналитична в области Ω, если для каждой точки $a=(a_1,\ldots,a_n)$ существует набор постоянных $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ и функция $\varepsilon(z;a)$, определенная в Ω, такая, что $\lim_{z\to a}\varepsilon(z;a):\sum_{j=1}^{n}|z_j-a_j|=0$, причем $f(z)=f(a)+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(z_j-a_j)+\varepsilon(z;a)$.

M. Ohtsuka

Перевод из Math. Revs., 1959, 20, № 4, 2471.

7515. Проблема Кузена. Хитоцумацу. Сигаку, 1959, 8, № 2, 102—117 (японск.)

Обзорная статья о проблеме Кузена. Гл. 1. Определение проблемы Кузена и классические результаты. Гл. 2. Применение теории пучков. Гл.3. Многообразия Штейна. К. К. Look (Лу Ци-кэн)

7516. Об интегралах Темлякова и граничных свойствах аналитических функций многих комплексных переменных. Айзенберг Л. А., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1959, 77, 13—35

В § 1 приводятся доказательства предложений, анонсированных ранее (РЖМат, 1959, 9033). В §§ 2 и 3 интегральные представления Темлякова (РЖМат, 1957, 7006 и 1958, 7) распространяются на случай кратнокруговых областей пространства C^n, удовлетворяющих ряду условий. Для этих областей рассматриваются классы голоморфных функций α, β, h_δ (аналогичные известным классам A, B, H_δ голоморфных функций одного комплексного переменного) и устанавливается ряд условий принадлежности функций к этим классам. Б. А. Фукс

7517. Интеграл Шварца и формулы Гильберта для аналитических функций многих комплексных переменных. Какичев В. А., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 2, 80—93

Через $C_n(z^0,R)$ обозначается круговой полицилиндр с центром в точке $z^0=(z_1^0,z_2^0,\ldots,z_n^0)$ радиуса $R(R_1,R_2,\ldots,R_n)$. Координаты точек остова границы бицилиндра $C_2(0,\rho)$, где $\rho_k<R_k$, обозначаются через $\tau_k=\rho_k e^{i\sigma_k}$, а координаты точек, лежащих внутри этого бицилиндра, — через $z_k=r_k e^{i\varphi_k}$, где $0<r_k<\rho_k$, $0\leqslant\sigma_k,\ \varphi_k\leqslant\pi$, $k=1,2$. Для функции $f(z_1,z_2)\equiv f(z)=u(z)+iv(z)=u(r,\varphi)+iv(r,\varphi)$, регулярной в бицилиндре $C_2(0,R)$, установлена формула Шварца

$$f(z_1z_2)=i\beta_{00}+\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho_1\sigma)\,[T_2(z,\tau)-2]\,d\sigma_1\,d\sigma_2,\quad(1)$$

где $\beta_{00}=\operatorname{Im}f(0,0)$ и $T_2(z,\tau)=\prod_{k=1}^{2}\left(\frac{\tau_k+z_k}{\tau_k-z_k}+1\right)$.

Для n переменных формула Шварца приводится без доказательства. Она имеет вид:

$$f(z)=i\beta+\frac{2}{(4\pi)^n}\int_{[0,2\pi]}u(\rho,\sigma)\,[T_k(z,\tau)-2^{n-1}]\,dv_\sigma,\quad(2)$$

где

$$T_n(z,\tau)=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\tau_k+z_k}{\tau_k-z_k}+1\right),\ dv_\sigma=d\sigma_1,d\sigma_2,\ldots,d\sigma_n,$$

а $\int$ означает n интегралов, взятых от 0 до 2π. Формула (2) и установленная автором в другой работе одна из формул Сохоцкого для многомерного интеграла типа Коши используются для распространения формул Гильберта на случай многих комплексных переменных. Приводятся некоторые приложения полученных результатов.

Доказывается

Теорема. Если для последовательности $\{f_k(z)=u_k(r,\varphi)+iv(r,\varphi)\}$ аналитических функций в некоторой полицилиндрической области D функций, последовательность их действительных частей $\{u_k(r,\varphi)=\operatorname{Re}f_k(z)\}$ сходится равномерно внутри D и, кроме того, сходятся значения функций $f_k(z)$ в какой-либо точке $z^0=(z_1^0,z_2^0,\ldots,z_n^0)\in D$, то $\{f_k(z)\}$ сходится равномерно внутри D.

Примечание референтов. Автору, видимо, неизвестна формула А. А. Темлякова (РЖМат, 1956, 3784)

$$F(w,z)=i\operatorname{Im}F(0,0)+\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}dt\int_0^1 d\tau\int_0^{2\pi}\left[2\left(\frac{\zeta}{\zeta-u}\right)-1\right]\times$$

$$\times\operatorname{Re}F(r_1(\tau)\zeta,\ r_2(\tau)\zeta e^{-it})\,d\varphi,\ \zeta=e^{i\varphi},$$

$$u=\tau\frac{w}{r_1(\tau)}+(1-\tau)\frac{ze^{it}}{r_2(\tau)},$$

из которой при $r_1(\tau)=R_1$, $r_2(\tau)\equiv R_2$ (R_1 и R_2 — постоянные положительные числа) непосредственно вытекает формула (1). И. И. Багрин, А. А. Темляков

7518. Граничные свойства интеграла типа Коши многих переменных. Какичев В. А., Уч. зап. Шахтинск. гос. пед. ин-т, 1959, 2, № 6, 25—90

Изучаются граничные свойства интеграла типа Коши многих переменных для полицилиндрических областей, остовы границ которых являются топологическими произведениями простых замкнутых гладких контуров. Функция $\varphi(t)=\varphi(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ на остове Δ удовлетворяет условию Гёльдера ($\varphi(t)\in H(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$), если для любых двух точек $t=(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ и $\tau=(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n)$ остова Δ имеет место неравенство:

$$|\varphi(t)-\varphi(\tau)|<\sum_{k=1}^{n}A_k|t_k-\tau_k|^{\alpha_k},\ 0<\alpha_k\leqslant 1,$$

$$k=1,2,\ldots,n.$$

Рассматривается интеграл типа Коши

$$\Phi(z_1,\ldots,z_n)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\Delta\frac{f(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n)}{\prod_{k=1}^{n}(\tau_k-z_k)}d\tau_1d\tau_2\ldots d\tau_n;\quad(1)$$

если $z=(z_1,\ldots,z_n)\in\Delta$, то вводится понятие главного значения особого интеграла (1). Доказывается, что если $f(\tau)\in H(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, то главное значение этого особого интеграла существует. Выводится n формул, обобщающих на случай n переменных известные формулы Сохоцкого. Далее автор получает следующее предложение: если плотность $f(\tau)$ интеграла (1) удовлетворяет на остове Δ условию Гёльдера $H(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, то его граничные значения на остове Δ удовлетворяют условию $H(\alpha_1-\varepsilon,\ldots,\alpha_n-\varepsilon)$, где ε — сколь угодно малое положительное число. Если $\alpha_k<1$, $k=1,\ldots,n$, то в последнем предложении условие $H(\alpha_1-\varepsilon,\ldots,\alpha_n-\varepsilon)$ можно, вероятно, заменить условием $H(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, однако доказать это автору, по его словам, пока не удалось. На случай n переменных распространяется известная формула Пуанкаре — Бертрана перестановки особых интегралов типа (1). В случае $n=2$ полученная формула имеет следующий вид:

$$\int_\Delta\frac{d\sigma_1\,d\sigma_2}{(\sigma_1-t_1)(\sigma_2-t_2)}\int_\Delta\frac{\varphi(\sigma_1,\sigma_2,\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2}{(\tau_1-\sigma_1)(\tau_2-\sigma_2)}=$$

$$=\pi^2\varphi(t_1,t_2,t_1,t_2)-\pi^2\left[\int_{D_1'}d\tau_1\int_{D_1'}\frac{\varphi(\sigma_1,t_2,\tau_1,t_2)\,d\sigma_1}{(\sigma_1-t_1)(\tau_1-\sigma_1)}+\right.$$

$$+\int_{D_2'} d\tau_2 \int_{D_2} \frac{\varphi(t_1, \sigma_2, t_1, \tau_2)\, d\sigma_2}{(\sigma_2 - t_2)(\tau_2 - \sigma_2)}\Bigg] +$$

$$+\int_{\Delta} d\tau_1\, d\tau_2 \int_{\Delta} \frac{\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2}{\prod_{k=1}^{2} (\sigma_k - t_k)(\tau_k - \sigma_k)},$$

где Δ — остов границы области $D = D_1 \times D_2$, D_k' — граница области D_k, $k = 1, 2$.

В заключение дается условия аналитической распространимости непрерывной функции, заданной на остове границы полицилиндрической области. Имеются опечатки. Л. А. Айзенберг

7519. Распространение теоремы Прингсхейма. Бавринн И. И., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1959, **77**, 127—129

Известная теорема Прингсхейма о расположении особых точек на границе круга сходимости переносится на случай нескольких переменных. Автор рассматривает функции, аналитические либо в бицилиндре $\{|w| < R, |z| < R\}$, либо в гипероконусе $\{|w| + |z| < R\}$. Приведем одну из двух доказываемых теорем.

Теорема 5. Если коэффициенты ряда

$$\varphi(w, z) = \sum_{m, n=0}^{\infty} a_{m,n} w^m z^n, \qquad (1)$$

абсолютно сходящегося в гипероконусе $\{|w| + |z| < R\}$, суть действительные неотрицательные числа, то по крайней мере одна точка (w_0, z_0), где $\arg w_0 = 0$, $\arg z_0 = 0$, на гиперповерхности $\{|w| + |z| = R\}$, является особой для суммы ряда (1).

Примечание референта. В формулировке теоремы 5 не хватает очевидного требования об отсутствии сходимости ряда (1) в гипероконусе $\{|w| + |z| = R_1\}$, где $R_1 > R$. Л. И. Ронкин

7520. О полноте некоторых систем аналитических функций двух переменных. Литвинчук Г. С., Докл. АН СССР, 1959, **128**, № 1, 37—40

Через $A_{r,t}$ обозначается пространство функций, аналитических в открытом бицилиндре $\{|w| < r, |z| < t\}$, а через $\overline{A}_{R,T}$ — аналитических в замкнутом бицилиндре $\{|w| \leqslant R, |z| \leqslant T\}$. Устанавливается, что если

$$f(w, z) = \sum_{k, l=0}^{\infty} a_{kl} w^k z^l \in A_{r,t};\ a_{kl} \neq 0,\ k, l = 0, 1, \ldots;$$

$$\overline{\lim_{k+l \to \infty}} \sqrt[k+l]{|a_{kl}|\, r^k t^l} = 1,$$

о для любых R и T, $0 < R < r$, $0 < T < t$, системы

$$f_{m,n}(w, z) = \frac{1}{w^m z^n} \int_0^w \ldots \int_0^w (d\xi)^m \int_0^z \ldots \int_0^z f(\xi, \tau)\, (d\tau)^n,$$

$$f_{m,n}(w, z) = \int_0^w \xi^{m-1} d\xi \int_0^z \tau^{n-1} f(\xi, \tau)\, d\tau,$$

$$f_{m,n}(w, z) = \sum_{k, l=0}^{\infty} k^m l^n a_{kl} w^k z^l,\ m, n = 0, 1, \ldots,$$

полны в $\overline{A}_{R,T}$. Устанавливается также, что если

$$f(w, z) = \sum_{k, l=0}^{\infty} a_{kl} w^k z^l \in A_{R,T},\ a_{m_0} = a_{0n} = 0,$$

$$m, n = 1, 2, \ldots,$$

и все другие коэффициенты a_{kl} отличны от нуля, то система

$$f_{m,n}(w, z) = \sum_{k, l=0}^{\infty} a_{km, ln} w^{km} z^{ln},\ m, n = 1, 2, \ldots,$$

полна в $A_{R,T}$, а если $f(w, z) \in A_{1,1}$. $f(0, 0) = 0$,

$$\frac{\partial^m f(0, 0)}{\partial w^m} = 0,\ m = 1, 2, \ldots; \quad \frac{\partial^n f(0, 0)}{\partial z^n} = 0,\ n = 1, 2, \ldots;$$

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial w \partial z} = 1,$$

то система 1, $f(w^m, z^n)$, $m, n = 1, 2, \ldots$, полна в $A_{1,1}$.

С. А. Еремин

7521. Одновременное аналитическое продолжение. Эдуардс (Simultaneous analytic continuation. Edwards R. E.), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 3, 264—272 (англ.)

Средствами теории линейных топологических пространств изучается одновременное аналитическое продолжение семейств аналитических функций. Приводится новое доказательство теорем Бохнера и Мартина об особенностях в граничных точках (Бохнер С., Мартин У. Т., Функции многих комплексных переменных, М., Изд-во ин. лит., 1951, стр. 117—119, 1 1—122), опирающееся на обобщение леммы И. М. Гельфанда о выпуклых функционалах (Сообщ. Харьковск. матем. о-ва, 1936, **13**, 35—40). Затем рассмотрен случай многолистных областей. Пусть X, Y — два σ-компактных комплексно-аналитических многообразия, и θ — локально аналитический изоморфизм X в Y. Пусть $H(X)$, $H(Y)$ — линейные топологические пространства всех функций, аналитических соответственно в X и Y с обычной топологией. Если $f \in H(X)$, $g \in H(Y)$, причем $f = g \circ \theta$, то g называется продолжением f относительно θ. Если такое продолжение существует, то оно единственно. С использованием некоторых свойств линейных операций в пространствах Фреше и теоремы Банаха о замкнутом графике устанавливается.

Теорема 3. Пусть F — замкнутое векторное подпространство $H(X)$ (соответственно ограниченное замкнутое абсолютно выпуклое множество в $H(X)$), причем для любой $f \in F$ существует продолжение $g \in H(Y)$ относительно θ. Тогда отображение $f \to g$ из F в $H(Y)$ непрерывно (соответственно продолжения g образуют ограниченное подмножество $H(Y)$).

Пусть $C^{(n)}$ — n-мерное комплексное пространство.

Теорема 4. Пусть X — многолистная область над C^n, φ — проекция X в C^n, F — либо замкнутое векторное подпространство $H(X)$, либо ограниченное замкнутое абсолютно выпуклое множество. Пусть $\widetilde{X}$ — область голоморфности F, $\widetilde{\varphi}$ — проекция $\widetilde{X}$ в C^n, θ — естественное отображение X в $\widetilde{X}$. Если всякая $f \in F$ есть предел последовательности функций вида $g \circ \varphi \in F$, $g \in H(\widetilde{\varphi}(\widetilde{X}))$ в топологии $H(X)$, то область X однолистна.

В заключение рассматривается аналитическое продолжение семейств функций, аналитических на множествах, в некотором смысле «редких». Здесь исследование опирается на известную теорему о конечномерности локально компактного линейного топологического пространства. Отмечается возможность обобщений на пространства непрерывных функций, заданных на топологических пространствах, на пространства дифференцируемых функций на дифференцируемых многообразиях.

В. П. Хавин

7522. Полная ортонормированная система однородных многочленов для пространства матриц второго порядка. Митчелл (A complete orthonormal system of homogeneous polynomials on matrix spaces of order 2. Mitchell Josephine), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 3, 399—406 (англ.)

В пространстве комплексных переменных z_k ($k = 1, 2, 3, 4$) рассматривается область $D\{I - zz^* > 0\}$ и многообразие $B = \{zz^* = I\}$, являющееся частью границы ∂D области D. Здесь $z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$, $z^* = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 & \bar{z}_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_4 \end{pmatrix}$, I — единичная матрица. Для области D строится полная ортонормированная система полиномов, отвечающая определению произведения двух функций φ_l и φ_k с помощью интеграла $\int_B \varphi_l \bar{\varphi}_k dV$, где dV — евклидов элемент объема области B. Коэффициенты полиномов, входящих в эту систему, выражаются через гипергеометрические функции.

Б. А. Фукс

7523. Оценки в теории аналитических функций двух комплексных переменных. Баврин И. И., Докл. АН СССР, 1959, 126, № 5, 919—922

Через D обозначается содержащая свой центр (0, 0) ограниченная полная двоякокруговая область, граница которой дважды непрерывно дифференцируема и аналитически выпукла извне. Через D_1 обозначается область D, когда она ограничена гиперповерхностью

$$|w| = r_1(\tau), \quad |z| = r_2(\tau), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1,$$

$$r_1(0) = 0, \quad 0 < r_1'(\tau) \leqslant r_1(\tau)/\tau, \quad r_1(1) < \infty, \quad 0 < \tau \leqslant 1,$$

$$r_2(\tau) = \exp\left[-\int \frac{\tau}{1-\tau} d\ln r_1(\tau)\right], \quad \tau_2(1) = 0.$$

Устанавливается, что если в D функция $F(w, z) = \sum_{m,\, n=0}^{\infty} a_{mn} w^m z^n$ (a_{00} задано) регулярна и $|F(w, z)| < 1$, то

$$|a_{mn}| < \frac{1 - |a_{00}|^2}{r_1^m\left(\frac{m}{m+n}\right) r_2^n\left(\frac{m}{m+n}\right)} \quad (m+n > 0).$$

В области D_1 устанавливаются оценки, причем для функции $F(w, z)$, регулярной в D_1, в случае, когда в D_1 $\operatorname{Re} F(w, z) \geqslant 0$, оценивается сверху $|wF_w'(w, z) + zF_z'(w, z)|$, а в случае, когда в D_1 $\operatorname{Re} F(w, z) > 0$ и $F(0, 0)$ вещественно, оценивается сверху $|\operatorname{Im} F(w, z)|$ и оцениваются сверху и снизу $\operatorname{Re} F(w, z)$ и $|F(w, z)|$. Когда в D_1 функция $F(w, z)$ ($F(0, 0) = 0$) регулярна и $|\operatorname{Re} F(w, z)| < 1$, оцениваются сверху $|\operatorname{Re} F(w, z)|$, $|\operatorname{Im}(w, z)|$ и $|F(w, z)|$. Когда в D_1 функция $F(w, z)$ регулярна и $|F(w, z)| < 1$, оцениваются сверху $|F(w, z) - F(0, 0)|$ и $|wF_w'(w, z) + zF_z'(w, z)|$. Для функции $F(w, z)$, регулярной в замкнутой области $\bar{D}_1$, оцениваются сверху $|F(w, z)|$, $\operatorname{Re} F(w, z)$ и $|\operatorname{Im} F(w, z) - \operatorname{Im}(0, 0)|$. Для функции $F(w, z)$ ($F(0, 0) = 1$), регулярной в D и отличной от нуля в $\bar{D}_1$, оценивается снизу $\ln|F(w, z)|$.

Устанавливается, какие оценки, соответствующие полученным, оказываются верными в случае цилиндра и какие оценки являются точными. Отмечается, что некоторые результаты можно распространить на случай областей D, для которых $\sup[d\ln r_1(\tau)/d\ln\tau] < \infty$. Доказательства теорем не приводятся.

С. А. Еремин

7524. Оценки и целые функции. Баврин И. И., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1959, 77, 53—78

Пусть D — полная, двоякокруговая область, граница которой S аналитически выпукла извне. Как показал А. А. Темляков, гиперповерхность S допускает параметрическое представление $|w| = r_1(\tau)$, $|z| = r_2(\tau)$, где функции $r_1(\tau)$ и $r_2(\tau)$, определенные на сегменте $[0, 1]$, удовлетворяют условиям:

$$r_1(0) = 0, \quad r_1(1) < \infty, \quad r_1'(\tau) > 0,$$

$$r_2(\tau) = \exp\left\{-\int \frac{\tau}{1-\tau} d\ln r_1(\tau)\right\}.$$

Обозначим через S_r $(0 < r < 1)$ гиперповерхность $\{|w| = rr_1(\tau), \ |z| = rr_2(\tau)\}$. Обозначим также

$$M_F(r) = \max_{(w,\, z) \in S_r} |F(w, z)|, \quad A_F(r) = \max_{(w,\, z) \in S_r} \operatorname{Re} F(w, z),$$

$$m_f(r) = \min_{(w,\, z) \in S_r} |F(w, z)|,$$

где $F(w, z) = \sum_{m,\, n=0}^{\infty} a_{m,n} w^m z^n$ есть функция, аналитическая в области D. Исходя из интегрального представления Темлякова, автор вначале получает некоторые оценки чисел $|a_{m,n}|$ через $M_F(1)$ и $A_F(1)$. В частности, для случая, когда область D есть бицилиндр $\{|w| < R_1, \ |z| < R_2\}$, доказано (теорема 1), что

$$|a_{m,n}| < 2(A_F(1) - \operatorname{Re} F(0, 0)) R_1^{-m} R_2^{-n}.$$

Далее, тем же методом устанавливаются следующие неравенства между $M_F(r)$ и $A_F(1)$, $m_F(r)$ и $M_F(1)$ (теоремы 12 и 13):

а) $M_F(r) < 2(A_F(1) - \operatorname{Re} F(0, 0))((1 - r^{1/n})^{-2} - 1) + |F(0, 0)|$, где n есть наименьшее целое число, не меньшее $\sup_{\tau} \dfrac{d\ln r_1(\tau)}{d\ln\tau}$,

б) $\ln m_F(r) \geqslant -2((1 - r^{1/n})^{-2} - 1)\ln M_F(1)$ при условии, что $F(w, z) \neq 0$, когда $(w, z) \in D$, и, что $F(0, 0) = 1$.

Получены также и некоторые другие неравенства такого типа.

Л. И. Ронкин

7525. Некоторые неравенства для регулярных функций двух комплексных переменных. Баврин И. И., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1959, 77, 79—89

Пусть функция $F(w, z)$ аналитическая в области D (обозначения те же, что и в реф. 7524), удовлетворяет условиям: $F(0, 0) = 1$ и $\operatorname{Re} F(w, z) > 0$ при $(w, z) \in D$. Тогда при $(w, z) \in S_r$ имеет место неравенство

$$\frac{(1-r)^2}{1+2r-r^2} < |F(w, z)| < \frac{1+2r-r^2}{(1-r)^2}.$$

Неравенство, несколько отличное от этого, устанавливается для случая, когда $D = \{|w| < R_1, \ |z| < R_2\}$. Далее автор доказывает неравенства, которые отличаются от неравенств теорем 12 и 13 его цитированной работы тем, что число n, фигурирующее в этих теоремах заменено на 1. Из полученных оценок отображением бицилиндра ($|w| < 1$, $|z| < 1$) на область ($\operatorname{Im} w > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$) автор получает следующие неравенства для функции $F(w, z)$, аналитической в области ($\operatorname{Im} w > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$) и обладающей в этой области положительной мнимой частью:

$$\frac{\sin\theta \sin\varphi}{4r_1 r_2 F(i, i)} < |F(w, z)| < \frac{4r_1 r_2 F(i, i)}{\sin\theta \sin\varphi}$$

$$(w = r_1 e^{i\theta}, \ z = r_2 e^{i\varphi}, \ 0 < \theta < \pi,$$

$$0 < \varphi < \pi, \ r_1 > 1, \ r_2 > 1).$$

Л. И. Ронкин

7526. Характеристика роста целой функции двух переменных и ее приложение к суммированию двойных степенных рядов. Иванов В. К., Матем. сб., 1959, 47, № 1, 3—16

Обобщается на случай двух комплексных переменных известная теорема Пойа о связи индикатрисы роста целой функции конечной степени и распределением особенностей ассоциированной с ней по Борелю функции. Приведем основные определения и результаты. Пусть

$F(z_1,z_2)=\sum_{m,\,n=0}^{\infty}\frac{a_{mn}}{m!\,n!}z_1^m z_2^n$—целая функция, $|F(z_1\,z_2)|\leqslant Ae^{\sigma_1|z_1|+\sigma_2|z_2|}$. С ней ассоциируется функция $f(z_1,\,z_2)=\sum_{m,\,n=0}^{\infty}\frac{a_{mn}}{z_1^{m+1}\,z_2^{n+1}}$. Через $\prod(\varphi_1,\varphi_2)$ обозначим плоскость $\{z_1=r_1e^{i\varphi_1},\ z_2=r_2e^{i\varphi_2}\}$, $-\infty<r_1,\ r_2<\infty$. Областью $T(\varphi_1,\,\varphi_2)$ мы назовем множество точек $\nu=(\nu_1,\,\nu_2)$ плоскости $\prod(\varphi_1,\varphi_2)$ таких, что для каждой точки $\nu\in T(\varphi_1,\,\varphi_2)$ существует число $A(\nu)>0$ такое, что при заданных φ_1 и φ_2 и любых $r_1,\,r_2>0$ выполнено неравенство $|F(r_1e^{i\varphi_1},r_2e^{i\varphi_2})|<A(\nu)e^{\nu_1r_1+\nu_2r_2}$.

Областью $C(\varphi_1,\,\varphi_2)$ мы назовем множество точек $c=(c_1,\,c_2)$ плоскости $\prod(\varphi_1,\,\varphi_2)$ таких, что все точки $(z_1,\,z_2)$, для которых $\mathrm{Re}\,(z_1e^{-i\varphi_1})\geqslant c_1$, $\mathrm{Re}\,(z_2e^{-i\varphi_2})\geqslant c_2$, являются точками регулярности функции $f(z_1,\,z_2)$. Отметим важное свойство этих областей: если $(\nu_1^0,\,\nu_2^0)\in T(\varphi_1,\varphi_2)$ (или $F(c_1^0,\,c_2^0)\in C(\varphi_1,\,\varphi_2)$, то весь квадрант $\nu_1\geqslant\nu_1^0$, $\nu_2\geqslant\nu_2^0$ (аналогично $c_1\geqslant c_1^0$, $c_2\geqslant c_2^0$) также принадлежит области $T(\varphi_1,\,\varphi_2)$ (соответственно области $C(\varphi_1,\,\varphi_2)$). Основная теорема: $\overline{T}(\varphi_1,\varphi_2)=\overline{C}(-\varphi_1,-\varphi_2)$, где черта означает замыкание. Показано, что в отличие от одного переменного область $\prod(\varphi_1,\,\varphi_2)\setminus\overline{C}(\varphi_1,\,\varphi_2)$ невыпукла. Далее, $f(z_1,\,z_2)$ представляется в виде интеграла

$$f(z_1,\,z_2)=\int\limits_{\Lambda}\int e^{-(z_1\zeta_1+z_2\zeta_2)}F(\zeta_1,\,\zeta_2)\,d\zeta_1d\zeta_2,$$

где Λ — поверхность $\zeta_1=\rho_1e^{i\theta_1}$, $\zeta_2=\rho_2e^{i\theta_2}$, где θ_1 и θ_2 фиксированы, $0<\rho_1,\,\rho_2<\infty$. Находится область сходимости этого интеграла. Вводится понятие суммы двойного степенного ряда по Борелю. М. В. Федорюк

7527. Свойства среднего значения гармонических функций, ограниченных в полуплоскости или в прямом угле. Николеску (Propriétés de moyenne des fonctions harmoniques bornées dans un demiplan ou dans un angle droit. Nicolescu Miron), Rev. math. pures et appl. (RPR), 1956, **1**, № 2, 43—50 (франц.)

См. РЖМат, 1956, 466.

7528. Обобщенная задача Дирихле. Вероятностное истолкование. Дуб (Le problème de Dirichlet généralisé. Interprétation probabiliste. (Résumé). Doob J.-L.), Sémin. théor. potent. M. Brelot et G. Choquet. Fac. sci Paris. 1957, 1 année. Paris, 1958, 3—1 (рез. англ.)

Указаны темы, освещенные в докладах автора 21 и 22 февраля 1957 г. (см. также РЖМат, 1958, 7741; 1958, 37 9). А. Д. Мышкис

7529. Топологическая характеристика псевдосопряженной и псевдогармонической функции. Берштейн (A Topological characterization of the pseudoconjugate of a pseudoharmonic function. Berstein I.), Rev. math. pures et appl. (RPR), 1956, **1**, № 1, 45—48 (англ.)

Перевод на английский язык работы автора (РЖМат, 1958, 6663). Г. Ц. Тумаркин

7530. Граничные предельные теоремы для полупространства. Дуб (Boundary limit theorems for a half-space. Doob J. L.), J. math. pures et appl., 1958, **37**, № 4, 387—392 (англ.)

Пусть $u(\xi)$ — положительная супергармоническая функция, определенная в полупространстве R_N: $\xi_1>0$ пространства точек $\xi:(\xi_1,\ldots,\xi_N)$. Лелон-Ферран (Lelong-Ferrand J.), Ann. scient. École norm. supér., 1949, **66**, 1 5—15) и Наим (РЖМат, 1959, 11090) доказали что для любой точки $\beta:(0,\,\xi_2^0,\ldots,\xi_N^0)$

$$F\lim_{\xi\to\beta}\frac{u(\xi)}{\xi_1}=\liminf_{\xi\to\beta}\frac{u(\xi)}{\xi_1},$$

$$F\lim_{\xi\to\beta}\frac{u(\xi)\,|\,\xi-\beta\,|^N}{\xi_1}=\inf_{\xi}\frac{u(\xi)\,|\,\xi-\beta\,|^N}{\xi_1}$$

(и аналогичные равенства при $\xi\to\infty$), где $F\lim$ означает предел в смысле специальной (fine) топологии, введенной в замыкание R_N. Автор показывает, что эти результаты просто вытекают из теоретико-вероятностной трактовки краевых задач, проведенной им ранее (РЖМат, 1959, 3799), именно, из обобщенной классической теоремы Фату о существовании у положительной супергармонической функции предельных значений на границе области своего определения. Рассмотрение полупространства (а не произвольной области) позволяет выписать в явном виде ряд основных функций, связанных с задачей. А. Д. Мышкис

7531. Одно обобщение формулы Тейлора. Тиновский (Одне узагальнення формули Тейлора. Тиновський А. А.), Доповіді АН УРСР, 1959, № 7, 708—711 (укр.; рез. русск., англ.)

Пусть $L=D^n+p_{n-1}(x)\,D^{n-1}+\ldots+p_0(x)\ \left(D=\frac{d}{dx}\right)$, где $p_k(x)\in C^k(a,\,b)$, и пусть L^* — формально сопряженный оператор. Доказывается теорема:

Пусть существует $L^qf(x)$ и пусть $\xi_0,\,\xi_1,\ldots,\xi_q\in(a,\,b)$ Тогда

$$f(\xi_0)=\sum_{\sigma=0}^{n-1}D^\sigma f(\xi_q)\,f_\sigma(\xi_0,\,\xi_q)+$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{q-1}\Psi[L^\sigma f(t),L_{\xi_\sigma}^{*-1}\ldots L_{\xi_1}^{*-1}K(\xi_0,\,\tau)]_{t=\xi_q}-$$

$$-\sum_{\sigma=1}^{q}\int_{\xi_{\sigma-1}}^{\xi_\sigma}L^\sigma f(t)\,L_{\xi_{\sigma-1}}^{*-1}\ldots L_{\xi_1}^{*-1}K(\xi_0,\,\tau)\,dt,$$

где $f_0(\xi_0,\,\xi_q),\ldots f_{n-1}(\xi_0,\,\xi_q)$ — первые n функций L-базиса в точке ξ_q (РЖМат, 1959, 4641)

$$L_{\xi_\sigma}^{*-1}\ldots L_{\xi_1}^{*-1}K(\xi_0,\,\tau)=$$

$$=\begin{cases}K(\xi_0,\,t)\ \text{при}\ \sigma=0,\\ (-1)^\sigma\int\limits_{\xi_\sigma}^{t}K^*(t,\,\tau_{\sigma-1})\,d\tau_{\sigma-1}\int\limits_{\xi_{\sigma-1}}^{\tau_{\sigma-1}}\ldots\int\limits_{\xi_1}^{\tau_1}\times\\ \times K^*(\tau_1,\,\tau)\,K(\xi_0,\,\tau)\,d\tau,\end{cases}$$

$K(x,\,t)$, $K^*(x,\,t)$ — функции Коши — Грина операторов L и L^*. Б. М. Левитан

7532. О понятии аналитичности. Мопперт (On the notion of analyticity. Moppert C. F.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 4, 574—576 (англ.)

Пусть E_n — алгебра, вообще некоммутативная, с базисом $e_1,\ldots,e_n$ над полем Γ. Для $a,\,b\in E_n$ символ $a\otimes b$ обозначает произведение a на b. Символ $a\sim\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ обозначает, что $a=\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_ne_n$, где $\alpha_k\in\Gamma$ $(k=1,\ldots,n)$. Для $b\sim\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$ имеем $a\otimes b\sim\{\gamma_1,\ldots,\gamma_n\}$, где $\gamma_\rho=\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\pi_{\rho\mu\nu}\alpha_\mu\,\beta_\nu$ $(\rho=1,\ldots,n)$, $\pi_{\rho\mu\nu}$ — постоянные элементы поля Γ. Функция $y=f(x)$, где $x,\,y\in E_n$, называется аналитической для $x=x_0$, если найдется такой $l(x_0)\in E_n$, что

$$f(x_0+h)=f(x_0)+l(x_0)\otimes h+r(h);$$

$r(h)\in E_n$; $|\,r(h)\,|_n=o(|\,h\,|_n)$ при $|\,h\,|_n\to0$, где вообще, $|\,a\,|_n$ — норма элемента a. Пусть

$$x\sim\{\xi_1,\ldots,\xi_n\};\ f(x)\sim\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\};$$

$\Pi_{\nu\rho}$ — определитель, полученный из определителя

$$\Pi_\nu = \mathrm{Det}\,(\pi_{\rho\mu\nu}) = \begin{vmatrix} \pi_{11\nu} & & \\ & \cdot & \\ & & \pi_{nn\nu} \end{vmatrix};\ (\nu = 1, \ldots, n)$$

заменой его столбца номера ρ столбцом $\partial\varphi_1/\partial\xi_\nu$; ... ...; $\partial\varphi_n/\partial\xi_\nu$. Необходимое условие аналитичности функции $f(x)$ для $x = x_0$ имеет вид:

$$\Pi_{1\rho}/\Pi_1 = \ldots = \Pi_{n\rho}/\Pi_n;\ (\rho = 1, \ldots, n)\ (x = x_0),$$

если $\Pi_\nu \neq 0$, $(\nu = 1, \ldots, n;\ x = x_0)$. Если же для $x = x_0$ $\Pi_1 = \ldots = \Pi_k = 0$; $k \leqslant n$, а остальные определители Π_ν отличны от нуля $(\nu = k+1, \ldots, n)$, то приведенное условие аналитичности заменяется следующим: для $x = x_0$; $\rho = 1, \ldots, n$; $i = 1, \ldots, k$, имеем:

$$\Pi_{i\rho} = 0;\ \Pi_{k+1,\rho}/\Pi_{k+1} = \ldots = \Pi_{n\rho}/\Pi_n.$$

В частности, автор дает условие аналитичности кватернионных функций $f(x)$ и рассматривает также случай $n = 3$, когда Γ — поле действительных чисел; $\otimes$ есть знак векторного произведения.

Примечание референта. В реферируемой работе отсутствуют ссылки на других авторов и нет библиографии. Условие аналитичности (в смысле автора) кватернионных функций было дано Н. М. Крыловым (Докл. АН СССР, 1947, 55, № 9, 799—800) и исследовано А. С. Мейлихзоном (Докл. АН СССР, 1948, 59, № 3, 431—434). Если E_n — ассоциативная и коммутативная алгебра с единицей над полем комплексных чисел, то определение автора аналитичности функции $f(x)$ есть очень частный случай определения понятия моногенности одной гиперкомплексной функции относительно другой такой функции, данного референтом впервые в 1946 г. (Матем. сб., 1946, 18, 353—378; РЖМат, 1959, 11026). В. С. Федоров

7533. О функциях, моногенных в смысле Федорова. Моисил (Sur les fonctions monogènes au sens de Feodorov. Moisil C.), Изв. Матем. ин-т. Бълг. АН, 1959, 4, 25—34 (франц.; рез. болг., русск.)

Систему m уравнений $\sum_{h=1,s=1}^{r,n} \gamma_{ihs} \frac{\partial\varphi_h}{\partial x^s} = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ с r неизвестными функциями $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ от n независимых переменных $x^1, \ldots, x^n$ и с постоянными, вообще говоря, коэффициентами γ_{ihs} автор называет системой, обладающей Q-свойством, если найдутся такие постоянные c_{ihk} $(i, h, k = 1, \ldots, r)$, что эта система будет иметь решение $\varphi_i = \sum_{h,k=1}^{r} c_{ihk}\varphi_h^* \varphi_k^{**}$ $(i = 1, \ldots, r)$ для всяких двух ее решений: $\varphi_1^*, \ldots, \varphi_r^*$ и $\varphi_1^{**}, \ldots, \varphi_r^{**}$. Исследуются классы систем, обладающих Q-свойством, и отмечается тот случай, когда такая система выражает условие моногенности, в смысле В. С. Федорова, гиперкомплексной функции $\varphi = \varphi_1 e_1 + \ldots + \varphi_r e_r$ по отношению к линейной дифференциальной форме: $\omega = \omega_1 e_1 + \ldots + \omega_r e_r$, где $e_1, \ldots, e_r$ — базис какой-нибудь ассоциативной и коммутативной алгебры и где $\omega_i = a_{i1}(x^1, \ldots, x^n) \times dx^1 + \ldots + a_{in}(x^1, \ldots, x^n)\,dx^n$, $(i = 1, \ldots, r)$. Функция φ называется моногенной по отношению к ω, если существует такая гиперкомплексная функция φ', что $\frac{\partial\varphi}{\partial x^l} = \varphi' \sum_{j=1}^{r} a_{jl} e_j$, $(i = 1, \ldots, n)$.

Исключая из последних уравнений функцию φ', приходим к системе, обладающей Q-свойством.

Рассматривается и тот частный случай, когда форма ω есть полный дифференциал какой-нибудь гиперкомплексной функции и когда алгебра с базисом $e_1, \ldots, e_r$ обладает единицей. Приводятся примеры применения моногенных функций, в смысле В. С. Федорова, к теории упругости однородного и неоднородного тела и к гидродинамике вязких жидкостей. Библ. 13 назв. Имеется много опечаток. В. С. Федоров

7534. Заметки об общем анализе. IV. Симода (Notes on general analysis. IV. Shimoda Isae), Токусима дайгаку гакугэй киё (Сидзэн кагаку), J. Gakugei, Tokushima Univ. Natur. Sci., 1954, 5, Dec., 1—7 (англ.)

Продолжение исследований автора об аналитических функциях в банаховых пространствах. Пусть E_0, $E_1, \ldots$ — комплексные банаховы пространства. Функция f со значениями в E_2, заданная в открытом связном подмножестве E_1, называется аналитической, если она сильно непрерывна и имеет дифференциал Гато. E_2 — значная аналитическая функция h_n, заданная в E_1, называется однородным многочленом степени n, если при любом комплексном α и $x \in E_1$, $h_n(\alpha x) = \alpha^n h(x)$.

В первом разделе статьи изучается порядок роста целой функции f (т. е. аналитической и заданной на всем E_1) со значениями в E_2. Пусть $\rho_1 = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log M(r)}{\log r}$ $(M(r) = \sup_{\|x\|=r} \|f(x)\|$, f — целая),

$$\rho_2 = \sup_{\|x\|=1} \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log M(r,\ x)}{\log r},$$

где $M(r,\ x) = \sup_{|\alpha|=r} \|f(\alpha x)\|$. Если функция f ограничена в сфере любого радиуса с центром в нуле, то

$$\rho_1 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\log n}{\log \frac{1}{\sup\limits_{\|x\|=1} \|h_n(x)\|}},$$

где $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)$, $h_n(x)$ — однородный многочлен степени n; в противном случае $\rho_1 = +\infty$. Всегда

$$\rho_2 \leqslant \rho_1,\ \rho_2 = \sup_{\|x\|=1} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\log n}{\log \frac{1}{\|h_n(x)\|}}.$$

Во втором разделе статьи изучаются особенности аналитических функций. Для функций, аналитических в „кольце" $0 < \|x\| < R$, устанавливается аналог лорансовского разложения. С помощью аксиомы Цермело доказывается, что если в пространстве Банаха E_0 может быть задана аналитическая функция с изолированной особой точкой, то E_0 одномерно (над полем комплексных чисел).

В третьем разделе в качестве приложения обобщенной на банаховы пространства леммы Шварца доказывается, в частности, что $\left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i(x)\|^p\right)^{1/p} \leqslant \|x\| \times \sup_{\|x\|<1} \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i(x)\|^p\right)^{1/p}$, если f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — E_i — значная функция, аналитическая в единичном шаре пространства E_0; $f_i(0) = 0$. В. П. Хавин

7535. К вопросу о кручении эллиптического бруса, продольно ослабленного эллиптической же полостью. Шерман Д. И., Инженерный сб., 1959, 25 3—19

Рассматривается задача о кручении прямолинейного стержня, поперечное сечение которого — двухсвязная область, ограниченная изнутри и извне симметрично расположенными неконфокальными эллипсами. Внеш-

ность каждого контура конформно преобразуется на внешность окружности с радиусом, определяемым размерами полуосей эллипсов. Производится построение комплексной функции кручения. Вычисляется жесткость при кручении, и приводятся значения величины компонентов напряжений в характерных точках профилей в двух частных случаях. К. В. Соляник-Красса

7536. Построение тела вращения по заданному на нем распределению скорости. Киселев О. М., Изв. высш. учебн. заведений. Авиац. техн., 1959, № 2, 20—24

Ищется односвязное тело вращения, обтекаемое безграничным осесимметрическим потенциальным потоком несжимаемой жидкости, по заданной на поверхности тела в функции абсциссы x скорости потока: $v = F(x)$. При этом считается, что ось ox направлена по оси вращения, а начало координат совпадает со срединой хорды тела. Автор ищет аналитическую функцию $z = f(\zeta)$, отображающую внешность единичного круга K в плоскости ζ на профиль L, получающийся в меридиональном сечении искомого тела, в виде ряда

$$z = f(\zeta) = \frac{A}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^{-n}.$$

В плоскости меридионального сечения z потенциал потока удовлетворяет уравнению

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \frac{1}{y}\varphi_y = 0$$

и граничному условию $\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_L = 0$, где $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к контуру L. Используя соотношение $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \frac{v_\xi^2 + \varphi_\eta^2}{v^2}$, где v — скорость на L, а производные $\dot{x}$ и $\dot{y}$ взяты по переменному t — контурному значению ζ, автор получает формулу $\dot{x}^2 + \dot{y}_2 = v_\infty^2 A^2 \times$ $\times \frac{\bar{u}^2}{4v^3}$. Здесь $\bar{u} = \frac{u}{u_\infty}$ — безразмерная скорость потока, обтекающего окружность K. Эта формула служит основой для нахождения функции $z = f(\zeta)$ методом последовательных приближений. Сходимость процесса не исследуется. Для иллюстрации метода приведен пример, в котором меридиональное сечение является профилем Жуковского относительной толщины 23,8%.

Примечание референта. Рассматриваемая задача решалась другим методом в работе Этермана (Докл. АН СССР, 1947, 56, № 4). В. С. Рогожин

7537. Исследование по теории водосливов (плоская задача). Дуйшеев Эсенкан, Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 2, 61—83

Рассматривается задача о плоскопараллельном движении тяжелой несжимаемой идеальной жидкости через водослив полигонального профиля при условии, что волны отсутствуют. Движение принимается потенциальным. Задача решается при помощи построения функций, конформно отображающих область комплексного потенциала $\chi = \varphi + i\psi$ и область переменной Жуковского $\omega = \ln \frac{d\chi}{dz}$ на вспомогательную полуплоскость $t = \xi + i\eta$. По найденным χ и ω восстанавливается затем (в параметрическом виде) искомая область движения

$$z(t) = \int \exp[-\omega(t)] \frac{d\chi}{dt} dt. \qquad (1)$$

Так как скорость $v(t)$ на свободной поверхности неизвестна, то автор задачу решает приближенно, представляя вначале функцию $\ln v(t)$ в виде отрезка степенного ряда с неопределенными коэффициентами

$$\ln v = \sum_{k=0}^{n} a_k (t-1)^k,$$

которые определяются затем из граничных условий. Определение коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ связано с весьма трудоемкими вычислениями. Параметры функции, отображающей область комплексного потенциала на полуплоскость t не определяются, а задаются, и по ним вычисляются соответствующие размеры водослива, т. е. применяется, как обычно в теории струй, полуобратный метод. После того как размеры водослива подобраны, координаты свободной поверхности определяются при помощи численных квадратур. В частности, если положить $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, то получается решение задачи для невесомой жидкости, так как при этих условиях $\ln v = a_0 = \text{const}$. Далее автор рассматривает только случай $a_1 < 0$, т. е. случай, когда волны на свободной поверхности вниз по течению не образуются. Рассмотрен числовой пример, при решении которого определены только коэффициенты a_0 и a_1. Результаты вычисления координат свободной поверхности были проверены экспериментально в гидравлическом лотке. Согласование теоретических и экспериментальных результатов вполне удовлетворительное. Изложенный приближенный метод, как отмечает автор, подобен методу, примененному ранее Марки (РЖМат. 1955, 2177) для исследования более частной задачи. Библ. 6 назв.

П. Ф. Фильчаков

7538. Об истечении жидкости из-под щита (к задаче Марки). Дуйшеев Эсенкан В сб.: Материалы 8-й Научн. конференции профессорско-преподават. состава Физ.-матем. фак. (Кирг. ун-т). Фрунзе, 1959, 12—14

Применяя метод, разработанный ранее (реф. 7537), автором рассмотрена задача о движении невязкой несжимаемой жидкости между параллельными стенками. Верхняя стенка справа оканчивается щитом, наклоненным под углом к оси абсцисс, а горизонтальная нижняя стенка справа имеет препятствие с бесконечно широким горизонтальным порогом, причем препятствие наклонено к оси абсцисс под углом β; $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$. В вершине щита скорость предполагается заданной. Аналогичная задача (при наличии только одного щита) была рассмотрена ранее итальянским ученым Марки, который построил для нее сложное и очень приближенное решение. Автором задача решена в первом приближении, т. е. определены только два первых коэффициента степенного ряда для логарифма скорости на поверхности заранее неизвестной свободной струи. Найдена искомая скорость, сжатие струи и глубина в любой точке потока. Задача доведена до численного примера. П. Ф. Фильчаков

7539. Об одной задаче плоской теории упругости, разрешаемой в замкнутой форме. Народецкий М. З., Скартвелос ССР Мецниереба Академиис моамбе, 1957, **19**, № 3, 263—266 (груз.); Сообщ. АН ГрузССР, 1957, **19**, № 3, 263—266 (русск.)

Рассматривается упругая среда, занятая бесконечной пластинкой $z = x + iy$, ослабленной двумя круглыми отверстиями радиусов R и $r < R$. По контуру отверстий приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивностью соответственно p и q. Применяя метод Мусхелишвили (РЖМат, 1956, 5277 К), автор получил в замкнутом виде формулы для определения функций напряжения $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Рассмотрен конкретный пример, для которого построена эпюра величины σ_θ по контурам обеих окружностей. Данная задача ранее решалась только приближенным способом. П. Ф. Фильчаков

7540. Применение в геофизике аналитического продолжения потенциальной функции в нижнюю полу-

плоскость. **Шалаев С. В.**, Зап. Ленингр. горн. ин-та, 1959, 36, № 2, 131—151

Пусть в нижней полуплоскости $z<0$ комплексной плоскости $\tau = x + iz$ расположена область D, заполненная массами с постоянной плотностью, $U(x, z)$ — логарифмический потенциал этих масс. В геофизике приходится вычислять $U(x, z)$ в нижней полуплоскости по значениям этой функции или одной из ее производных на прямой $z = 0$ (поверхность земли). Аналитические выражения для $U(x, z)$ плохо сходятся вблизи тела D, так как внутри D лежат особенности аналитически продолженной туда $U(x, z)$. Автор предлагает вместо потенциала $U(x, z)$ пользоваться аналитическим продолжением в нижнюю полуплоскость функции $\Phi[W(\tau)]$, где $\operatorname{Re} W(\tau) = U(x, z)$, а функция $\Phi(W)$ выбирается так, чтобы $\Phi[W(\tau)]$ не имела особенностей в особых точках функции $W(\tau)$. Для подсчета $\Phi[W(iz)]$ при $z<0$ выведена формула

$$\Phi[W(iz)] + \Phi[W(-iz)] =$$

$$= \frac{2}{\pi} e^{-Bz^2} \int_0^\infty \operatorname{ch} \omega z d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \Phi[W(x)] e^{-Bx^2} \cos \omega x dx, \quad (1)$$

$B > 0$, $\Phi[W(-iz)]$ находится путем решения задачи Дирихле для верхней полуплоскости. Для вычисления интеграла (1) дается ряд приближенных формул. Если область D ограничена ломаной линией с конечным числом звеньев, то $W_{xxz}(\tau)$ — есть рациональная функция, имеющая полюсы в угловых точках границы области D. В этом случае удобно продолжать аналитически $1/W_{xxz}$. Когда граница D имеет лишь две угловые точки (пласт или уступ), то $1/W_{xxz}$ есть квадратный трехчлен. Для этого случая разработана численно-графическая схема нахождения координат угловых точек по значениям одной из вторых производных потенциала (U_{xx} или U_{xz}) на прямой $z = 0$.

Примечание референта. Кроме случая рациональной $W(\tau)$, автор не указывает, как выбирать такую $\Phi[W(\tau)]$, которая гасила бы особенности $W(\tau)$.

В. К. Иванов

7541. К аэродинамической теории колеблющейся решетки. Зёнген, Мейстер (Beitrag zur Aerodynamik eines schwingenden Gitters I. Söhngen H., Meister E.), Z. angew. Math. und Mech., 1958, 38, № 11-12, 442—465 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Ищется поле скоростей идеальной несжимаемой жидкости вне решетки пластин: $-c < x < c$, $y = na$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), совершающих гармонические колебания, так что в момент времени t на пластине с номером n вертикальная скорость будет $g_n(x) e^{2\pi j \nu t}$ (запись в комплексной форме). Данная решетка получается развертыванием радиальной лопастной решетки, поэтому $g_n(x) = g_k(x)$, если $n - k = N$ (N — целое). Скорость невозмущенного потока U_0 направлена вдоль положительной оси абсцисс, таким образом, результирующая комплексная скорость потока будет $U_0 + W(z) \times e^{2\pi j \nu t}$, где $W(z) = U(x, y) - iV(x, y)$ — функция, регулярная вне пластин и вихревых следов, исходящих из задних кромок пластин, для которой должны выполняться условия: 1) $W(z + iaN) = W(z)$, 2) $W(z) \to 0$ при $x \to -\infty$, 3) $W(z)$ ограничена при $x \to \infty$, 4) $V(x, an) = g_n(x)$ при $-c < x < c$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, 5) вихревые следы расположены на лучах $x > c$, $y = na$ и должна выполняться теорема Кельвина о вихрях.

В предположении, что суммарная циркуляция равна нулю, доказывается, что лучи $x > c$, $y = an$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, не будут являться особыми линиями для $W(z)$. Для нахождения поля скоростей профили заменяются вихревыми слоями с неизвестными плотностями, а $W(z)$ разбивается определенным образом на два слагаемых: $W_1(z)$ и $W_2(z)$, для которых получаются две краевые задачи Гильберта (в терминологии Н. И. Мусхелишвили). Для решения этих задач область, занятая потоком, отображается на внешность решетки пластин, расположенных на оси абсцисс вспомогательной плоскости W, после чего получается задача Гильберта для плоскости с бесконечным числом горизонтальных щелей. Решение этой задачи выходит за рамки общей теории, так как область имеет бесконечную связность, однако, граничные условия периодические и ищется периодическое решение. Это позволяет авторам, несколько видоизменяя рассуждения, заимствованные им из монографии Н. И. Мусхелишвили „Сингулярные интегральные уравнения", получить решение в замкнутой форме.

В. С. Рогожин

7542. О построении крылового профиля по хордовой диаграмме распределения скорости или давления. Костычев Г. И., Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1958, 38, 3—21

Решается обратная краевая задача определения профиля крыла по заданным на нем скорости или давлению. При помощи конформного отображения указанная задача приводится к следующей прямой краевой задаче аналитических функций.

Определить аналитическую в области $|\zeta| > 1$, за исключением бесконечно удаленной точки, где она имеет простой полюс, функцию $z(\zeta)$ по краевому условию

$$\left|\frac{dz}{d\zeta}\right| F\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) = w(\theta) \quad (\zeta = e^{i\theta}),$$

где F — известная аналитическая функция своего аргумента, $w(\theta)$ — заданная функция, которую следует считать удовлетворяющей условию Гёльдера. (В подлиннике требуется лишь ограниченность, но этого недостаточно для применимости используемого далее аппарата). Последняя задача решается методом последовательных приближений. Доказывается сходимость процесса и указывается прием, следуя которому любое приближение будет давать замкнутый контур.

Ф. Д. Гахов

7543. Общий метод приведения решения осесимметричной задачи о движении грунтовых вод к решению плоской задачи. Шепелевская (Загальний метод зведення розв'язання осесиметричної задачі про рух грунтових вод до розв'язання плоскої задачі. Шепелевська Н. М.), Прикл. механіка, 1958, 4, № 1, 87—96 (укр.; рез. русск., англ.)

Рассмотрен один из возможных методов приведения решения задачи об осесимметричном движении грунтовых вод к задаче о плоскопараллельном движении жидкости. Например, если принять во внимание граничные условия, то можно считать, что осесимметричной задаче о притоке грунтовых вод к совершенной скважине без обсадной трубы соответствует плоскопараллельная задача о фильтрации через земляную перемычку. Поставленная задача решается путем определения поправок, которые необходимо внести в уравнения плоскопараллельного движения для того, чтобы эти уравнения с достаточной точностью описывали движение с осевой симметрией. Выведены дифференциальные уравнения, определяющие отклонения координат некоторой точки осесимметричного потока от координат соответствующей точки плоскопараллельного потока, а также исследованы краевые условия, которым должны удовлетворять искомые функции. Рассмотрен пример, в котором на базе решения полученного П. Я. Полубариновой-Кочиной для плоскопараллельной задачи о дренажной щели на водоупоре (Полубаринова-Кочина П. Я., Теория движения грунтовых вод, Гостехиздат, 1952), исследуется осесимметрическая задача о притоке грунтовых вод к круговой дрене. При исследовании этого же примера рассмотрен приближенный способ решения краевой

задачи, к которой приводится данная осесимметричная задача, при помощи метода конечных разностей. Намечен путь для оценки погрешности полученного решения. Библ. 3 назв. П. Ф. Фильчаков

7544. Приток инфильтрационной воды в симметрично расположенные водоприемники. Васильев В. А., Шульгин Д. Ф., Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1958, № 10, 46—50

Между двумя заглубленными плоскими горизонтальными дренами, расстояние между которыми равно $2L$, выпадает полоса дождя шириной $2l$ и интенсивности ε. Вода, просачиваясь вниз, образует между дренами бугор грунтовых вод, свободная поверхность которого принимается находящейся в равновесии, т. е. рассматривается стационарная задача. Требуется найти форму кривой депрессии при условии, что $l < L$. Задача решена при помощи метода линейных дифференциальных уравнений (Полубаринова-Кочина П. Я., Теория движения грунтовых вод, Гостехиздат, 1952). Уравнение кривой депрессии получено в замкнутом виде. Библ. 3 назв. П. Ф. Фильчаков

7545. Построение крылового профиля по заданной хордовой диаграмме. Киселев О. М., Изв. высш. учебн. заведений. Авиац. техн., 1959, № 1, 10—15

Ищется профиль, обтекаемый потенциальным потоком несжимаемой жидкости, по заданной на верхней и нижней поверхности профиля скорости. Ось абсцисс считается направленной по хорде профиля, а начало координат совпадает со срединой хорды. Скорость на верхней и нижней поверхностях профиля задается в функции переменной x соответственно функциями $v = f_1(x)$, $v = f_2(x)$ $(-B \leqslant x \leqslant B)$. Решение задачи сводится к отысканию аналитической функции $z = f(\zeta)$, отображающей внешность круга единичного радиуса с центром в начале координат плоскости ζ на внешность искомого профиля в плоскости z. Искомая функция представляется в виде

$$z = f(\zeta) = \frac{A}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) - \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n)\zeta^{-n}.$$

Преобразование $z = f(\zeta)$ устанавливает соответствие между потоком, обтекающим искомый профиль в плоскости z, и потоком, обтекающим единичный круг в плоскости ζ. Используя соотношение $v = \left|\frac{dw}{d\zeta}\right| \Big/ \left|\frac{dz}{d\zeta}\right|$, где v — скорость на профиле, автор получает формулу

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v_\infty^2 A^2 \frac{[\sin(t-\alpha) + \sin(\alpha-\beta)]^2}{v^2(t)},$$

из которой после несложных преобразований получается нелинейная система алгебраических уравнений относительно коэффициентов A, a_ν и b_ν (v_∞ — скорость на бесконечности α — угол атаки, $e^{i\beta}$ — комплексная координата точки схода в плоскости ζ, производные $\dot{x}$ и $\dot{y}$ взяты по переменному t-контурному значению ζ). Решение полученной системы проводится методом последовательных приближений. Сходимость процесса не исследуется. По утверждению автора, решенные им примеры показывают, что координаты профиля, найденного во втором приближении, практически мало отличаются от истинных. В. С. Рогожин

7546. Расчет потенциального обтекания изолированных профилей и гидродинамических решеток. Чепрасов В. П. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1958, 38, 43—56

Рассматривается задача расчета потенциального обтекания несжимаемой жидкостью изолированных профилей и профилей решетки произвольной формы. Излагаемый автором метод расчета потенциального обтекания изолированного профиля является некоторым видоизменением известного метода Теодорсена — Серебрийского. Сущность метода автора заключается в следующем:

Допустим, что с помощью одной из известных функций можно построить теоретический профиль c, близкий к заданному профилю $\widetilde{c}$ по положению и кривизне, так что будут удовлетворяться условия:

$$|\delta(s)| < \varepsilon, \quad |\delta'(s)| < \varepsilon, \quad |\delta''(s)| < \varepsilon, \qquad (1)$$

за исключением может быть конечного числа точек. Здесь $\delta(s)$ — длина отрезка нормали к профилю c, заключенного между c и $\widetilde{c}$. Пусть $D(\widetilde{c})$ — область, внешняя по отношению к заданному профилю, а $D(c)$ — область, внешняя к теоретическому профилю c; и пусть $\omega = f(z, c)$ — функция, реализующая конформное отображение области $D(c)$ на внешность единичного круга $c: |\omega| \geqslant 1$. Пусть при этом отображении профилю $\widetilde{c}$ в плоскости ω соответствует контур $\widetilde{c^*}$, близкий к кругу $c: |\omega| = 1$. Используя приближенные формулы конформных отображений близких областей, а именно приближенные формулы М. А. Лаврентьева для конформного отображения внешности близких к кругу областей на внешность единичного круга, автор дает приближенное построение функции $\zeta = f(z, \widetilde{c})$, $f(\infty, \widetilde{c}) = \infty$, $f'(\infty, \widetilde{c}) > 0$, реализующей конформное отображение внешности заданного профиля $\widetilde{c}$, т. е. области $D(\widetilde{c})$, близкой к $D(c)$ на внешности единичного круга $c: |\zeta| = 1$, плоскости $\zeta = \xi + i\eta$. Если воспользоваться уравнением контура $\widetilde{c^*}$ в виде

$$\widetilde{\omega}_{\widetilde{c^*}} = [1 + \delta^*(\ )]\, e^{i\theta_1},$$

то для указанного отображения имеем:

$$\zeta = f(z, \widetilde{c}) = f(z, c)\left[1 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta^*(t)\, \frac{1 + f(z,c)\overline{e^{it}}}{1 - f(z,c)\overline{e^{it}}}\, dt\right],$$

$$f(\infty, \widetilde{c}) = \infty, \quad f'(\infty, \widetilde{c}) > 0.$$

Соответствие точек областей $D(\widetilde{c})$ и $D(\widetilde{c^*})$ устанавливается путем обращения функции С. А. Чаплыгина

$$Z = \frac{(\omega - 1)^2}{\omega + \varepsilon_0}, \qquad (2)$$

где $\varepsilon_0 = \xi_0 + i\eta_0$ — расчетные параметры выбираются таким образом, чтобы построенный с помощью (2) теоретический профиль был близок к $\widetilde{c}$ в смысле (1). При этом ряд Фурье функции $\delta^*(\theta_1)$:

$$\delta^*(\theta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta_1 + b_n \sin n\theta_1), \qquad (3)$$

$a_n = b_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ будет абсолютно и равномерно сходиться. Используя разложение (3), автор находит приближенное выражение искомой отображающей функции, в следующем виде

$$\zeta = (1 - c_0)\,\omega - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{\omega^{n-1}}, \qquad (4)$$

где $c_n = a_n + ib_n$ и ряд (4) оказывается абсолютно сходящимся в области $|\omega| \geqslant 1$.

Далее с помощью известного метода разложения по степеням малого параметра (Канторович Л. В. и Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, М., 1952), автор ищет более общую функцию, отображающую область $D(\widetilde{c})$ на $D(c^*)$, в следующем виде

$$\zeta = \omega + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k P_k(\omega), \qquad (5)$$

$$\zeta(\infty) = \infty, \left|\frac{d\zeta}{d\omega}\right|_{\infty} > 0.$$

где ε — фиксированная положительная величина, $P_k(a)$ — неизвестные вначале функции, голоморфные вне контура $\widetilde{c}$, с единственным полюсом $\omega = \infty$, в окрестности которого они могут быть представлены в виде

$$P_k(\omega) = \sum_{\nu=-1}^{\infty} \frac{a_{-\nu, k}}{\omega^k}.$$

Излагается способ для последовательного вычисления необходимого числа функций $P(\omega)$ из последовательности $\{P_k(\omega)\}$. После отыскания отображающей функции $\zeta = f(z, \widetilde{c})$ поле скоростей в плоскости течения рассчитывается обычными методами. Приведены примеры. Аналогичным методом дается решение задачи об обтекании решетки произвольных профилей, при этом используются функции, введенные Э. Л. Блохом и Е. И. Умновым. Г. Я. Хажалия

7547 К. Лекции по теории функций одного комплексного переменного. Том II. 3-е изд. Сансоне (Lezioni sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa. Vol. II. 3 ed. Sansone Giovanni, Padova, Casa ed. Dott. A. Milani, 1954, XII, 507 p., 3500 L.), Bibliogr. ital., 1955, 89, № 645-646, 55 (итал.)
Том I см. РЖМат, 1956, 2874 К.

7548 К. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. Маравич (Збирка задатака из теорије функција комплексне променљиве. Маравић М.), Сарајево, 1959, 120 стр. (сербо-хорв.)
Сборник содержит 60 задач, из которых 16 решено подробно. Выбор задач сделан на высоком уровне. Задачи в основном относятся к применению теории вычетов, к конформным отображениям и к разложению в ряды. Некоторые из них предлагались на экзаменах на Математико-физическом факультете в Белграде и на Математическом отделении Философского факультета в Сараеве, а остальные, по словам самого автора, взяты из книги Копсона (Copson E. T., An introduction to the theory of functions of a complex variable, London, 1935). Д. С. Митринович

7549 Д. Общие свойства квазиконформных отображений. Белинский П. П. Автореф. дис. докт. физ.-матем. н., Ин-т матем. Сибирск. отд. АН СССР, Новосибирск, 1959

См. также: 7421, 7653, 7661, 7683, 7787, 7803, 7815, 7821, 7824, 7825 К, 7881, 7888, 8216, 8221.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редакторы *В. В. Немыцкий, Н. И. Мозжерова*

7550. Об одной асимптотической задаче. Гофман И. Я., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 5, 98—103

Формулируются условия существования и единственности решения дифференциальной системы:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y)\varphi(x);$$

$$y|_{x=0} = y_0 > 0,\ y'|_{x=0} = y''|_{x=0} = \ldots = y^{(n-2)}|_{x=0} = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \to +\infty} y'(x) = 0,$$

где $f(x, y)$ и $\varphi(x)$ подчинены при $x \geqslant 0$, $-\infty < y < \infty$ условиям: 1) $f(x, y)$ — однозначная и негрерывная функция; 2) $y \cdot f(x, y) > 0$ при $x > 0$; 3) $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqslant x^{-n} |y_2 - y_1|$, при $x > 0$; $f(x, y)$ абсолютно ограничена во всякой полосе S: $0 \leqslant x \leqslant a$, $-\infty < y < \infty$, где a — произвольное положительное число; 4) $\varphi(x)$ — непрерывная функция от x, $\varphi(x) > 0$ при $x \geqslant 0$ и для всякого $x > 0$

$$\frac{1}{(n-1)!\, x} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{n-2} \varphi(t)\, dt < 1.$$

Ю. А. Клоков

7551. О некоторых уравнениях, близких к точно интегрирующимся. Митропольский Ю. А., Автомат. упр. и вычисл. техн. Вып. 2. М., Машгиз, 1959, 221—248

Предлагается способ построения приближенного решения некоторых нелинейных уравнений, содержащих малый параметр ε, причем при $\varepsilon = 0$ эти уравнения могут быть проинтегрированы и представляют колебательный процесс. Этот способ опирается на метод Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова.

1. Рассматривается уравнение вида

$$d^2x/dt^2 + f(\tau, x) = \varepsilon F(\tau, x, dx/dt, \varepsilon), \qquad (1)$$

где ε — малый положительный параметр, $\tau = \varepsilon t$ — „медленное" время, функция F при достаточно малых значениях ε является аналитической относительно ε. Предполагается, что „невозмущенное" уравнение

$$d^2x/dt^2 + f(\tau, x) = 0, \qquad (2)$$

где τ считается постоянным параметром, обладает периодическим решением $x = z(\tau, \psi, a)$, где $\psi = \omega(\tau, a)t + \varphi$. Далее вводятся в уравнение (1) новые переменные a и ψ по формулам $x = z(\tau, \psi, a)$, $dx/dt = \omega(\tau, a) z'_{\psi}(\tau, \psi, a)$, после чего уравнение (1) заменяется следующими

$$da/dt = \varepsilon\Phi_1(\tau, \psi, a, \varepsilon),\ d\psi/dt = \omega(\tau, a) + \varepsilon\Phi_2(\tau, \psi, a, \varepsilon), \quad (3)$$

где функции Φ_1 и Φ_2 периодические по ψ с периодом 2π, они разлагаются в степенные ряды по ε, а каждый из коэффициентов этих рядов разлагается в ряд Фурье по косинусам и синусам углов, кратных ψ. Решение уравнений (3) предлагается находить методом, близким к методу усреднения Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова.

2. Рассматривается также способ составления уравнений для a и ψ без предварительного нахождения решения „невозмущенного" уравнения (2). Аналогичным образом анализируется уравнение вида (1), в котором функция F зависит явно от t: $F = F(\tau, \theta, x, dx/dt, \varepsilon)$, где $d\theta/dt = \nu(\tau)$, причем F является периодической функцией θ с периодом 2π. Рассматривается отдельно резонансный случай, когда при некоторых значениях a и τ имеет место равенство (приближенное) $\nu(\tau) \approx \approx \frac{p}{q}\omega(\tau, a)$, где p, q — целые взаимно простые числа, а также „нерезонансный", когда указанное равенство не выполняется ни при каких a и τ.

Уравнения для приближений a_1, ψ_1, a_2, ψ_2 и т. д., которые получаются после применения к уравнениям (3)

метода усреднения, автор предлагает интегрировать численно, ввиду их сложности. Ю. А. Рябов

7552. **К вопросу об уравнениях, близких к уравнениям, интегрируемым в замкнутом виде. Митропольский** (До питання про рівняння, близькі до точно інтегровних. Мітропольський Ю. О.), Вісник Київськ. ун-ту, 1958, № 1, Сер. астрон., матем. та механ., вип. 1, 97—100 (укр., рез. русск.)

Рассматривается уравнение вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = \varepsilon F\left(x, \frac{dx}{dt}, \varepsilon\right), \qquad (1)$$

где ε — малый положительный параметр, F — аналитическая функция ε при достаточно малых значениях ε. „Невозмущенное" уравнение $\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0$ имеет периодическое решение $x = z(\psi, a)$. Предлагается способ построения приближенного решения уравнения (1), аналогичный методу Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова. Более подробно уравнение вида (1) рассмотрено автором в другой статье (реф. 7551). Ю. А. Рябов

7553. **Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью. Чечик В. А.**, Тр. Моск. матем. о-ва, 1959, **8**, 155—198

Изучаются системы вида

$$y'_k = f_k(x, y_1, \ldots, y_n), \qquad k = 1, \ldots, n, \qquad (1)$$

где все функции f_k и $\partial f_k/\partial y_k$ непрерывны в области $D: 0 < x \leqslant b$, $|y_k| \leqslant a$ и могут быть неограниченными при $x \to +0$. Устанавливаются достаточные условия для существования (или отсутствия) решений системы (1) с начальными условиями

$$y_k(0) = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \qquad (2)$$

критерии единственности и непрерывной зависимости решения от начальных условий и правых частей системы (1). В случае неединственности решения изучаются свойства интегральной воронки. Указывается метод построения последовательных приближений к решению системы (1), и исследуется скорость сходимости приближений. Большая часть этих результатов была ранее опубликована без доказательств (РЖМат, 1957, 6340). А. Ф. Филиппов

7554. **Новые методы решения систем линейных дифференциальных уравнений высокого порядка. Чебфалви** (Neuere Lösungsmethode von linearen Differentialgleichungssystemen höherer Ordnung. Csébfalvi K.), Z. angew. Math. und Mech., 1959, **39**, № 9-11, 357—358 (нем.)

7555. **О линейном дифференциальном уравнении второго порядка. Перчинкова-Вчкова** (Sur une équation différentielle linéaire du second ordre. Perčinkova-V'čkova D. Bull. Soc. Math. Phys. Macédoine, 1955, **6**, 27—29) (макед.; рез. франц.)

Доказывается, что для линейного дифференциального уравнения

$$x^2(1 + x^3)y'' - \frac{3}{2}xy' + y = 0, \qquad y = y(x),$$

частными решениями являются функции

$$y_1 = -3t^2/(t^3 + 2), \qquad y_2 = -3(t^4 + 8t)^{1/2}/(t^3 + 2),$$

при этом $x = -3t/(t^2 + 2)$. D. S. Mitrinovitch

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 11, 898.

7556. **Относительно области приложения одной подстановки для решения дифференциальных уравнений первого порядка. Банков, Симеонов** (Относно областта на приложение на една субституция за решаване на диференциални уравнения от първи ред. Банков Г., Симеонов Ив.), Научни тр. Висш. ин-т хранит. и вкус. пром-ст. Пловдив, 1959, **5**, 331—336 (болг.; рез. русск., нем.)

Ищется область приложения подстановки вида $y = z(x-\alpha)+\beta$, где α и β—произвольные действительные числа. Доказывается, что совокупность дифференциальных уравнений первого порядка, которые интегрируются в квадратуре посредством этой замены переменных, исчерпываются уравнениями, которые могут быть представлены в виде

$$y' = f(x)\, g\left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right) + \left(\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right).$$

В связи с этим дальше устанавливается, что часть дифференциальных уравнений Риккати при определенных условиях, накладываемых на их коэффициенты, могут интегрироваться в квадратурах без знания частного интеграла посредством упомянутой подстановки.

Резюме автора

7557. **Решение линейного дифференциального уравнения, содержащего большой параметр, в окрестности регулярной особой точки. Мак-Келви** (Solution about a singular point of a linear differential equation involving a large parameter. McKelvey Robert), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **91**, № 3, 410—424 (англ.)

Обозначения: τ — комплексное постоянное; N — положительное число; R — односвязное компактное подмножество комплексной плоскости, имеющее 0 внутренней точкой; $\varphi(z)$ — неисчезающая однозначная аналитическая функция $z \in R$, первообразная которой $\Phi(z) \equiv \int_0^z \varphi(t)\,dt$ однолистна в R, причем $\Phi(R)$ выпукло; $\psi(z, \lambda)$ — аналитическая однозначная функция $z \in R$, $|\lambda| > N$. Указываются асимптотические разложения решений уравнения

$$\frac{d^2u}{dz^2} - \left[\lambda^2\varphi^2(z) + \lambda\frac{\psi(z,\lambda)}{z} + \frac{\tau}{z^2}\right]u = 0,$$

справедливые при достаточно больших по модулю значениях λ. Выводятся оценки отклонения частной суммы асимптотического ряда от соответствующего решения. Статья принадлежит к циклу работ, связанных по постановке задач и методике с исследованиями Лангера (см., например, Langer R., Trans. Amer. Math. Soc., 1949, 67, 461—480). Ю. С. Богданов

7558. **Асимптотические решения уравнения $u^{IV} + \lambda^2 \times (zu'' + \alpha u' + \beta u) = 0$ для больших $|\lambda|$. Рабенстейн** (Asymptotic solutions of $u^{IV} + \lambda^2(zu'' + \alpha u' + \beta u) = 0$ for large $|\lambda|$. Rabenstein Albert L.), Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1958, **1**, № 5, 418—435 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$u^{IV} + \lambda^2(zu'' + \alpha u' + \beta u) = 0,$$

z — комплексное независимое переменное, α, β — комплексные параметры, зависящие, вообще говоря, от λ и равномерно ограниченные при $|\lambda| \geqslant |\lambda_0|$. При помощи интеграла Лапласа решение находится в виде

$$u = \int_C t^{\alpha-2} \exp\left(\frac{1}{3}\lambda^{-2}t^3 - \beta t^{-1} + zt\right)dt,$$

где C — контур, удовлетворяющий требованию

$$\left[t^{\alpha} \exp\left(\frac{1}{3}\lambda^{-2}t^3 - \beta t^{-1} + zt\right)\right]_C = 0.$$

Пусть $\frac{2}{3}\arg\lambda \leqslant \arg\beta \leqslant 2\pi + \frac{2}{3}\arg\lambda$ и пусть T_1, T_2, T_3, $\overline{T}_2$ соответственно секторы $\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\arg\lambda < \arg t <$

$< \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\arg\lambda$, $\frac{5}{6}\pi + \frac{2}{3}\arg\lambda < \arg t < \frac{7}{6}\pi + \frac{2}{3}\arg\lambda$, $-\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\arg\lambda < \arg t < -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\arg\lambda$, $-\frac{7}{6}\pi + \frac{2}{3}\arg\lambda < \arg t < -\frac{5}{6}\pi + \frac{2}{3}\arg\lambda$. Построены решения $u = A_k$ $(k = 1, 2, 3)$ (контур $C(A_1)$ проводится из ∞ в ∞ через $\overline{T}_2$ и T_3, контур $C(A_2)$ через T_3 и T_1, а $C(A_3)$ через T_1 и T_2), $u = B_k$ $(k = 1, 2, 3)$ (контуры $C(B_1)$, $C(B_2)$, $C(B_3)$ выходят из нуля по направлениям $\arg t = \arg\beta$, $\arg t = \arg\beta$, $\arg t = \arg\beta - 2\pi$ соответственно и уходят на ∞ в T_1, T_2 и T_3 соответственно) и $u = B_0$ (контур $C(B_0)$ выходит из нуля по направлению $\arg t = \arg\beta - 2\pi$, окружает начало и замыкается в нуле по направлению $\arg t = \arg\beta$). Подробно изучены асимптотические свойства каждого из этих решений и установлены формулы связи между ними. Показано, что B_0, B_l, A_j, A_k (где i, j, k различны) образуют фундаментальную систему решений исходного уравнения. А. Б. Васильева

7559. Аналитическое построение решений в окрестности изолированной особой точки системы нелинейных дифференциальных уравнений. Ивано (Intégration analytique d'un système d'équations différentielles non linéaires dans le voisinage d'un point singulier. I. Iwano Masahiro), Ann. mat. pura ed appl., 1957, 44, 261—292 (франц.)

Рассматривается система уравнений:

$$x^{1+\sigma}\frac{dy_j}{dx} = \lambda_j(x)\,y_j + x^{\sigma}h_j(x, y_1, \ldots, y_n),\quad j = 1, \ldots, n, \quad (1)$$

где $h_j(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(j = 1, \ldots, n)$ — регулярные функции при $x \in D(\theta, \theta', r)$, $|y_j| < \eta$ $(j = 1, \ldots, n)$, $\lambda_j(x)$ — полиномы, $D(\theta, \theta', r)$ — сектор с вершиной в точке $x = 0$, $h_j(x, 0, \ldots, 0) \equiv 0$, $j = 1, \ldots, n$.

При определенных условиях, налагаемых на $\Lambda_s(x) = \int_{\infty}^{x} \frac{\lambda_s(x)}{x^{1+\sigma}}\,dx$ и на начальные данные, решения системы (1) могут быть представлены в некотором секторе $D(\theta_-, \theta_+, r)$ с вершиной в точке $x = 0$ в виде равномерно сходящихся рядов по неотрицательным степеням переменных $x, z_1, \ldots, z_n$, где коэффициенты разложений являются регулярными функциями от x в области $D(\theta_-, \theta_+, r')$, разлагающимися в этой области в асимптотические ряды, а $z_1, \ldots, z_n$ определяются из некоторой системы дифференциальных уравнений. В. В. Леонов

7560. О функциях, определяемых обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка. Кимура (Sur les fonctions définies par les équations différentielles ordinaires du premier ordre. Kimura Tosihusa), Comment. math. Univ. St. Pauli, 1959, 7, № 2, 65—75 (франц.)

Исследуются решения уравнения

$$dy/dx = f(x, y) \quad (1)$$

с правой частью, заданной на области $\mathfrak{D}$ пространства (x, y), однозначной и мероморфной, т. е. представимой в окрестности каждой точки $\mathfrak{D}$ в виде отношения двух голоморфных функций

$$f(x, y) = \psi_2(x, y)/\psi_1(x, y).$$

Классификация точек $\mathfrak{D}$ относительно уравнения: (x_0, y_0) — а) регулярная, б) обыкновенная, в) особая первого рода, г) особая второго рода — точка уравнения (1), если соответственно, а) $\psi_1(x_0, y_0) \neq 0$, б) $\psi_1(x_0, y_0) \neq 0$ или $\psi_1(x_0, y_0) = 0$, но $\psi_2(x_0, y_0) \neq 0$, $\psi_1(x_0, y) \not\equiv 0$, в) $\psi_1(x_0, y_0) = \psi_2(x_0, y_0) = 0$, но $\psi_1(x_0, y) \not\equiv 0$, г) $\psi_1(x_0, y_0) = \psi_2(x_0, y_0) = 0$ и $\psi_1(x_0, y) \equiv 0$. Решение (1) — аналитическая функция, возникающая из элемента решения при аналитическом продолжении внутри $\mathfrak{D}$ (а не полная аналитическая функция). Классификация особых точек решения:

Особая точка α решения $y = \varphi(x)$ уравнения (1) названа неподвижной особой точкой первого рода φ, если предельное множество $\varphi(x)$, $x \to \alpha$, содержит β такое, что (α, β) — особая точка первого рода уравнения (1). Особая точка ξ решения φ названа неподвижной особой точкой второго рода φ, если при каком-нибудь η точка (ξ, η) является особой точкой второго рода уравнения (1). Все остальные особые точки φ названы подвижными. Подвижная особая точка x_0 решения φ названа точкой первого рода, если $\varphi(x) \to y_0$ при $x \to x_0$ и $\psi_1(x_0, y_0) = 0$, $\psi_1(x_0, y) \not\equiv 0$, $\psi_2(x_0, y_0) \neq 0$, и второго рода во всех остальных случаях.

Обозначения: $\overline{\mathfrak{D}}$ — замыкание $\mathfrak{D}$, S_a — предельное множество φ при $x \to a$, $\mathfrak{S}_a = \{(a, b) \mid b \in S_a\}$ (очевидно $\mathfrak{S}_a \subset \overline{\mathfrak{D}}$), D — область плоскости (x), $Y = \{y \mid |y| < \infty\}$. Доказано: Неподвижная особая точка α первого рода является трансцендентной особой точкой, т. е. $\mathfrak{S}_a$ одноточечно. $\mathfrak{S}_\xi$ для подвижной особой точки ξ второго рода принадлежит границе $\mathfrak{D}$ (следствие: при $\mathfrak{D} = D \times Y$ решения (1) не имеют подвижных существенно особых точек внутри D). Если ξ — неподвижная особая точка второго рода и существенно особая точка решения φ, причем $\mathfrak{S}_\xi$ содержит внутренние точки (ξ, η_0) из $\mathfrak{D}$, то $\varphi(x)$ в любой окрестности ξ принимает все значения из интервала $\{y \mid (\xi, y) \in \mathfrak{D}\}$ за исключением тех $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$, которые являются точками неопределенности $f(x, y)$. Пусть $\mathfrak{D} = D \times Y \setminus f$, где f — замкнутое множество в $\mathfrak{D}$ без внутренних точек, и для каждой $(a, b) \in \mathfrak{D}$ существует $H(x, y; a, b)$ голоморфная относительно $(x, y) \in \mathfrak{D}$ при $|x - a| < \rho$ $(\rho > 0)$, $|y - b| > 0$, с модулем $|H(x, y; a, b)|$ однозначным и непрерывным для $|x - a| < \rho$, $0 < |y - b| < \infty$, причем $H(x, y; a, b) \neq 0$ для $(x, y) \in f$ и для $y = \infty$. Тогда каждое решение φ обладает свойством Иверсена на D, т. е. φ аналитически продолжимо в D от некоторой a до любой окрестности наперед заданной b по пути сколь угодно близкому к наперед заданному. Если $F(x, y)$ однозначна и мероморфна на $\mathfrak{D}$, то неявная функция $y = y(x)$, определяемая уравнением $F(x, y) = 0$, обладает свойством Иверсена на D. Ю. С. Богданов

7561. Об асимптотическом интегрировании дифференциального уравнения одной автомодельной динамической задачи. Герасимов И. С., Докл. АН СССР, 1959, 126, № 4, 727—729

Рассматривается система дифференциальных уравнений, описывающая движение упругого элемента конической оболочки, толщина которой пропорциональна расстоянию от вершины, при условии, что на поверхность конуса действует осесимметричная нормальная подвижная нагрузка, распространяющаяся с постоянной скоростью от вершины вдоль оси симметрии. Система сводится к одному обыкновенному линейному неоднородному дифференциальному уравнению шестого порядка

$$w^{(VI)} + q_1 w^{(V)} + q_2 w^{(IV)} + q_3 w''' + (q_4 + b^4 q_5)\,w'' + (q_6 + b^4 q_7)\,w' + (q_8 + b^4 q_9)\,w = q_0, \quad (1)$$

q_i — некоторые, вообще говоря, дробные функции независимого переменного ζ, b — большой параметр. Выписан главный член асимптотики решения однородного уравнения, соответствующего (1), без учета точек поворота: $w = \theta(c_1 \cos m + c_2 \sin m + c_3 \operatorname{ch} m + c_4 \operatorname{sh} m + c_5 m + c_6)$, где $\theta = \Delta^{-\frac{1}{6}} \exp\left(-\frac{1}{6}\int q_1 d\zeta\right)$.

$m = b\int_0^{\zeta} \sqrt[4]{-q_5}\, d\zeta$, $\Delta = \frac{1}{1024}(-q_5)^{-\frac{9}{4}} Q$, Q — многочлен относительно q_5 и его производных до 4-го порядка включительно. Приведены результаты расчета в указанном приближении некоторых механических величин, характеризующих рассматриваемый процесс.

А. Б. Васильева

7562. Расчет переходного процесса в линейных системах методом понижения порядка дифференциального уравнения. Каляев А. В., Автоматика и телемеханика, 1959, 20, № 9, 1171—1179 (рез. англ.)

Для линейного уравнения с постоянными коэффициентами $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0$ при использовании вариационных соображений дается способ построения уравнения более низкого порядка $\sum_{k=0}^{m} b_k y_{\text{пр}}^{(k)}$, решение которого аппроксимировало бы в некотором смысле решение исходного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Коэффициенты b_k определяются из требования

$$\int_0^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{m} b_k y^{(k)}(t)\right]^2 dt = \min, \quad \int_0^{\infty} [y(t) - y_{\text{пр}}(t)]\, dt = 0,$$

что в конечном счете сводится к решению линейной алгебраической системы уравнений. В работе не дается математического обоснования и исследования условий применимости приведенной схемы, указывается лишь на то, что схема может дать удовлетворительные результаты для наиболее распространенных систем автоматического регулирования, и приводятся расчеты для некоторых конкретных примеров.

А. Б. Васильева

7563. Об одном методе оценки близости решений некоторых дифференциальных уравнений. Усубакунов Р., В сб.: Материалы 8-й Научн. конференции профессорско-преподават. состава Физ.-матем. фак. (Кирг. ун-т). Фрунзе, 1959, 43—46

Решение задачи Коши для дифференциального уравнения $R(y) = f(x)$, $R(y) \equiv y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y$ заменяется решением задачи Коши для уравнения $Q(z) = z^{(n)} + b_1(x) z^{(n-1)} + \ldots + b_n(x) z = f(x)$, где $|b_i(x) - a_i(x)| < \varepsilon$, $x \in [a, b]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Даётся оценка разности $y - z$ и ее производных.

Л. Я. Цлаф

7564. О линейном дифференциальном уравнении третьего порядка с постоянными коэффициентами. Грегуш (O lineárnej diferenciálnej rovnici tretieho rádu s konštantnými koeficientami. Greguš M.), Acta Fac. rerum natur. Univ. Comenianae Math., 1957, 2, № 1-2, 61—66 (словацк.; рез. русск., нем.)

Рассматривается уравнение $y''' + 2A(\lambda) y' + Q(\lambda) y = 0$ Предполагается, что $A(\lambda) > 0$, $Q(\lambda) > 0$, $A(\lambda)/Q(\lambda) < k$ $\lim_{\lambda \to \lambda_1} A(\lambda) = +\infty$. При этом предположении доказано, что существует такое λ и решение $y(x, \lambda)$, что $y(x_0 - d, \lambda) = y(x_0, \lambda) = y''(x_0, \lambda) = 0$, где $d > 0$.

В. А. Кондратьев

7565. О приводимости канонической системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Бреус К. А., Докл. АН СССР, 1958, 123, № 1, 21—24

Указанная в заголовке система $2m$ уравнений записывается в векторной форме

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon JH(\tau) x, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}$$

(I_m — единичная $m \times m$ матрица, $H(\tau)$ — вещественная симметрическая матрица-функция, $H(\tau + 2\pi) = H(\tau)$) ξ — малый параметр, $\varepsilon = 1/\omega$, где ω — циклическая частота). По известной теореме Флоке — Ляпунова существует замена

$$x = U(\tau, \varepsilon) y \quad (U(0, \varepsilon) = I_{2m}),$$

где $U(\tau + 2\pi, \varepsilon) = U(\tau, \varepsilon)$ такая, что y удовлетворяет уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy}{d\tau} = K(\varepsilon) y. \tag{1}$$

Автор доказывает, что $U(\tau, \varepsilon)$ может быть выбрана аналитической функцией ε при $\varepsilon = 0$ и такой, что 1) система (1) будет канонической, т. е.

$$K(\varepsilon) = \widetilde{J}\widetilde{H}(\varepsilon),$$
$$\widetilde{H}(\varepsilon) = \widetilde{H}(\varepsilon)^*, \tag{2}$$

2) $K(\varepsilon)$ будет аналитической функцией ε при $\varepsilon = 0$. Аналитичность доказывается без труда, автор ссылается в этом месте на свой предыдущий результат (РЖМат, 1956, 4505; 1957, 2296) (она следует также из работы Н. П. Еругина, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1946.—*Реф.*). Содержанием статьи является доказательство соотношения (2).

В. А. Якубович

7566. К теории линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами. Зверкин А. М., Докл. АН СССР, 1959, 128, № 5, 882—885

Рассматривается задача приведения системы дифференциальных уравнений с запаздываниями времени

$$X'(t) + A_0(t) X(t) + A_1(t) X(t - \tau_1) + \ldots$$
$$\ldots + A_m(t) X(t - \tau_m) = 0 \tag{1}$$
$$(\tau_i > 0, \quad i = 1, \ldots, m),$$

(где $X(t)$ — n-мерный вектор, $A_0(t), \ldots, A_m(t)$ — $n \times n$-периодические матрицы-функции с периодом T) к системе с постоянными коэффициентами ляпуновским неособым преобразованием $X(t) = L(t) Y(t)$. Для приводимости системы необходимо и достаточно здесь выполнение условий

$$L^{-1}(t) A_i(t) L(t - \tau_i) = \text{const}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m), \tag{2}$$

где $L(t)$ — матрица, приводящая укороченную систему

$$X'(t) + A_0(t) X(t) = 0. \tag{3}$$

Указывается, что в постановке задачи, принятой автором, задача в общем случае не разрешима. Отмечается возможность расширения класса приводимых систем заменой времени $\eta = \eta(t)$. Например, если система

$$X'(t) + b(t)[A_0(t) X(t) + \ldots + A_m(t) X(t - mT)] = 0$$

($b(t)$ — положительная периодическая функция) заменой переменной $\eta = \int_0^t b(\xi)\, d\xi$ приводится к виду, удовлетворяющему условию (2), то эта система приводима. Несмотря на неприводимость в общем случае к стационарной системе, существует класс неприводимых уравнений, отыскание частных решений которых сводится к определению корней характеристического квазиполинома, как и для уравнений с постоянными коэффициентами. Этот метод вычисления решений развивается для уравнения

$$y'(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k(t) y(t - kT), \tag{4}$$

причем решение $y(t)$ ищется в виде $\exp \int_0^t f(\xi)\, d\xi$, где $f(\xi)$ — периодическая функция периода T. Намечается

также развитие метода и на случай системы. Показывается, что система решений, которая строится описанным методом, в общем случае не является фундаментальной. Достаточным условием фундаментальности системы является неприводимость уравнений. Утверждается, что корни уравнения

$$\lambda - \sum_{k=0}^{m} a_k \exp -kT\lambda = 0 \quad \left(\widetilde{a}_k = \frac{1}{T}\int_0^T a_k(t)\,dt\right), \qquad (5)$$

рассматриваемого в процессе решения уравнения (4) описанным в статье методом, позволяют судить об устойчивости (даже в том случае, когда построенная система решений не является фундаментальной): множество характеристических чисел уравнения (4) совпадает со множеством действительных частей корней уравнения (5), взятых с обратным знаком. Основные результаты приведены без доказательства.

Н. Н. Красовский

7567. О методе Ляпунова оценки характеристической постоянной. Старжинский В. М., Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Механ. и машиностр., 1959, № 4, 46—55

Рассматривается динамическая система, для которой уравнения возмущенного движения в первом приближении имеют вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}(t)\,x_1 + a_{i2}(t)\,x_2 \quad (i = 1, 2), \qquad (1)$$

где $a_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2)$ — вещественные, интегрируемые, кусочно-непрерывные, периодические функции времени t с периодом ω. Система (1) ортогональным преобразованием с периодическими коэффициентами может быть приведена к виду, когда функции a_{12} и a_{21} знакопостоянные, что и предполагается в дальнейшем. Вводятся обозначения

$$\int_0^\omega a_{11}dt = \alpha, \quad \int_0^\omega a_{22}dt = \beta, \quad (\alpha \geqslant \beta), \quad a = \frac{\alpha - \beta}{\omega} \geqslant 0.$$

Подстановками

$$x_1 = x\exp\int_0^t a_{11}dt, \quad x_2 = y\exp\int_0^t (a_{22} + a)\,dt$$

система (1) преобразуется к виду

$$\frac{dx}{dt} = r(t)\,y, \quad \frac{dy}{dt} = q(t)\,x - ay, \qquad (2)$$

где $r(t)$, $q(t)$ выражаются через $a_{ij}(t)$.

Через $V(t)$ обозначается матрицант системы (2). Характеристическая постоянная A по Ляпунову представляется сходящимся рядом

$$A = \frac{1}{2}\operatorname{Sp} V(\omega) = A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \ldots. \qquad (3)$$

Приводятся формулы для A_n, возникающие из применения метода последовательных приближений. Со ссылками на результаты М. Г. Крейна доказывается так называемое основное неравенство для членов ряда (3)

$$\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right| \leqslant \frac{n}{n+1}\left|\frac{A_n}{A_{n-1}}\right|. \qquad (4)$$

Основываясь на неравенстве (4), автор распространяет метод оценки характеристической постоянной, развитый Ляпуновым в работе 1902 г. для уравнения Хилла, на один из двух возможных для системы (1) случаев, именно, когда функции a_{12} и a_{21} имеют разные знаки. Обозначим $S_n = A_0 - A_1 + \ldots + (-1)^n A_n$. При выполнении любого из неравенств

$$S_{2\nu} \leqslant -\frac{1}{2}(e^{-\alpha} + e^{\beta}), \quad S_{2\nu-1} \geqslant \frac{1}{2}(e^{-\alpha} + e^{\beta})$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots),$$

невозмущенное движение рассматриваемой динамической системы неустойчиво. При выполнении неравенств

$$S_{2\nu} \leqslant \frac{1}{2}(e^{-\alpha} + e^{\beta}), \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant -\beta, \quad (\beta \leqslant 0),$$

$$S_{2\mu-1} \geqslant -\frac{1}{2}(e^{-\alpha} + e^{\beta})$$

с некоторыми фиксированными целыми μ и ν невозмущенное движение устойчиво. В заключение формулируются те из достаточных условий устойчивости и неустойчивости, для которых требуется знание трех первых членов ряда (3), не считая нулевого.

В. А. Якубович

7568. О пределе решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом при стремлении к нулю запаздывания. Беллман, Кук (On the limit of solutions of differential-difference equations as the retardation approaches zero. Bellman Richard, Cooke Kenneth L.), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1959, 45, № 7, 1026—1028 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$\left.\begin{aligned} u'(t) + au(t-\varepsilon) = g(u), \quad t > \varepsilon, \\ u(t) = f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Показано, что если: а) $g(u)$ удовлетворяет условию Липшица для $|u| < c_1$, б) $f(t)$ непрерывна при $t = 0$, в) $|f(0)| = c_2 < c_1$, то для $0 \leqslant t \leqslant t_0$ (где t_0 зависит от c_1 и $g(u)$),

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(t) = v(t),$$

где $v(t)$ — решение уравнения

$$v'(t) + av(t) = g(v),$$
$$v(0) = f(0),$$

причем сходимость равномерная для $0 \leqslant t \leqslant t_0$. Указано, что аналогичный результат может быть получен для систем уравнений. Обращается внимание на родство этой задачи задаче о вырождении дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной.

А. Б. Васильева

7569. Об асимптотической устойчивости систем с запаздывающим аргументом. Гермаидзе В. Е., Успехи матем. наук, 1959, 14, № 4, 149—156

Рассматривается система с запаздывающим аргументом

$$\left.\begin{aligned} dx_i(t)/dt = X_i(t, x_1(t-h_{i1}), \ldots x_n(t-h_{in})) + \\ + R_i(t, x_1(t-h_{i1}), x_2(t-h_{i2}), \ldots x_n(t-h_{in}), \\ x_1(t-\eta_{i1}), \ldots, x_n(t-\eta_{in})) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Доказывается, что если тривиальное решение системы

$$\left.\begin{aligned} dx_i(t)/dt = X_i(t, x_1(t-h_{i1}), \ldots, x_n(t-h_{in})) \\ (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

асимптотически устойчиво по показательному закону, и R_i в некотором смысле малы в среднем, то тривиальное решение системы (1) асимптотически устойчиво. В частности, система (2) может быть системой без отклоняющихся аргументов. При некотором ограничении на производные $\partial X_i/\partial t$ доказывается, что асимптотическая устойчивость тривиального решения уравнения (2) следует из асимптотической устойчивости по показательному закону тривиального решения систем

$$dx_i(t)/dt = X_i(\mu, x_1(t-h_{i1}), \ldots, x_n(t-h_{in}))$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

μ — постоянная; $0 \leqslant \mu < \infty$. Эти теоремы в качестве примера применяются к квазилинейным системам.

Л. Э. Эльсгольц

7570. О многоточечной краевой задаче. Левин А. Ю., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 5, 34—37

Рассматривается краевая задача

$$L[y] \equiv y^{(n)} - \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x)\, y^{(k)} = f(x),$$

$$y(a_i) = A_i \quad (i = 1, \ldots, n);$$

p_k и f непрерывны в $[a, b]$. Приводится усиление результата Валле-Пуссена: утверждается, что задача имеет и притом единственное решение при любых f и A_i, если $h = a_n - a_1 < h_j$, h_j — положительный корень одного из четырех многочленов $P_j(z)$, определяемых по $L[y]$. Коэффициенты $P_2(z)$ зависят, кроме того, от взаимного расположения точек a_i. Для краевой задачи

$$L[y] = f, \quad l_i[y] \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{ik} y^{(k)}(a_i) = 0$$

$$(i = 1, \ldots, n)$$

указана структура обратного оператора и даны оценки радиуса круга, внутри которого лежит спектр этого оператора. Доказательства теорем не приводятся. Для уравнений третьего и четвертого порядков более точные оценки величины h см. в работах: РЖМат, 1959, 9081; 1960, 2962.

Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк

7571. О нечетных периодических решениях уравнений четвертого порядка. Иманалиев М. В сб.: Материалы 8-й Научн. конференции профессорско-преподават. состава Физ.-матем. фак. (Кирг. ун-т). Фрунзе, 1959, 19—21

Указывается, что методом последовательных приближений можно доказать, что краевая задача

$$y^{(IV)}(x) = f(x, y, y', y'', y'''),$$

$$y(0) = y(\pi) = y''(0) = y''(\pi) = 0$$

имеет единственное нечетное периодическое решение, если функция $f(x, y, y', y'', y''')$ непрерывна в области $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $-\infty < y^{(i)} < \infty$ и удовлетворяет условию Липшица по переменным y, y', y'', y''' с достаточно малой постоянной Липшица.

Примечание референта. Утверждение автора, что это решение обязательно периодическое, т. е. $y(x + 2\pi) = y(x)$, ошибочно, так как эквивалентность краевой задачи интегро-дифференциальному уравнению

$$y(x) = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} K(x, s) K(s, t) \times$$

$$\times f[t, y(t), y'(t), y''(t), y'''(t)]\, dt ds,$$

где $K(x, s)$ — функция Грина краевой задачи $y''(x) = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$, справедлива только для значений x из сегмента $[0, \pi]$, а не для любых значений x, как предполагает автор. Например, задача $y^{IV}(x) = 1$, $u(0) = u(\pi) = u''(0) = u''(\pi) = 0$ имеет единственное (непериодическое) решение $y = c_1 x + c_3 x^3 + x^4/24$. В работе имеются ошибки в формулах.

Ю. К. Ландо

7572. Критерий дискретности спектра сингулярной струны. Кац И. С., Крейн М. Г., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 2, 136—153

Пусть S — струна, натянутая единичной силой между точками $x = 0$ и $x = L$ ($\leqslant \infty$). Через $M(x)$ обозначается масса $[0, x]$ при $0 < x \leqslant L$, и полагается $M(0) = 0$. S регулярна, если L и $M(L)$ конечны, иначе S сингулярна. В последнем случае предполагается, что $M(L) = M(L - 0)$. Струну S будем обозначать через S_0 и S_1 соответственно тому, будет ли ее левый конец закреплен неподвижно или будет свободно скользить по направлению, перпендикулярному к ее равновесному положению. Со струнами S_0 и S_1 ассоциируются их „амплитудные функции“ $\psi_0(x, \lambda)$ и $\psi_1(x, \lambda)$, которые являются решениями дифференциального уравнения $y'' + \lambda\rho(x)y = 0$, удовлетворяющими соответственно начальным условиям: $\psi_0(0; \lambda) = 0$, $\psi_0'(0, \lambda) = 1$; $\psi_1(0, \lambda) = 1$, $\psi'(+0, \lambda) = -M(+0)\lambda$. Здесь $\rho(x) = \frac{dM}{dx}$ — „обобщенная плотность“.

Обозначим через L_M гильбертово пространство всех M измеримых функций $f(x)$ $(0 \leqslant x < L)$, имеющих M-суммируемый квадрат на $[0, L)$, а через $\hat{L}_M$ множество тех функций из L_M, которые равны нулю в некоторой левой окрестности точки $x = L$. Сингулярной струне S_j $(j = 0, 1)$ соответствует одна и только одна неубывающая функция $\tau_j(\lambda)$ $(0 \leqslant \lambda < \infty; \tau_j(0) = 0, \tau_j(\lambda - 0) = \tau_j(\lambda))$ такая, что отображение $U_j : f \to F_j$, где $f \in L_M$, а

$$F_j(\lambda) = \int_0^L f(x)\, \psi_j(x, \lambda)\, dM(x) \quad (0 \leqslant \lambda < \infty),$$

есть изометрическое отображение $\hat{L}_M$ в гильбертово пространство L_{τ_j} всех τ_j измеримых функций, имеющих τ_j суммируемый квадрат на $[0, \infty)$, так что

$$\int_0^L |f(x)|^2\, dM(x) = \int_0^{\infty} |F_j(\lambda)|^2\, d\tau_j(\lambda).$$

Функция τ_j называется спектральной функцией сингулярной струны S_j $(j = 0, 1)$, а множество ее точек роста — спектром этой струны. Спектр струны S дискретен, если он имеет единственную предельную точку на бесконечности. Оказывается, что если у одной из струн S_0 и S_1 спектр дискретен, то таковым он будет и у другой, причем спектры обеих струн будут перемежаться. Устанавливается критерий дискретности спектра:

Для того чтобы спектр струны S был дискретным, необходимо и достаточно, чтобы в случае $L = \infty$ выполнялось условие $\lim\limits_{x \to \infty} x[M(\infty) - M(x)] = 0$, а в случае $M(L) = \infty$ — дуальное условие $\lim\limits_{x \to L} M(x)(L - x) = 0$.

Струна называется стилтьесовской, если она представляет собой нить, несущую только сосредоточенные массы m_j в точках ξ_j, имеющих единственную предельную точку L. Полагая $l_0 = \xi_1$, $l_j = \xi_{j+1} - \xi_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$, сопоставим струне S_1 непрерывную стилтьесовскую дробь

$$S(z) = l_0 + \cfrac{1}{m_1 z + \cfrac{1}{l_1 + \cfrac{1}{m_2 z + \ldots}}}.$$

Тогда, если $l_0 = 0$ и $z \in (-\infty, 0]$, то $S(z) = \int_0^{\infty} \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda + z}$, где $\tau(\lambda)$ — спектральная функция струны S_1, имеющей „спектральную плотность“ $\rho(x) = \sum_{j=1}^{\infty} m_j \delta(x - \xi_j)$ ($\delta(x)$ — функция Дирака). Из сформулированного выше критерия вытекает следующее утверждение:

Для того чтобы непрерывная дробь

$$\cfrac{1}{|a_1 z} + \cfrac{1}{|a_2} + \cfrac{1}{|a_3 z} + \cfrac{1}{|a_4} + \ldots \quad (a_n > 0, n = 1, 2, \ldots)$$

сходилась к мероморфной функции, необходимо и достаточно, чтобы либо

$$1)\quad \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j} = \infty,\quad \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \cdot \sum_{j=n}^{\infty} a_{2j+1} = 0,$$

либо

$$2)\quad \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j-1} = \infty,\quad \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j+1} \cdot \sum_{j=n+1}^{\infty} a_{2j} = 0.$$

Далее доказывается.

Теорема. Для того чтобы спектр сингулярной струны S состоял из чисел $(\leqslant 0)$ $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ таких, что $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы одна из величин L и $M(L)$ была конечна и чтобы в случае $L = \infty$ выполнялось условие: $\int_0^{\infty} x dM(x) < \infty$, а в случае $M(L) = \infty$ — дуальное условие $\int_0^{\infty} M(x) dx < \infty$.

В последнем параграфе статьи результаты для нагруженной струны переформулируются для сингулярной краевой задачи с дифференциальным оператором Штурма — Лиувилля. П. Е. Соболевский

7573. Обобщение теоремы Мальмквиста. Кимура, Сугаку, 1956, 8, № 1, 1—11 (японск.)

Автор излагает свои исследования, опубликованные в других работах (РЖМат, 1955, 2658; 1956, 3807), относительно приведения к простейшим видам дифференциального уравнения

$$x^{\sigma+1} \frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \qquad (E)$$

где σ — неотрицательное целое, P и Q — взаимно простые полиномы по y, коэффициенты которых регулярны в окрестности $x = 0$ и такие, что $P(0, y) \neq 0$, $Q(0, y) \neq 0$. Тогда, используя и развивая исследования Фукухара (см. ссылку выше), автор доказывает следующее обобщение теоремы Мальмквиста (Malmquist, Acta math., 1912—13, 36, 297—343):

Если (E) не является уравнением типа Риккати, тогда с помощью некоторых алгебраических операций можно выяснить, допускает или не допускает (E) решение с подвижной точкой ветвления в окрестности $x = 0$ („подвижной" означает, что положение точки ветвления решения меняется в зависимости от начальных условий).

Более того, если такое решение с подвижной точкой ветвления существует, тогда (E) может быть преобразовано в уравнение

$$x \frac{dz}{dx} = (\lambda z^{\nu+1} + \widetilde{P}(x, z))/(z + \widetilde{Q}(x, z)),$$

и $x = 0$ будет являться логарифмической точкой ветвления соответствующего решения. K. Yosida

7574. Об области монотонности некоторых нелинейных дифференциальных уравнений. Лушникова З. М., Тр. Уральского политехн. ин-та, 1958, сб. 74, 46—52

Рассматриваются системы дифференциальных уравнений, эквивалентные уравнениям $\ddot{x} + a\dot{x} + f(x) = 0$, $\ddot{x} + \varphi(x) + b\dot{x} = 0$, $\ddot{x} + \varphi(x)\dot{x} + b\dot{x} = 0$, $\ddot{x} + a\dot{x} + b\dot{x} + f(x) = 0$, образующиеся с помощью замены $\dot{x} = y, \ldots$, и формулируются следующие определения: Любое решение такой системы назовем монотонным относительно функции $V = x^2/2$, если производная по времени dV/dt, вычисленная вдоль этого решения, отрицательна Открытую область G, заполненную монотонными относительно V траекториями системы, назовем областью монотонности этой системы. При таком понимании монотонности и области монотонности изложенные в статье результаты не имеют силы, ибо для всех рассматриваемых уравнений строятся „области монотонности", содержащие, наряду с целыми траекториями системы, также их положительные полутраектории. Если в приведенном определении монотонности слово „решение" всюду заменить словами „положительная полутраектория", а в определении области монотонности слово „траекториями" заменить словами „положительными полутраекториями", то получатся определения, в свете которых в статье формулируются условия существования областей монотонности, т. е. некоторые ограничения на величины, определяющие названные выше уравнения, и строятся области монотонности соответствующих систем. При этом каждый раз доказывается, что, по крайней мере, те положительные полутраектории системы, которые принадлежат области монотонности, являются O^+-кривыми. Таким образом, опубликованные результаты развивают и детализируют, в частности, идеи референта (Вестн. Моск. ун-та, 1951, № 3). А. Д. Горбунов

7575. О трех проблемах различения. Куклес И. С., Докл. АН СССР, 1959, 128, № 2, 239—242

Дается сводка результатов и уточненные формулировки теорем по проблемам различения, возникающим при анализе поведения интегральных кривых дифференциального уравнения 1-го порядка в окрестности особой точки, которые были получены автором в последние годы (см., в частности, РЖМат, 1959, 3766; 1960, 334, 2926, 2933; Тр. Узб. ун-та, 1958, № 78, 195—203). А. Ф. Андреев

7576. О критических точках некоторого класса дифференциальных уравнений. Лефшец (On the critical points of a class of differential equations. Lefschetz Solomon), Ann. Math. Studies, 1958, 4, № 41, 19—28 (англ.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$dx/dt = -y + C(x), \qquad (1)$$

$$dy/dt = [y^2 - 2A(x)y + B(x)] \cdot E(x, y),$$

где $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $E(x, y)$ — ряды по целым положительным степеням x или x и y, сходящиеся при малых x и y; $A(0) = B(0) = B'(0) = C(0) = C'(0) = 0$, $E(0, 0) = 1$. Доказывается, что интегральные кривые системы (1) образуют на плоскости xy в достаточно малой окрестности точки (0, 0) не более, чем одну эллиптическую область (область, покрытая интегральными кривыми, которые обоими концами примыкают к точке (0, 0), так, что из каждых двух одна вложена в другую); эта область, если она существует, пересекается осью y (см. также работу референта, РЖМат, 1956, 7329). А. Ф. Андреев

7577. Об условиях существования предельных циклов. Барбашин Е. А., Табуева В. А., Прикл. матем. и механ., 1959, 23, № 5, 826—835

Изучается система, траектории которой получаются путем склеивания по оси абсцисс траекторий двух систем уравнений:

$$\dot{x} = y; \quad \dot{y} = -R(x, y) - f_1(x) \quad (y > 0), \qquad (1)$$

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -R(x, y) - f_2(x) \quad (y < 0). \qquad (2)$$

На правые части (1) и (2), кроме обычных требований непрерывности и дифференцируемости функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $R(x, y)$, налагаются требования: $R(x, 0) \equiv 0$; $R(x, y)$ — возрастающая функция y; функции, входящие в правые части, имеют период 2π по переменному x; на отрезке длины 2π каждая из систем (1) и (2) имеет три точки покоя: $f_1(x_2) = f_1(0) = f_1(x_1) = 0$ и $f_2(\eta_2) = f_2(\eta_0) = f_2(\eta_1) = 0$, причем $x_1 - x_2 = \eta_1 - \eta_2 = 0$. В статье изучается склеивание траекторий только таких систем (1) и (2), расположение точек покоя которых удовлетворяет неравенствам

$$x_2 < \eta_2 < \eta_0 < 0 < x_1 < \eta_1, \qquad (3)$$

точки $(x_2, 0), (\eta_2, 0), (\eta_1 0)$ и $(x_1, 0)$ являются сёдлами системы (1) или (2), а точки $(0, 0)$ и $(\eta_0, 0)$ — устойчивыми фокусами, и для которых $\int_0^{2\pi} f_1(x)\,dx < 0$.

Для получения фазовой картины используется метод изоклин. Обнаруживается, что интервалы (x_2, η_2), $(\eta_0, 0)$ и (x_1, η_1) состоят из неустойчивых точек покоя. Для оценки взаимного расположения сепаратрис используется теорема сравнения типа неравенств Чаплыгина. Доказывается: Если $2\int_0^{x_1} f_1(x)\,dx \geqslant A^2$, $2\int_{\eta_0}^{\eta_2} f_2(x)\,dx \geqslant B^2$, где $A = \max \Phi_1(x)$ для $\eta_2 \leqslant x \leqslant 0$ и $B = \min \Phi_2(x)$ для $\eta_0 \leqslant x \leqslant x_1$ — экстремальные значения изоклин нулевого наклона $y = \Phi_1(x)$ для $\eta_2 \leqslant x \leqslant 0$ и $y = \Phi_2(x)$ для $\eta_0 \leqslant x \leqslant x_1$, то склеенная система имеет хотя бы один устойчивый предельный цикл. Если найдутся $x = x_*$ на отрезке $[0, x_1]$ и $x = \eta_*$ на отрезке $[\eta_2, \eta_0]$ такие, что одновременно выполняются неравенства

$$\int_{\eta_*}^{x_*} f_2(x)\,dx < 0 \quad \text{и} \quad \int_{\eta_*}^{x_*} f_1(x)\,dx > 0,$$

то склеенная система имеет по крайней мере один устойчивый предельный цикл. Последний результат сохраняет силу и при $\eta_* = \eta_2$ и $x_* = x_1$. Кроме того, доказано, что каждый из упомянутых циклов охватывает интервал $(\eta_0, 0)$, состоящий из неустойчивых точек покоя.

М. И. Ельшин

7578. **О существовании и единственности периодического решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$. Лощинин В. С.**, Уч. зап. Рязанск. гос. пед. ин-та, 1956, **13**, 328—334

Автор доказал существование и единственность периодического решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ в некоторой полосе $x \geqslant 0$, $a \leqslant y \leqslant b$, при более общих условиях, чем у референта (РЖМат, 1960, 330). В частности, автор предполагает, что через произвольную точку полосы может пройти бесчисленное множество интегральных кривых. Также доказывается, что по мере возрастания x всякое решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y = f(x, y)$ приближается к периодическому решению.

С. А. Самедова

7579. **Обобщение метода изоклин построения поля направлений дифференциального уравнения первого порядка. Малышев Ю. В.**, Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 3, 88—90

Для изучения поля направлений дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ автор составляет конечное уравнение $\frac{y - \bar{y}}{x - \bar{x}} = f(x, y)$, определяющее линию сходящихся направлений поля к фиксированной точке $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y})$. Перемещая точку $\bar{M}(\bar{x}, \bar{y})$ вдоль произвольной кривой, получают семейство линий сходящихся направлений. На примерах показано, как построение этого семейства можно использовать для качественного изучения интегральных кривых дифференциального уравнения.

П. Н. Папуш

7580. **О рождении предельных циклов из петли сепаратрисы и из сепаратрисы состояния равновесия типа седло-узел. Андронов А. А., Леонтович Е. А.**, Матем. сб., 1959, **48**, № 3, 335—376

Рассматриваются два случая рождения предельных циклов из сепаратрисы состояния равновесия системы

$$dx/dt = P(x, y), \quad dy/dt = Q(x, y) \qquad (D)$$

класса N или аналитического класса первой степени негрубости. Устанавливается, во-первых, что если у системы (D) существует седло в точке $O(x_0, y_0)$, и сепаратрисы этого седла образуют петлю, то необходимым условием рождения единственного предельного цикла (устойчивого или неустойчивого) при переходе от системы (D) к сколь угодно близкой измененной системе того же класса является необращение в нуль величины $P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0)$. Устанавливается, что достаточным условием устойчивости или неустойчивости как петли сепаратрисы для исходной системы, так и предельного цикла для измененной системы является соответственно отрицательный или положительный знак величины $P'_x + Q'_y$, вычисленной для седла. Устанавливается, во-вторых, что если у исходной системы (D) существует двукратное состояние равновесия $O(x_0, y_0)$ типа седло-узел и существует замкнутый контур, составленный из двух полутраекторий (только одна из которых является сепаратрисой седло-узла) и состояния равновесия, то при переходе от системы (D) к сколь угодно близкой измененной системе, не имеющей состояний равновесия в малой окрестности точки $O(x_0, y_0)$, появляется один и только один предельный цикл. Предельный цикл будет устойчивым или неустойчивым в зависимости от знака величины $P'_x + Q'_y$, вычисленной для седло-узла

Указывается, что утверждения, касающиеся устойчивости петли сепаратрисы и числа предельных циклов, рождающихся от петли для систем первой степени негрубости, легко переносятся на замкнутые контуры с любым числом седел, составленные из сепаратрис седел и самих седел. Вместе с рассмотренными ранее случаями (РЖМат, 1957, 5551) эти два случая исчерпывают все основные случаи рождения предельных циклов в системах первой степени негрубости. Дополнительно рассматривается более сложный случай (не первой степени негрубости), когда в точке $O(0,0)$ существует седло, сепаратрисы которого образуют петлю, и при этом $P'_x(0, 0) + Q'_y(0,0) = 0$. Устанавливается, что если петля, образованная сепаратрисой, устойчива (неустойчива), то существуют такие добавки к правым частям системы (D), при которых сколь угодно близкая измененная система того же класса будет иметь в малой окрестности петли не менее двух предельных циклов.

Н. Н. Баутин

7581. **Определение опасных и безопасных границ области устойчивости динамических систем в случае фокуса, лежащего на линии склейки. Аронович Г. В.**, Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика, 1958, № 2, 131—139

Рассматривается поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости для систем, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями с кусочно-аналитическими правыми частями, при условии, что состояние равновесия типа фокус лежит на линии склейки, на которой дифференциальные уравнения меняют свой вид. Предполагается, что правые части уравнений отличаются по обе стороны склейки лишь членами второго порядка и выше и что исследуются простейшие из возможных негрубых состояний равновесия. Для системы двух уравнений путем „склеивания" двух функций соответствия строится функция последования и показывается, что первая ляпуновская величина совпадает в этом случае с коэффициентом α_2. Рассматривается пример (устойчивость стационарных режимов ГЭС с уравнительным резервуаром с сопротивлением).

Н. Н. Баутин

7582. **О поведении динамической системы с одной степенью свободы вблизи тех точек границы области устойчивости, где «безопасная» граница переходит в «опасную». Серебрякова Н. Н.**, Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Механ. и машиностр., 1959, № 2, 178—182

Для системы

$dx/dt = ax + by + P(x, y)$, $dy/dt = cx + dy + Q(x, y)$,

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — ряды, расположенные по степеням x и y, начинающиеся с членов не ниже второго порядка, предполагается $ad - bc > 0$, $a + d = 0$ и равенство нулю первой ляпуновской величины. Рассматриваются для значений параметров, близких к указанным, качественные структуры разбиения на траектории окрестности состояния равновесия в начале координат. Показано, что в зависимости от первой и второй ляпуновских величин и знака величины $a + d$ в малой окрестности состояния равновесия на фазовой плоскости могут существовать один или два предельных цикла (один устойчивый или один неустойчивый, устойчивый внутри неустойчивого или наоборот). Для системы, приведенной к каноническому виду, приводится выражение второй ляпуновской величины a_5 через коэффициенты системы. В выражении для коэффициента a_5 есть опечатка (стр. 179, вторая строка снизу, в формуле пропущена буква b). Н. Н. Баутин

7583. О числе периодических решений уравнения с полиномиальной правой частью. Плисс В. А., Докл. АН СССР, 1959, 127, № 5, 965—968

Рассматривается вопрос о максимальном числе непрерывных периодических решений уравнения вида

$$y' = y^n + p_1(x)\, y^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y + p_n(x), \quad (1)$$

где x, y — вещественные переменные, а $p_i(x)$ — периодические функции x с периодом ω, удовлетворяющие условию Липшица. Указывая, что число таких решений равно числу нулей аналитической функции $f(c) = y(\omega, c) - c$, где $y = y(x, c)$ — решение (1) с начальными данными $x = 0$, $y = c$, и исследуя эту функцию в комплексной области, автор приходит к следующей теореме:

Если в уравнении (1) $|p_i(x)| \leqslant M$, $i = 1, \ldots, n$, $\omega \leqslant \dfrac{2\sqrt{2}}{(n-1)(1+\sqrt{2})\beta^{n-1}}$, где β — единственный положительный корень уравнения $\beta^n(\beta - 1) = M\sqrt{2}(\beta^n - 1)$, то уравнение (1) имеет ровно n периодических решений, причем каждое из них считается столько раз, какова его кратность. (Кратность периодического решения соответствует кратности данного нуля функции $f(c)$.

Эта теорема дает достаточные условия, чтобы уравнение вида (1) имело не более n периодических решений. Вместе с тем автор приводит пример уравнения вида (1) при $n = 4$, для которого число периодических решений превышает n и равно 6. Ю. А. Рябов

7584. Исследование нелинейной системы фазовой автоподстройки частоты. Белюстина Л. Н., Изв. высш. учебн. заведений, Радиофизика, 1959, 2, № 2, 277—291

Проводится качественное исследование системы

$$dz/dt = \gamma - \sin\varphi - \lambda(1 - \mu\cos\varphi)\, z, \quad d\varphi/dt = z, \quad (1)$$

описывающей (при некоторых упрощающих предположениях) режимы работы системы фазовой автоподстройки частоты. В результате исследования пространство параметров γ, λ, μ разбивается на области, каждой из которых соответствует определенная картина расположения интегральных кривых системы (1) на цилиндрической фазовой поверхности (z, φ). Для каждой из этих картин возможные случаи поведения решений при $t \to +\infty$ (в зависимости от начальных условий) истолковываются с физической точки зрения.

А. Ф. Филиппов

7585. Об уравнении Дюффинга. Фунато (On Duffing's equation. Funato Mitsuharu), Math. japon., 1958, 5, № 1, 29—34 (англ.)

Пусть X, $-\bar{X}$ и T — соответственно максимум, минимум и период решения уравнения

$$x'' + Ax + 2Bx^3 = E, \quad (1)$$

удовлетворяющего начальным условиям: $x(0) = 0$ и $x'(0) = v_0 > 0$, где $A > 0$, $B > 0$ и $E > 0$ — постоянные. Изучается характер изменения X, $\bar{X}$ и T при изменении одних параметров и фиксации других. Так, при возрастании v_0, X и $\bar{X}$ возрастают, T возрастает при $v_0 < V_0$, а при $v_0 \geqslant V_0$ — убывает. При $v_0 \uparrow \infty$, $X \uparrow \infty$, $\bar{X} \uparrow \infty$ и $T \downarrow 0$. При $v_0 \downarrow 0$, $X \downarrow \alpha$, $\bar{X} \downarrow 0$ и $T \downarrow 2\beta$. Из возрастания E следует возрастание X и убывание $\bar{X}$ и T, при $E \uparrow \infty$, $X \uparrow \infty$, $\bar{X} \downarrow 0$ и $T \downarrow 0$. Из возрастания A и B следует убывание X, $\bar{X}$ и T. Автор отмечает, что изучаемая проблема была поставлена проф. Симидзу (Shimizu) в 1957 г. на осеннем собрании японского математического общества, где были указаны некоторые из изложенных результатов.

М. И. Ельшин

7586. К аналитическому определению периодических решений нелинейных автономных систем. Коломбо (Sulla determinazione analitica delle soluzioni periodiche dei sistemi non-lineari autonomi. Colombo Giuseppe), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1959, 26, № 5, 662—664 (итал.)

Рассматривается нелинейное уравнение типа

$$\alpha(x)\ddot{x} + \frac{1}{2}\alpha'(x)\dot{x}^2 + g(x) = \varepsilon f(x, \dot{x}, \varepsilon), \quad \alpha(x) \neq 0, \quad (1)$$

ε — малый положительный параметр, для которого выводятся некоторые критерии существования предельных циклов. Для этого, наряду с уравнением (1), рассматривается уравнение

$$\alpha(x)\ddot{x} + \frac{1}{2}\alpha'(x)\dot{x}^2 + g(x) = 0, \quad (2)$$

допускающее первый интеграл

$$\alpha(x)\frac{\dot{x}^2}{2} + G(x) = G(x_0), \quad G(x) = \int g(x)\, dx. \quad (3)$$

Предполагается, что для $x_1 \leqslant x_0 \leqslant x_2$ решения уравнения (2) периодические, и, следовательно, на фазовой плоскости $(x, \dot{x})$ уравнение (3) представляет совокупность циклов γ_{x_0}, пересекающих ось $\dot{x} = 0$ в последующей точке $x^0 > x_0$, и функция $G(x_0)$ непрерывна в (x_1, x_2). Тогда строится интеграл

$$I(x_0) = \int_{\gamma_{x_0}} f(x, \dot{x}, \varepsilon)\, dx, \quad (4)$$

и показывается, что если для какого-либо $x_0^* \in (x_1, x_2)$

$$I(x_0^*) = 0, \quad \left[\frac{dI(x_0)}{dx_0}\right]_{x_0 = x_0^*} < 0, \quad (5)$$

то для $\varepsilon < \varepsilon^*$ уравнение (1) допускает устойчивый цикл γ^*, который стремится к $\gamma_{x_0^*}$ при $\varepsilon \to 0$. В качестве примера рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + x + 3\frac{\alpha}{2}x^2 + 2\beta x^3 = \varepsilon\gamma\dot{x}(a^2 - \dot{x}^2),$$

описывающее немалые колебания маятника Фроуда.

Ю. А. Митропольский

7587. Собственные функции бетатронных колебаний в кольцевом фазотроне. Лошак Ж., Ж. техн. физ., 1959, 29, № 8, 995—1008

Исследуются вертикальные (координата z) и радиальные (координата x) колебания частицы в ускорителе с жесткой фокусировкой, описываемые системой уравнений

$$d^2x/d\theta^2 + g(\theta)\,x = \varepsilon X(\theta, x, z, x', z'),$$
$$d^2z/d\theta^2 - g(\theta)\,z = \varepsilon Z(\theta, x, z, x', z'), \qquad (1)$$

где $\theta = s/R$, s — длина пути, отсчитываемая вдоль равновесной орбиты, R — радиус равновесной орбиты; функция $g(\theta)$ периодична с периодом $2\pi/N$, N — число элементов периодичности ускорителя; функции X, Z имеют период 2π, ε — малый параметр. Дан метод нахождения решений уравнений (1) путем разложения по системе собственных функций x_p краевой задачи

$$d^2x_p/d\theta^2 + \lambda_p g(\theta)\,x_p = 0,\ x(\theta+2\pi) = x(\theta),$$
$$x'(\theta+2\pi) = x'(\theta), \qquad (2)$$

λ_p — собственные значения. Относительно решений x_p, λ_p этой краевой задачи доказаны при некоторых ограничительных предположениях следующие утверждения: 1) собственные функции x_p представляют собой устойчивые решения Флоке (т. е. им отвечает параметр Флоке $\mu = \frac{2\pi n}{N}$, n — целое) и разбиваются на две бесконечные подпоследовательности, отвечающие соответственно положительным ($\lambda_p > 0$) и отрицательным ($\lambda_p < 0$) собственным значениям; 2) в подпоследовательности $\lambda_p > 0$ норма $\int_0^{2\pi} x_p x_p^* g\,d\theta$ является положительно определенной, в подпоследовательности $\lambda_p < 0$ эта норма является отрицательно определенной; 3) если $\mu \neq k\pi$ (k — целое), то каждому собственному значению отвечают две собственные функции (двукратное вырождение) с одинаковой нормой. Если $\mu = k\pi$, то вырождение отсутствует. Вычисление доведено до конца только для случая, когда имеется возмущение магнитного поля, сосредоточенное в положительных секторах. В этом случае уравнение радиальных колебаний имеет вид:

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + g(\theta)\,x = -h(\theta),$$

где

$$g = +\omega^2,\ h = h(\theta) \text{ при } \frac{2\pi m}{N} \leqslant \theta < \frac{2\pi(m+q)}{N},$$
$$g = -\omega^2,\ h = 0 \text{ при } \frac{2\pi(m+q)}{N} \leqslant \theta < \frac{2\pi(m+1)}{N},$$
$$\frac{1}{2} < q \leqslant 1.$$

Показано, что возмущение Δx равновесной орбиты описывается разложением

$$\Delta x = e_0 + \frac{1}{\omega^2}\sum_1^\infty \frac{\gamma_p^{(1)}U_p^{(1)} + \gamma_p^{(2)}U_p^{(2)}}{\lambda_p^2 - 1},$$

где $e_0 = \int_0^{2\pi} h g d\theta$, $\gamma_p^{(j)} = \int_0^{2\pi} h U_p^{(j)} g d\theta$, $j = 1, 2$; $U_p^{(j)}$ — нормированные на единицу собственные функции краевой задачи (2), отвечающие двукратно вырожденным собственным значениям, которые в рассматриваемом случае являются положительными. В статье имеется много опечаток. Ю. С. Саясов

7588. **Почти периодические решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с почти периодическими коэффициентами. Лангенхоп, Зейферт** (Almost periodic solutions of second order nonlinear differential equations with almost periodic forcing. Langenhop C. E., Seifert G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 3, 425—432 (англ.)

Исследуется вопрос о существовании почти периодических решений уравнения $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = ke(t)$, где $e(t)$ — почти периодическая функция, причем $|e(t)| < 1$. Используя результаты Америо (РЖМат, 1957, 3109), автор получает, что почти периодическое решение этого уравнения существует, если выполняются условия: 1) $g(x)$ имеет непрерывную производную $g'(x)$, $g(0) = 0$ и $0 < g'(x) \leqslant \beta$ при $x \neq 0$; 2) $f(x) \geqslant \alpha > 0$ при всех x; 3) $\liminf_{|x|\to\infty} |g(x)| > k$, где β, α, k — некоторые числа, причем $\beta < \alpha^2$. Показывается также, что данное решение асимптотически устойчиво по отношению к любому решению, фазовая траектория которого входит в некоторую область R, выбранную специальным образом. Ю. А. Рябов

7589. **Об одной теореме Н. Левинсона и О. Смита, касающейся дифференциального уравнения нелинейных колебаний. Миколайская** (Sur un théorème de MM. N. Levinson et O. Smith relatif à l'équation différentielle des oscillations entretenues. Mikołajska Z.), Ann. polon. math., 1957, **4**, № 1, 1—7 (франц.)

Строится пример, показывающий неточность формулировки теоремы о единственности предельного цикла, высказанной в работе Левинсона и Смита (Levinson N., Smith O., Duke Math. J., 1942, **9**, № 2).

А. Ф. Андреев, В. А. Плисс

7590. **О практических методах решения систем нелинейных дифференциальных уравнений. Панкратов С. А.**, Изв. АН СССР. Отд. техн. н., 1957, № 8, 156—159

Предлагается практический прием отыскания стационарных решений нелинейных систем, близких к системам Ляпунова, путем перехода от обыкновенных уравнений к уравнениям в частных производных. Изложение дается на примере по отысканию резонансных решений систем дифференциальных уравнений колебаний стрел экскаваторов-драглайнов вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Omega_1^2 x + a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + \lambda_1F_1\cos\omega_1t = 0$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \Omega_2^2 y + a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + \lambda_2F_2\cos\omega_2t = 0$$
$$n_1\Omega_1 = m_1\Omega_2,\ n_2\omega_1 = m_2\omega_2,$$

где a_i, b_i, c_i, λ_i, Ω_i, ω_i — постоянные, n_1, n_2, m_1, m_2 — целые числа. Обоснование метода отсутствует.

С. Н. Шиманов

7591. **Радиальные и вертикальные колебания в ускорителях с сильной фокусировкой. Федорченко А. М.**, Укр. матем. ж., 1959, **11**, № 2, 192—198

Исследуются вертикальные и радиальные колебания в ускорителях с сильной фокусировкой методом канонического усреденения, т. е. путем нахождения гамильтониана $H(P, Q)$ (в который не входит явно время τ), соответствующего исходному гамильтониану $H = \frac{1}{2}(p^2 + f(\tau)q^2)$ ($\tau = \omega_0 t$, ω_0 — частота обращения частицы по орбите). Производящая функция S соответствующего канонического преобразования удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial\tau} + \varepsilon\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + f(\tau)q^2\right] = \varepsilon H = \sum_{\kappa=1}^{\infty}\varepsilon^k H_k\left(P, \frac{\partial S}{\partial P}\right),$$
$$\varepsilon = \frac{1}{2\omega_0},$$

и может быть найдена путем разложения по степеням ε.

В случае, когда $f(\tau)$ имеет специальный вид $f=a$ при $\theta<\theta<\frac{\pi}{N}$, $f=b$ при $\frac{\pi}{N}<\theta<\frac{3\pi}{N}$, $f=a$ при $\frac{3\pi}{N}<\theta<\frac{4\pi}{N}$, $a=n_1$, $b=-n_2$ для вертикальных колебаний, $a=1-n_1$, $b=1-n_2$ для горизонтальных колебаний, приближенное выражение для гамильтониана H, найденное с точностью до величин порядка ε^5, имеет вид: $H=\frac{1}{2}(\alpha^2P^2+\beta^2Q^2)$, где $\alpha^2=1+\pi^4\times(n_1+n_2)^2/240N^4$, $\beta_z^2=\pi^2(n_1+n_2)^2/24N^2+S$ для вертикальных колебаний и $\beta_\rho^2=\pi^2(n_1+n_2)^2/24N^2+1-S\left(S=\frac{n_1-n_2}{2}[1+\right.$ $\left.+\pi^4(n_1+n_2)^2/80N^4]\right)$ для радиальных колебаний. Частота колебаний может быть найдена отсюда по формуле $\omega_{z,\rho}=\alpha\cdot\beta_{z,\rho}$. В статье имеются опечатки.

Ю. С. Саясов

7592. Естественные возмущающие силы в нелинейных системах. Харви (Natural forcing functions in nonlinear systems. Harvey T. J. Paper. Amer. Soc. Mech. Engrs, 1958, № A-6, 5 pp., ill.) (англ.)

Рассматривается вопрос о возмущении нелинейной консервативной колебательной системы с одной степенью свободы внешними силами, совпадающими по форме со свободными колебаниями исследуемой системы. Уравнение движения системы в этом случае интегрируется в квадратурах. Последние используются для построения резонансных кривых. Результаты прилагаются к уравнению Дюффинга.

Примечание референта. Имеется русский перевод статьи: Механика — периодический сборник переводов иностранных статей. 1959, № 5—57.

П. И. Кузнецов

7593. Колебания квазилинейных неавтономных систем с одной степенью свободы вблизи резонанса. Проскуряков А. П., Прикл. матем. и механ., 1959, 23, № 5, 851—861

Рассматривается уравнение вида

$$\frac{d^2x}{dt^2}+m^2x=f(t)+\mu F\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt},\ \mu\right), \qquad (1)$$

где μ — малый положительный параметр, $f(t)$ — непрерывная периодическая функция t с периодом 2π, разложение которой в ряд Фурье не содержит гармоник m-го порядка (m — целое число), $F\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt},\ \mu\right)$ — аналитическая функция x, $\frac{dx}{dt}$, μ и непрерывная периодическая функция t с периодом 2π. С помощью методов и выкладок, применявшихся И. Г. Малкиным (РЖМат, 1957, 3225К), выводятся достаточные условия существования формального периодического решения уравнения (1) в виде ряда по степеням μ и рассматривается вопрос об его устойчивости в одном из частных случаев. Этот случай характеризуется тем, что уравнения для постоянных A_0, B_0, входящих в „порождающее" периодическое решение:

$$x_0(t)=\varphi(t)+A_0\cos mt+\frac{B_0}{m}\sin mt,$$

вытекающие из условий периодичности решения уравнения (1), имеют кратные корни, и якобиан этих уравнений при получаемых значениях A_0, B_0 обращается в нуль. Приводятся примеры.

Ю. А. Рябов

7594. Дифференциальное уравнение вынужденных нелинейных колебаний без сопротивления. II. Моррис (A differential equation for undamped forced non-linear oscillations. II. Morris G. R.), Proc. Cambridge Philos Soc., 1958, 54, № 4, 426—438 (англ.)

Изучается уравнение

$$\ddot{x}+2x^3=e(t), \qquad (1)$$

где $e(t)$ — четная функция с наименьшим периодом 2π. С уравнением (1) связывается топологическое преобразование T плоскости $(a,\ b)$ по следующей формуле:

$$T(a,\ b)=(x(2\pi,\ a,\ b),\ \dot{x}(2\pi,\ a,\ b)), \qquad (2)$$

где $x(t,\ a,\ b)$ — решение уравнения (1) с начальными данными $x=a$, $\dot{x}=b$ при $t=0$. Автор называет точку $P=(a,\ b)$ неподвижной точкой преобразования T порядка m, если $T^m(P)=P$ и $T^l(P)\neq P$ при любом натуральном $l<m$. В предыдущей работе (РЖМат, 1957, 4791) автор доказал, что существует такое $p>0$, что для любого целого $k>p$ уравнение (1) имеет хотя бы одно решение $x_k(t)$ со свойствами: 1) $x_k(0)>0$, $\dot{x}_k(0)=0$, $x_k(t+2\pi)=x_k(t)$; 2) $x_k(t)=x_k(2\pi-t)$; 3) $x_k(t)$ при $0<t<2\pi$ имеет k положительных максимумов и k отрицательных минимумов и не имеет других стационарных точек; 4) $\left(k-\frac{1}{2}\right)^4\omega^4<\dot{x}_k^2(t)+$ $+x_k^4(t)<\left(k+\frac{1}{2}\right)^4\omega^4$, где ω — некоторая постоянная.

Пусть $a_k=x_k(0)$, а F_k — точка $(a_k,\ 0)$. Очевидно, что F_k — неподвижная точка T. Основные результаты данной работы формулируются в виде следующих двух теорем:

Теорема 5. Если $k>p$, то для любого натурального m на сегменте F_kF_{k+1} оси a можно указать по крайней мере $\varphi(m)$ неподвижных точек преобразования T порядка m, где $\varphi(m)$ — число натуральных чисел, меньших m и взаимно простых с ним.

Теорема 6. Если $k>p$, то на сегменте F_kF_{k+1} можно выбрать множество S_k неподвижных точек преобразования T всех порядков со следующими свойствами: 1) каждой несократимой дроби s/m $(0<s<m)$ соответствует единственная в S_k неподвижная точка P_{sm} преобразования T порядка m; 2) если $s/m<s'/m'$, то P_{sm} лежит левее $P_{s'm'}$.

В. А. Плисс

7595. О нелинейных дифференциальных уравнениях второго порядка. IV. Общее уравнение $\ddot{y}+kf(y)\dot{y}+g(y)=bkp(\varphi)$, $\varphi=t+\alpha$. Литлвуд (On non-linear differential equations of the second order. IV. The general equation $\ddot{y}+kf(y)\dot{y}+g(y)=bkp(\varphi)$, $\varphi=t+\alpha$. Littlewood J. E.), Acta math., 1957, 98, № 1-2, 1—110 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$\ddot{y}+kf(y)\dot{y}+g(y)=bkp(\varphi),\ \varphi=t+\alpha,$$

f, g, p — фиксированные функции, b неотрицательно, k — положительно и велико, p имеет непрерывную вторую производную p'', периодична с периодом 2π, имеет среднее значение 0, антисимметрична, т. е. $p(\pi+\varphi)=$ $=-p(\varphi)$. Каждый интеграл $\int p(\varphi)\,d\varphi$ периодичен, через $p_1(\varphi)$ обозначается тот из них, который имеет нулевое среднее значение. Он также антисимметричен. Предполагается, что $p_1(\varphi)$ достигает своего наибольшего (и соответственно наименьшего) значения только один раз за период. При этом p нормализуется так, что p_1 имеет своей точной верхней границей единицу и достигает ее при $\varphi=\frac{\pi}{2}$, т. е. $p_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=$

$= -p_1\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $p\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$. $p'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ не отрицательна, предполагается, что $p'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ положительна.

$f(y)$ — четная функция, имеющая непрерывную вторую производную $f''(y)$. Она имеет одну пару корней при $y = \pm 1$; $f'(1) > 0$; $f(y)$ имеет положительную нижнюю границу при $y \geqslant 2$. Пусть $F(y) = \int_0^y f(y)\,dy$, предполагается, что $F(-1) = 2/3$. При этих предположениях с помощью весьма тонких рассуждений для рассматриваемого уравнения устанавливаются те же факты, что и для уравнения Ван-дер-Поля в предыдущей работе автора (РЖМат, 1958, 6691). В. А. Плисс

7596. Точное решение одного класса нелинейных вынужденных колебаний. Блазер (Exakte Lösungen einer Klasse von nichtlinearen erzwungenen Schwingungen. Blaser A.), Z. angew. Math. und Mech., 1959, 39, № 9-11, 349—350 (нем.)

7597. Сильно нелинейные колебания в окрестности цикла Льенара. Фор (Oscillations fortement non-linéaires au voisinage du cycle de Liénard. Faure Robert), Revue M, 1959, 5, № 1, 21—26 (франц.; рез. флам.)

Рассматривается уравнение вида

$$\mu\ddot{x} + f(x)\dot{x} + \mu g(x) = 0, \qquad (1)$$

где $\mu \geqslant 0$ — малый параметр. Изучаются колебания, близкие к разрывным. Разрывным колебаниям на плоскости x, y ($y = F(x) + \mu\dot{x}$, $F(x) = \int f(x)\,dx$) отвечает цикл $ABCD$, состоящий из отрезков AB, CD кривой $y = F(x)$ и горизонтальных отрезков $y = \pm K$. Для построения кривой на плоскости x, y, соответствующей малым, но отличным от нуля значениям μ, уравнение (1) преобразуется к виду $(y - F(x))\,dy + \mu^2 g(x)\,dx = 0$. На участках типа AB, CD решение этого уравнения строится в виде ряда $y = F(x) + y_1 + y_2 + \dots$, где $y_1 = -\mu^2 g(x)/F(x)$ и т. д. Вблизи горизонтальных участков, верхнего DA и нижнего BC, соответственно:

$$y = K + y_1 + y_2 + \dots,\ y_1 = \mu^2 \int_{x_0}^{x} \frac{g(x)\,dx}{F(x) - K} \text{ и т. д.,}$$

$$y = -K + y_1 + y_2 + \dots,\ y_1 = \mu^2 \int_{x_0}^{x} \frac{g(x)\,dx}{F(x) + K - D_0} \text{ и т. д.,}$$

D_0 — некоторое постоянное смещение. Формулы теряют смысл в окрестности точек перехода A, B, C, D от участков одного типа к участкам другого типа. Эти точки требуют специального рассмотрения, в частности в целях „сшивания" указанных асимптотик. На примере уравнения Ван-дер-Поля показано, как делается такое сшивание (в частности, как определяется смещение D_0). Приводятся результаты численного расчета. Оценок точности формул не дано, как это сделано например в работе А. А. Дородницына (Прикл. матем. и механ., 1947, 11, 313—328), посвященной уравнению Ван-дер-Поля, или в работах Л. С. Понтрягина и Е. Ф. Мищенко (РЖМат, 1958, 6709, 6712), где данный вопрос рассмотрен в более общей постановке.

А. Б. Васильева

7598. Об одном обыкновенном нелинейном дифференциальном уравнении. Гиццетти (Su una particolare equazione differenziale ordinaria non lineare. Ghizzetti Aldo), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1958, 24, № 3, 262—269 (итал.)

Рассматривается уравнение $x'' + x + \varphi(x') = 0$. При условиях $x'\varphi(x') > 0$ и $\varphi(x') > 0$ для $x' \neq 0$ элементарными средствами выделяется область колебательных и неколебательных решений. П. И. Кузнецов

7599. Об устойчивости периодических движений. I. Старжинский В. М., Bul. Inst. politechn. Iaşi, 1958, 4, № 3-4, 19—68

Статья представляет изложение первой части диссертации автора (Некоторые вопросы устойчивости периодических движений, Ин-т механ. АН СССР, 1957). Рассматриваются методы и способы эффективного определения устойчивости тривиального решения в смысле Ляпунова для систем второго порядка линейных дифференциальных уравнений с периодическими, интегрируемыми, кусочно-непрерывными коэффициентами.

Первая глава обзорная. В начале излагаются фундаментальные результаты Ляпунова и Жуковского, относящиеся к уравнению Хилла. Подробно описывается так называемый метод оценки характеристической постоянной, развитый Ляпуновым в работе 1902 г. Затем делается краткий обзор следующих за Ляпуновым исследований: М. Г. Крейна, Г. Борга, М. Я. Леонова, Р. С. Гусаровой, М. Г. Нейгауз и В. Б. Лидского, В. И. Бурдиной и референта. Автор отмечает, что краткость изложения не позволила провести здесь обзор более ранних, чем названные, результатов Н. В. Адамова и М. И. Ельцина.

Во второй главе прямой метод Ляпунова применяется к исследованию устойчивости тривиального решения уравнения

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)\,x = 0 \qquad (1)$$

с неотрицательными (и, вообще говоря, непериодическими) ограниченными коэффициентами. Автор получает достаточные условия устойчивости при том требовании, чтобы соответствующие оценки не могли быть улучшены, если в качестве V-функции Ляпунова применяется квадратичная форма с постоянными коэффициентами.

Некоторые результаты получаются и при использовании V-функции Ляпунова с переменными коэффициентами. Приводятся точные оценки наибольшего значения модуля решения уравнения (1) в случае $p = \text{const}$.

В третьей главе исследуется устойчивость невозмущенного движения динамической системы, когда уравнения первого приближения возмущенного движения имеют вид

$$\frac{dx_1}{dt} = p_{11}(t)\,x_1 + p_{12}(t)\,x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = p_{21}(t)\,x_1 + p_{22}(t)\,x_2.$$

Основываясь на ортогональной подстановке с периодическими коэффициентами, функции p_{12} и p_{21} можно, не нарушая общности, предполагать знакопостоянными. Метод оценки характеристической постоянной, развитый Ляпуновым для уравнения Хилла с неотрицательным периодическим коэффициентом, распространяется автором для исследования устойчивости названного невозмущенного движения. В результате получается последовательность эффективных достаточных условий устойчивости и неустойчивости.

В качестве примера рассматривается диссипативная механическая система с одной степенью свободы и периодической восстанавливающей силой. Строятся области устойчивости и неустойчивости в пространстве параметров системы. Подобное построение проводится еще для двух примеров. В. А. Якубович

7600. Критерий устойчивости для линейных уравнений с переменными коэффициентами. Гренстед (Stability criteria for linear equations with time-varying coefficients. Grensted P. E. W.), J. Roy. Aeronaut. Soc., 1956, 60, № 543, 205—208 (англ.)

Предлагается способ исследования на устойчивость решений линейных уравнений с переменными коэффициентами, причем автор подчеркивает, что этот способ

не является строгим, и его следует рассматривать как первое приближение на пути уточнения так называемой почти линейной" устойчивости, получаемой при применении критерия Рауса к мгновенным значениям коэффициентов в исходных уравнениях.

Рассматривается уравнение

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0, \qquad (1)$$

где a, b — функции от t, а c постоянная. Вместо t вводится новая независимая переменная $\tau = \tau(t)$. Тогда уравнение (1) преобразуется к виду

$$Ax'' + Bx' + C = 0, \qquad (2)$$

где $A = a\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2$, $B = b\frac{d\tau}{dt} + a\frac{d^2\tau}{dt^2}$, $C = c$, и штрихами обозначены производные x по τ. Функция $\tau(t)$ выбирается так, чтобы производные коэффициентов A, B по τ обращались в нуль в некоторый момент времени $t = t_*$. Для этого a, b, $\frac{d\tau}{dt} = \dot{\tau}$ представляются в виде рядов

$$\dot{\tau} = 1 + v_1\bar{t} + \frac{1}{2}v_2\bar{t}^2 + \ldots$$

$$a = a_0 + a_1\bar{t} + \frac{1}{2}a_2\bar{t}^2 + \ldots, \qquad (3)$$

$$b = b_0 + b_1\bar{t} + \frac{1}{2}b_2\bar{t}^2 + \ldots,$$

где $v_1, v_2, \ldots b_2, \ldots$ — постоянные коэффициенты и $\bar{t}$ отсчитывается от момента t_*, т. е. $\bar{t} = t - t_*$. Тогда формулы для A, B с учетом (3) запишутся в виде

$$A = a_0 + (2v_1a_0 + a_1)\bar{t} + \ldots, \qquad (4)$$

$$B = b_0 + a_0v_1 + (c_0v_1 + b_1 + a_0v_2 + a_1v_1)\bar{t} + \ldots.$$

Если выбрать v_1 и v_2 так, чтобы $\dot{A} = \dot{B} = 0$ при $t = t_*$, то коэффициенты при $\bar{t}$ в первой степени обратятся в нуль и тогда при $t = t_*$ имеем

$$A = a_0, \quad B = \frac{1}{2}a_1. \qquad (5)$$

Автор применяет далее критерий Рауса к уравнению (2), принимая A и B равными их значениям (5) в момент $t = t_*$, что позволяет в какой-то мере учесть скорость изменения коэффициентов a и b во времени при решении вопроса об устойчивости решения исходного уравнения (1). Приводится пример исследования аналогичным способом уравнения 3-го порядка.

Ю. А. Рябов

7601. О мажорировании «a priori» решений уравнений и систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка. Колаутти (Sulla maggiorazione «a priori» delle soluzioni delle equazioni e dei sistemi di equazioni differenziali lineari ordinarie del secondo ordine. Colautti Maria Pia. Matematiche, 1956, **11**, 8—99) (итал.)

Мемуар посвящен нахождению формул мажорирования „a priori" для уравнений и для систем обыкновенных дифференциальных линейных уравнений второго порядка. Результаты, представляющие большой интерес, заключаются в следующем. Пусть E — операторная матрица порядка m, элементами которой являются обыкновенные линейные дифференциальные операторы второго порядка с переменными коэффициентами, пусть далее u — вектор с m компонентами $u_1, u_2, \ldots, u_m$, непрерывными и обладающими непрерывными производными первого и второго порядка в интервале $(x_1\, x_2)$ удовлетворяющими на концах $(x_1\, x_2)$ условиям вида: $\alpha_{ij}u_i(x_j) + \beta_{ij}u_i'(x_j)$, где α_{ij} и β_{ij} — константы $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, 2)$. Устанавливаются формулы мажорирования такого типа: $\int_{x_1}^{x_2} |u^2|\,dx \leqslant K\int_{x_1}^{x_2} |E*u|^2\,dx$ и дается эффективная числовая оценка константы K. Случай $m = 1$ рассмотрен более подробно, и получены формулы мажорирования, используя нормы в $L^{(p)}$ $(p \geqslant 2)$. Из этих формул переходом к пределу при $p \to \infty$ получаются, при помощи известной леммы Рисса, точные оценки. В качестве применения, в случае $p = 2$ и $m \geqslant 1$, получаются нижние границы для спектра в граничных проблемах Штурма — Лиувилля. G. Fichera

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 11, 898.

7602. Дисконъюгенция самосопряженных уравнений второго порядка с неотрицательными коэффициентами. Барретт (Disconjugacy of second-order linear differential equations with non-negative coefficients. Barrett John H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 4, 552—561 (англ.)

Если каждое решение уравнения $(p(x)y')' + f(x)y = 0$ имеет самое большее один нуль при $a \leqslant x < \infty$, то автор говорит, что оно обладает дисконъюгенцией. Даны достаточные условия для этого. Одно из таких условий следующее:

$$\int_a^\infty p^{-1}\,dx = \infty, \quad \left(\int_a^t p^{-1}\,dx\right)^{1-\beta}\int_a^t f(t)\left(\int_a^x p^{-1}\,dx\right)^{\beta}\,dt +$$

$$+\left(\int_a^x p^{-1}\,dx\right)^{1-\alpha}\int_x^\infty f(t)\left(\int_a^t p^{-1}\,dx\right)^{\alpha}dt \leqslant \frac{\beta-\alpha}{4},$$

$$\times\left[1 + \frac{1}{(\beta-1)(1-\alpha)}\right] < \infty,$$

где $0 \leqslant \alpha < 1 < \beta$. В статье имеются другие аналогичные критерии. В. А. Кондратьев

7603. Обобщенные характеристические направления системы дифференциальных уравнений. Ковальский (Generalized characteristic directions for a system of differential equations. Kowalski Z.), Ann. polon. math., 1959, **6**, № 3, 269—280 (англ.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = F(t, X), \qquad (1)$$

где X и $F(t, X)$ — n-мерные вектора, $F(t, 0) \equiv 0$, $F(t, X)$ непрерывно в окрестности $X = 0$ для всех t. Пусть S является сферой $|X| = 1$, Σ — множество точек $Y \in S$, для которых существует

$$G(Y) = \lim_{\substack{r\to 0\\ t\to+\infty}} \frac{1}{r}F(t, rY) \qquad (2)$$

и $G(Y) \neq 0$. Если направление единичного вектора $Y \in \Sigma$ параллельно $G(Y)$, то оно называется обобщенным характеристическим направлением. Множество таких направлений обозначается через Ω. Пусть Σ открыто относительно S, пределы (2) равномерны во всяком замкнутом множестве, внутреннем к Σ, и все предельные точки множества Ω принадлежат $S - \Sigma$.

Преобразование $X = \rho Z$, $\rho > 0$, $ZY^0 - 1 \equiv 0$, $Y^0 \in \Omega$ систему (1) переводит в систему

$$\rho^{-1}\dot{\rho} = \psi(Z) + \delta(t, \rho, Z)$$

$$\dot{Z} = \Psi(Z) + \Delta(t, \rho, Z), \qquad (3)$$

где $\psi(Z) = Y^0G(Z)$, $\Psi(Z) = G(Z) - Z(Y^0G(Z))$. Через C_0 обозначается конус $|Z - Y^0| \leqslant \varepsilon_0$, $0 < \rho \leqslant \rho_0$. Доказываются теоремы:

1. Если вектор Y^0 — касательный к траектории системы (1), входящей при $t \to +\infty$ в особую точку $X = 0$

то $Y^0 \bar{\in} \Sigma - \Omega$; если $Y^0 \in \Omega$ и существует траектория, касающаяся Y^0 в начале координат, то Y^0 является пределом касательной к этой траектории, когда точка касания стремится к началу координат.

2. Если $\psi(Z) < 0$ и

$$Z\Psi(Z) < a(Z^2 - 1), \quad a = \text{const} < 0 \qquad (4)$$

для $0 < |Z - Y^0| \leqslant \varepsilon_0$, то всем траекториям системы (3), входящим в конус C_0 для достаточно большого t, соответствуют траектории системы (1), входящие в особую точку при $t \to +\infty$ с касательной Y^0.

3. Если в условиях теоремы 2 неравенства (4) заменить на $Z\Psi(Z) > b(Z^2 - 1)$, $b = \text{const} > 0$, то существует однопараметрическое семейство траекторий системы (1), входящих в особую точку при $t \to +\infty$ с касательной Y^0. Л. Э. Рейзинь

7604. О поведении решений системы разностных уравнений вблизи неподвижной точки. Панов А. М., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 5, 174—183

Используя методику теории дифференциальных уравнений, автор исследует поведение решений итерационной системы в окрестности неподвижной точки. Изучается система

$$X_{m+1} = AX_m + \varphi(X_m, m), \qquad (1)$$

где X_m, X_{m+1} — n-векторы, A — квадратная n-матрица, $\varphi(X_m, m)$ — вектор с проекциями $\varphi_i(x_1, \ldots x_n, m)$, удовлетворяющими условиям

$$\varphi_i = o\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right), \quad \varphi_i(0, \ldots, 0, m) = 0.$$

Совокупность точек вида $\{x_{1m}, x_{2m}, \ldots, x_{nm}\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2$ называется траекторией системы (1).

Теорема 1. Пусть дана система (1) и пусть корни характеристического уравнения

$$\det |A - \lambda E| = 0$$

удовлетворяют неравенствам

$$|\lambda_i| < 1 \quad (1 \leqslant i \leqslant k)$$
$$|\lambda_{k+i}| > 1 \quad (1 \leqslant i \leqslant s),$$

тогда существует многообразие начальных условий, зависящее от k произвольных параметров, из всех точек которого выходят траектории, которые при $m \to \infty$ входят в начало координат, и существует многообразие, зависящее от s параметров, из всех точек которого выходят траектории, входящие в начало координат при $m \to -\infty$.

Теорема 2. Если все корни характеристического уравнения системы по абсолютной величине отличны от единицы, то всякая траектория, проходящая через достаточно малую окрестность неподвижной точки, или входит в эту точку или покидает ее окрестность.

Ведущими координатами системы, приведенной к каноническому виду, называются координаты, которые соответствуют таким корням характеристического уравнения, для которых величина $||\lambda_i| - 1|$ имеет наименьшее значение. Траектория $M_m(x_{1m}, \ldots, x_{nm})$ называется касающейся гиперплоскости $x_k = 0$, $k = s+1, s+2, \ldots, n$, если вдоль этой траектории выполняется равенство

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{s} x_{im}^2}{\sum_{i=1}^{n} x_{im}^2} = 1.$$

Теорема 3. Если абсолютные величины всех корней характеристического уравнения системы (1) меньше единицы (больше единицы), то почти все траектории при $m \to \infty$ ($m \to -\infty$) касаются гиперплоскости, определяемой ведущими координатами. Е. А. Барбашин

7605. О неосцилляции решений нелинейных дифференциальных уравнений 3-го и 4-го порядков. Чичкин Е. С., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 5, 219—221

Рассматривается уравнение $y^{(n)} + A(x)y = 0$ $(n = 3, 4)$, $A(x) \geqslant 0$. Доказывается, что промежуток $[a, c)$ есть промежуток неосцилляции рассматриваемого уравнения тогда и только тогда, когда $K(x, s) > 0$ при $a \leqslant s < x < c$. Здесь $K(x, s)$ — функция Коши, т. е. решение, удовлетворяющее условию

$$K(s, s) = K_x'(s, s) = \ldots = K_x^{(n-2)}(s, s), \; K_x^{(n-1)}(s, s) = 1.$$

Рассмотрено также уравнение $y^{(n)} + f(x, y) = 0$ $(n = 3, 4)$. Доказано, что промежуток неосцилляции этого уравнения содержит промежуток неосцилляции уравнения $y^{(n)} + A(x)y = 0$, если $A(x) \geqslant \partial f / \partial y \geqslant 0$.

В. А. Кондратьев

7606. О дифференциальных уравнениях динамической модели мира. Рюсман (Über die Differentialgleichungen eines dynamischen Weltmodells. Rüssmann Helmut), Z. Astrophys., 1959, 48, № 1, 39—51 (нем.)

Рассматривается следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений, полученная Хекманом для линейного поля течения некоторого неограниченно распространенного однородного распределения несвязанной материи:

$$\dot{a}_i + a_i^2 + \sigma = 0, \quad \dot{\sigma} + \sigma(a_1 + a_2 + a_3) = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \qquad (1)$$

где σ — величина, пропорциональная плотности вещества. Изучается вопрос о поведении решений этой системы в окрестности особых точек. Устанавливается шесть возможных типов особенностей этой системы, которые характеризуются различным порядком стремления к бесконечности или нулю величин $a_i(t)$, $\sigma(t)$, когда t стремится к некоторому конечному значению t_0 или к бесконечности. Выводится некоторый интеграл системы (1), представляющий обобщение известного в изотропном случае ($a_i = a$) интеграла энергии и содержащий произвольную постоянную h. Если некоторое решение системы (1) обладает свойством $\sigma(t) > 0$, то, смотря по тому, будет ли для него постоянная h меньше, равна или больше нуля, это решение относится к одному из трех типов, которые характеризуются тем, что решение имеет соответственно две или одну особую точку на конечном расстоянии (т. е. регулярно в конечном или полубесконечном интервале), а в последнем случае — также поведением на бесконечности. Не существует решений, обладающих свойством $\sigma(t) > 0$ и не имеющих особых точек на конечном расстоянии, т. е. регулярных на всей вещественной оси. Библ. 5 назв. В. Ф. Мячин

7607. О характере осцилляции решений одного линейного однородного дифференциального уравнения третьего порядка. Виллари (Sul carattere oscillatorio delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari omogenee del terzo ordine. Villari Gaetano), Boll. Unione mat. ital., 1958, 13, № 1, 73—78 (итал.; рез. англ.)

Изучаются осцилляционные свойства дифференциального уравнения

$$y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0.$$

В предположении, что коэффициенты уравнения непрерывны и удовлетворяют условиям $p_2(x) \leqslant 0$, $p_3(x) \geqslant 0$ в интервале (ξ, ∞), устанавливается, что его решения или все колебательны, или все неколебательны. Исклю-

чение составляет случай $y(x)\,y'(x)<0$, $y'(x)\,y''(x)<0$, $\xi<x<\infty$. П. И. Кузнецов

7608. Об ограниченности решений линейного дифференциального уравнения четвертого порядка самосопряженного вида. Павлюк (Про обмеженість розв' язків лінійного диференціального рівняння четвертого порядку самосопряженого виду. Павлюк І. А.), Вісник Київськ. ун-ту, 1958, № 1, Сер. астрон., матем. та механ. вип. I, 19—43 (укр., рез. русск.)

Доказывается, что все решения уравнения

$$(fy'')''+(gy')'+hy=0,\quad f>0,$$

ограничены на $[a,\infty)$, если ограничены все решения уравнения $u''+p(x)\,u=0$, и $\int^{\infty}(|q(x)|+|r(x)|)\,dx<\infty$, где

$$q(x)=\frac{1}{f(x)},\ p(x)=\frac{g(x)}{2f(x)},$$

$$r(x)=\frac{g^2(x)}{4f(x)}+\frac{g''(x)}{2}-h(x).$$

Все решения уравнения четвертого порядка будут интегрируемы в квадрате на $[a,\infty)$, если все решения уравнения $u''+p(x)\,u=0$ интегрируемы в квадрате, а $q(x)$ и $r(x)$ ограничены. В. А. Кондратьев

7609. Об одном методе построения функций Ляпунова для линейных систем с переменными коэффициентами Ройтенберг Я. Н., Прикл. матем. и механ., 1958, 22, № 2, 167—172

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi_{jk}(D)\,x_k=0,\ j=1,2,..,n,\ D=d/dt, \qquad (1)$$

где $\varphi_{jk}(D)$ суть полиномы от D определенных степеней с коэффициентами $b_{jk}^{(s)}$, зависящими от t. При помощи соотношений $b_{jk}^{(s)}(t)=l_{jk}^{(s)}(t)+a_{jk}^{(s)}$, в которых $a_{jk}^{(s)}$ — пока произвольные действительные числа, система (1) переписывается в виде:

$$\sum_{k=1}^{n}f_{jk}(D)\,x_k=-\sum_{k=1}^{n}L_{jk}(D)\,x_k; \qquad (2)$$

здесь $f_{jk}(D)$ и $L_{jk}(D)$ обозначают полиномы от D вида $\varphi_{jk}(D)$ соответственно с коэффициентами $a_{jk}^{(s)}$ и $b_{jk}^{(s)}(t)$. Уравнения (2), в которых правые части предварительно рассматриваются как известные функции t, преобразуются к нормальным координатам ξ_g, ξ_h, τ_{ih} (Булгаков Б. В., Прикл. матем. и механ, 1946, 10, вып. 2, 280). В результате этого получается система:

$$\begin{aligned}&d\xi_g/dt=\varkappa_g\xi_g+A,\quad g=1,2,\ldots,N',\\ &d\xi_h/dt=\varepsilon_h\xi_h+\omega_h\tau_{ih}+B,\\ &d\tau_{ih}/dt=\varepsilon_h\xi_h-\omega_h\tau_{ih}+C,\ h=N'+1,\ldots,N'+N'',\end{aligned} \qquad (3)$$

где A, B, C— являются линейными формами от ξ_g, ξ_h, τ_{ih} с коэффициентами, выражающимися через элементы матрицы $[f_{jk}(D)]$ и корни ее детерминанта, рассматриваемого как полином от D; $\varkappa_g, g=1,\ldots,N'$ обозначают действительные корни, а $\varepsilon_h+i\omega_h$, $h=N'+1,\ldots,N'+N''$— комплексные корни этого детерминанта (все корни предполагаются простыми).

Для системы в форме (3) функция Ляпунова выбирается в виде $V=\frac{1}{2}\left[\sum_{g=1}^{N'}\xi_g^2+\sum_{h=N'+1}^{N'+N''}\left(\xi_h^2+\tau_{ih}^2\right)\right]$, причем предполагается возможность выбора констант $a_{js}^{(k)}$ при условии, что производная от V, вычисленная в силу дифференциальных уравнений (3), является положительно определенной квадратичной формой. В ином случае функцию Ляпунова рекомендуется выбирать в виде

$$V=\frac{1}{2}\left[\sum_{g=1}^{N'}p_g\xi_g^2+\sum_{h=N'+1}^{N'+N''}\left(p_h\xi_h^2+q_n\tau_{ih}^2\right)\right],$$ чтобы для осуществления нужных условий воспользоваться еще дополнительными положительными параметрами p_g, p_n, q_n. Далее приводится пример применения изложенного способа к конкретной системе: $ax_1+\dot{x}_2=0$, $\dot{x}_1-\frac{b}{a}x_2-\frac{b_k}{a}x_3+\frac{b_k}{a}x_4=0$, $-\mu(t)\,x_1+cx_2+\dot{x}_3+cx_3=0$, $\dot{x}_4+cx_4=0$ в педположении, что a, b, c, k — положительные числа, $k<1$ и $\max_t\frac{|\mu(t)|}{a}<1$. При этом получены достаточные условия асимптотической устойчивости тривиального решения этой системы в терминах пространства некоторым образом введенных нормальных координат. Как сообщает автор, эти условия выполняются, если график $\mu(t)$ лежит в достаточно узкой полосе. А. Д. Горбунов

7610. К теории молекулярного генератора. Гуртовник А. С., Изв. высш. учебн. заведений, Радиофизика, 1958, 1, № 5-6, 83—87

Исследуется система уравнений, описывающая колебания в молекулярном генераторе

$$\begin{aligned}&\ddot{E}+E=\mu(P-\dot{E})+\mu^2[(\alpha-1)\dot{P}+\beta(N+N_0)]+\delta\mu^3P\\ &\ddot{P}+P=-\mu[\alpha\dot{P}+\beta E(N+N_0)]-\delta\mu^2P\\ &\dot{N}=\mu[E\dot{P}-\frac{\alpha}{2}N]+\frac{\alpha}{2}\mu^2EP,\end{aligned} \qquad (1)$$

где $\alpha=2Q/\tau\omega_0$, $\beta=8\pi\omega_2|\mu_{12}|^2Q^2/\omega_0^2\hbar$, $\delta=Q^2\omega_0^{-2}\times\left(\omega_2^2-\omega_0^2-\tau^{-2}\right)$, $\bar{E}=\sqrt{2\pi\hbar\omega_2}\,E$, $\bar{P}=\sqrt{2\pi\hbar\omega_2}/4\pi Q\cdot P$, $\bar{N}=N+N_0$. $\bar{E}$ и $\bar{P}$ — электрическое поле и поляризация среды, N_0 и $\bar{N}$ — число активных молекул в отсутствии и соответственно в присутствии поля, ω_0 и Q — собственная частота и добротность резонатора, ω_2 — частота молекулярного перехода, τ — среднее время пролета молекулы через резонатор, μ_{12} — матричный элемент дипольного момента молекулы, $\hbar$ — постоянная Планка. Величина $\mu=1/Q$ является малым параметром. Показано, что если $N_0>\alpha/\beta$, то система (1) допускает периодическое решение

$$\begin{aligned}&E^0=M_1\cos t',\ P^0=M_1\sin t',\ N^0=N_0-\alpha/\beta,\\ &M_1=\sqrt{\alpha(N_0-\alpha/\beta)},\ t'=\omega_0t/1+h_2\mu^2+\ldots,\\ &h_2=\frac{\alpha-\delta}{2(1+\alpha)}-\frac{\beta M_1^2}{16(1+\alpha)}.\end{aligned}$$

Исследование характеристических показателей линеаризированной системы уравнений для величин $\xi=E-M_1\cos t'$ $\eta=P+M_1\sin t'$, $\zeta=N-\left(N_0-\frac{\alpha}{\beta}\right)$ приводит к выводу, что решение E^0, P^0, N^0 является устойчивым только при

выполнении условия $N_0 > N^*$, где $N^* = \frac{4\alpha+1}{\beta(1-2\alpha)}$. Если $N_0 < N^*$, то решение является неустойчивым.

Ю. С. Саясов

7611. Относительно возмущений линейной системы с периодическими коэффициентами. Морimoto (On the perturbation of the linear system with periodic coefficients. Morimoto Hiroshi), Bull. Univ. Osaka Prefect., 1958, **A6**, 11—14 (англ.)

Рассматривается система вида

$$dz_l/dt = \sum_{j=1}^{n} f_{lj}(t)\, z_j + f_l(t) + \lambda g_l(z, t, \lambda), \qquad (1)$$

где $f_{lj}(t)$, $f_l(t)$ — непрерывные периодические функции t с периодом 2π, а $g_l(z, t, \lambda)$ — непрерывные функции $z_1 \ldots z_n$, имеющие в некоторой области D непрерывные частные производные по этим переменным. Кроме того, $g_l(z, t, \lambda)$ — непрерывные функции параметра λ при малых $|\lambda|$ и непрерывные периодические функции t с периодом 2π. Выводятся достаточные условия существования единственного периодического решения системы (1), которое обращается в соответствующее „порождающее" периодическое решение $\varphi_l = \varphi_l(t, a)$ (a — вектор начальных значений) этой системы при $\lambda = 0$, в том случае, если однородная система

$$dz_l/dt = \sum_{j=1}^{n} f_{lj}(t)\, z_j \qquad (2)$$

обладает нетривиальным периодическим решением периода T.

Пусть $y_i^{(j)}(t)$, $i, j = 1, \ldots n$, — фундаментальная система решений для уравнений (2), а через $H_i^{(j)}(t)$ обозначены члены матрицы, сопряженной с матрицей решений $y_i^{(j)}(t)$. Тогда искомые условия сводятся к требованию, чтобы 1) решение $\varphi_l = \varphi_l(t, a)$ лежало в области D и 2) якобиан левой части уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^t H_k^{(j)}(t)\, g_k(z, t, 0)\, dt = 0,$$

где индекс j принимает некоторые определенные значения, не обращался в нуль при $z_l = \varphi_l(t, a)$.

Ю. А. Рябов

7612. Периодические движения системы с n степенями свободы в случае кратных корней характеристического уравнения. Боярджиев (Periodische Bewegungen eines Systems von n Freiheitsgraden bei vielfachen Wurzeln der charakteristischen Gleichung. Bojadžiev G.), Докл. Болг. АН, 1959, **12**, № 1, 5—8 (нем.; рез. русск.)

Рассматривается n-мерная система, описываемая уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = \frac{\partial U}{\partial q_s}, \quad s = 1, \ldots n, \qquad (1)$$

где кинетическая энергия $T(q, \dot{q})$ и силовая функция $U(q)$ представляются в окрестности начала координат $q_1 = \ldots = q_n = 0$ положительными знакоопределенными квадратичными формами. Эти уравнения имеют интеграл энергии $U + T = \text{const}$. Исследуется периодическое решение вблизи положения равновесия (где $\frac{\partial U}{\partial q_s} = 0$) в случае, если характеристическое уравнение для линейной системы, соответствующей (1),

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{sk}\ddot{x}_k + b_{sk}x_k) = 0, \qquad (2)$$

имеет кратные чисто мнимые корни. Для случая, когда имеется один такой корень кратности p, выясняется вопрос о структуре условий существования указанного периодического решения. Исходя из условий периодичности

$$\dot{x}_s(T + \delta T) - \dot{x}_s(0) = 0, \quad \ddot{x}_s(T + \delta T) - \ddot{x}_s(0) = 0,$$

где δT — изменение периода по сравнению с периодом решения линейной системы (2), соответствующее упомянутому кратному корню, и используя интеграл энергии, автор приходит к алгебраическим уравнениям вида

$$\sum_{i_2, \ldots, i_p = 0}^{5} a_{mi_2 \ldots i_p} N_2^{i_2} \ldots N_p^{i_p} = 0 \quad (i_2 + \ldots + i_5 \leqslant 5),$$

$$m = 1, \ldots p - 1,$$

относительно $N_2, \ldots, N_p$, где $a_{mi_2 \ldots i_p}$ — постоянные коэффициенты. Каждому вещественному решению этих уравнений соответствует семейство периодических решений системы (1) с периодом $T + \delta T$.

Ю. А. Рябов

7613. Оценки и зависимость от параметра решений нестационарных операторных дифференциальных уравнений. Мляк (Limitations and dependence on parameter of solutions of non-stationary differential operator equations. Mlak W.), Ann. polon. math., 1959, **6**, № 3, 305—322 (англ.)

Более подробные доказательства результатов, сформулированных в одноименной работе (РЖМат, 1960, 5.66). Формулировки некоторых теорем видоизменены.

В. В. Немыцкий

7614. О счетной системе дифференциальных уравнений, содержащей переменные параметры. Жаутыков О. А., Матем. сб., 1959, **49**, № 3, 317—330

Известные результаты А. Н. Тихонова (Матем. сб., 1934, **41**, 551—560) и К. П. Персидского (Изв. АН КазССР. Сер. матем. и механ., 1948, **2**, 3—34) распространяются на системы, правые части которых, кроме искомых функций, содержат еще и переменные параметры. Для системы

$$dx_s/dt = f_s(t, x_1, x_2, \ldots, \mu), \quad s = 1, 2, \ldots,$$

где правые части в некоторой области непрерывны удовлетворяют „усиленному" условию Коши—Липшиц

$$|f_s(t, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m', x_{m+1}', \ldots; \mu) -$$

$$- f_s(t, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m'', x_{m+1}'', \ldots; \mu)| \leqslant \varepsilon_m \Delta u,$$

где $\varepsilon_m \to \infty$ при $m \to \infty$, найдены условия, позволяющие судить о ее решениях на основании исследования укороченной конечной системы. В качестве нормы решения при этом принимается верхняя грань множества модулей его компонент. Те же результаты распространены на случай конечного, а при некоторых дополнительных условиях и счетного числа параметров в правой части.

И. П. Макаров

7615. Целые операторы и функциональные уравнения. Мелзак (Entire operators and functional equations. Melzak Z. A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 3, 438—447 (англ.)

Рассматривается имеющее значение в кинетической теории уравнение $\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = K[f(x, t)]$, $0 \leqslant x, t < \infty$, с заданным начальным значением $f(x, 0)$, где $K(f) = \sum_1^\infty K_n(f)$, $K_n(f) = K_n(f, \ldots, f)$, $K_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ — n-линейный оператор, подчиненный ряду условий. Приводятся условия существования и единственности локального решения.

С. И. Зуховицкий

7616. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, теоремы существования и продолжи-

мости решения. **Кордуняну** (Equazioni differenziali negli spazi di Banach, teoremi di esistenza e di prolungabilità. Corduneanu Constantin), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957(1958), 23, № 5, 226—230 (итал.)

Доказывается локальная теорема существования для уравнения $y' = f(x, y)$ в банаховом пространстве E. Предполагается, что $f(x, y)$ равномерно непрерывен в некотором шаре и множество его значений компактно. Указаны различные условия нелокальной продолжимости решений.

Примечание референта. Близкие результаты были установлены С. Г. Крейном и референтом (РЖМат, 1960, 4272). Теорема существования справедлива, в частности, в более общих предположениях.

М. А. Красносельский

7617. Признаки ограниченности решений дифференциальных уравнений с непрерывным запаздыванием аргумента в банаховом пространстве. Рехлицкий З. И., Докл. АН СССР, 1959, 127, 971—974

Рассматривается основная начальная задача для дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$\dot{y}(t) - \int_0^a y(t-s)\, dA(t, s) = f(t),\ 0 \leqslant t < \infty,$$

$$y(t) = \varphi(t)\ (t \leqslant 0,\ 0 \leqslant a < \infty),$$

где $f(t)$ и $y(t)$ — непрерывные функции с областью значений, принадлежащей комплексному пространству Банаха $\widetilde{E}$, $A(t, s)$ — семейство линейных операторов, действующих в $\widetilde{E}$, причем операторы $A(t, s)$ в некотором смысле асимптотически постоянны. На $A(t, s)$ наложены еще некоторые ограничения, однако коммутативности операторов не требуется.

Дана схема доказательства следующей теоремы: Для того чтобы решение $y(t)$ поставленной задачи было ограниченным при всевозможных ограниченных $f(t)$ и $\varphi(t)$, необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения $z \exp\left[\text{сп.}\left\{\int_0^a z^s dA_\omega(s)\right\}\right] = 1$ лежали вне единичного круга ($A_\omega(s)$ — предельные операторы, порождаемые различными последовательностями $A(t_n, s)$ при $t_n \to \infty$). Утверждается, что при некоторых ограничениях справедлива аналогичная теорема и для решений уравнения

$$y^{(n)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} A_k(t)\, y^{(k)}(t - \alpha_k(t)) = f(t)\ (\alpha_k(t) \geqslant 0),$$

$$y^{(k)}(t) = \varphi_k(t)\ (t \leqslant 0),$$

где $A_k(t)$ — линейные операторы, действующие в $\widetilde{E}$.

Л. Э. Эльсгольц

7618 К. Вынужденные колебания в нелинейных системах. Хаяси Тихиро, Перев. с англ. М., Изд-во ин. лит., 1957, 204 стр., илл., 8 р. 80 к.

Книга Тихиро Хаяси посвящена небольшой части области нелинейной механики — исследованию вынужденных колебаний систем с одной степенью свободы и подробному анализу самых разнообразных явлений, возникающих в нелинейных системах под воздействием внешних сил. Книга состоит из двух частей.

Часть I, состоящая из четырех глав, посвящена изучению установившихся периодических колебаний в нелинейных системах. Здесь особое внимание уделяется исследованию устойчивости стационарных режимов с помощью уравнений Матье и Хилла. В гл. 1 отмечаются характерные особенности нелинейных колебаний, после чего подробно исследуется вопрос об устойчивости периодических колебаний путем рассмотрения уравнений в вариациях. Выводится обобщенное условие устойчивости, позволяющее судить об устойчивости не только периодического решения с основной частотой, но и об устойчивости колебаний с высшими гармониками. В гл. 2 рассматриваются гармонические колебания при симметричной и несимметричной нелинейной характеристике. Приводятся результаты экспериментального исследования и сопоставление последних с данными аналитического исследования. В гл. 3 изучаются высокочастотные гармонические колебания, имеющие большое значение в случае воздействия на нелинейную систему внешней силы с большой амплитудой. Рассматриваются высокочастотные колебания в последовательных контурах, случай самовозбуждения высокочастотных колебаний в схемах параллельного включения. Приводятся также экспериментальные данные и подробный анализ сопоставления эксперимента с теорией. Гл. 4 посвящена рассмотрению субгармонических колебаний. Рассматривается соотношение между нелинейной характеристикой и порядком субгармонических колебаний: подробно исследуются субгармонические колебания порядка 1/3 при нелинейной характеристике $u = c_1 v + c_3 v^3$ и при нелинейной характеристике $u = c_1 v + c_5 v^5$, а также субгармонические колебания порядка $^1/_2$.

В части II на основании топологических методов Пуанкаре и Бендиксона исследуются переходные режимы в нелинейных колебательных системах с одной степенью свободы. Гл. 5 посвящена подробному изучению устойчивости установившихся нелинейных колебаний путем топологического рассмотрения интегральных кривых в окрестности особой точки. Рассматриваются также предельные циклы, связанные с почти периодическими колебаниями в системах с нелинейным затуханием. В гл. 6 изучаются с помощью топологических методов режимы установления субгармонических колебаний. Приводятся также методы определения областей начальных условий, приводящих к возникновению колебаний определенного типа. Приводятся экспериментальные результаты, которые анализируются и сопоставляются с теоретическими. К основному тексту книги добавлено шесть приложений, в которых приводятся некоторые сведения о функциях Матье, неустойчивых решениях уравнения Хилла, а также некоторые замечания относительно интегральных кривых и особых точек.

Книга в целом содержит обширный расчетный и экспериментальный материал и подробную методику исследования вынужденных колебаний в нелинейных системах с одной степенью свободы, анализ качественных особенностей, принципы моделирования нелинейных систем. Особое внимание уделено выявлению внутренних связей между теорией и экспериментом. В теоретических разделах книги автор обходится самыми минимальными математическими средствами и не стремится к строгому изложению математической теории нелинейных дифференциальных уравнений, поэтому с математической точки зрения некоторые вопросы остаются открытыми. Вместе с тем книга представляет, благодаря богатому фактическому материалу, интерес не только для инженеров и физиков, но и для математиков.

Ю. А. Митропольский

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Редакторы *И. Н. Векуа, Н. И. Мозжерова*

7619. Теория уравнений в частных производных (La théorie des équations aux dérivées partielles. Nancy, 9—15 avril 1956. Colloq. internat. Centre nat. rech. scient., 71. Paris, 1956, 187 p.) (франц.)

7620. Гиперболические системы законов сохранения. Лакс (Hyperbolic systems of conservation laws.. Lax

P. D.), Communs Pure and Appl. Math., 1957, 10, № 4, 537—566 (англ.)

Работа состоит из двух частей. В первой части рассматривается одно уравнение

$$u_t + [f(u)]_x = 0. \qquad (1)$$

При предположении $f''(u) \neq 0$ дается явная формула для обобщенного („слабого") решения задачи Коши в верхней полуплоскости $t \geqslant 0$ (подобная формула была ранее получена О. А. Олейник для более общего уравнения (РЖМат, 1955, 2677; 1957, 8641)). В частном случае $f(u) = -\ln(a + be^{-u})$, $a + b = 1$, доказывается сходимость решений конечноразностной схемы, аппроксимирующей (1), к обобщенному решению задачи Коши; как отмечает автор, сходимость в общем случае доказана Н. Д. Введенской (РЖМат, 1960, 5280). Исследовано поведение решения при $t \to \infty$, когда начальная функция $\varphi(x)$ имеет среднее значение, т. е. $\lim_{L\to\infty} \int_a^{a+L} \varphi(x)\,dx$ существует и не зависит от a; для решений, отвечающих периодическим, а также финитным $\varphi(x)$, получена асимптотика при больших t.

Во второй части изучаются системы вида (1), где $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $f(u) = (f_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, f_n(u_1, \ldots, u_n))$, матрица $A(u) = \operatorname{grad} f(u)$ при всех u имеет n различных вещественных собственных значений: $\lambda_1(u) < \lambda_2(u) < \ldots < \lambda_n(u)$. Рассматривается слабое решение системы (1) при $t \geqslant 0$ с начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

т. е. кусочно-непрерывная и кусочно-гладкая вектор-функция $u(x, t)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [w_t u + w_x f(u)]\,dx\,dt + \int_{-\infty}^\infty w(x, 0)\,\varphi(x)\,dx = 0,$$

какова бы ни была непрерывно дифференцируемая финитная вектор-функция $w(x, t)$.

С целью обеспечить единственность решения задачи (1), (2) автор выделяет класс слабых решений, все разрывы которых являются либо „ударными волнами", либо „контактными разрывами". Разрыв слабого решения $u(x, t)$ называется ударной волной с индексом k, если на линии разрыва $x = x(t)$ выполняются неравенства: $\lambda_{k-1}(u_l) < \dfrac{dx}{dt} < \lambda_k(u_l)$, $\lambda_k(u_r) < \dfrac{dx}{dt} < \lambda_{k+1}(u_r)$, где $u_l = u(x(t) - 0, t)$, $u_r = u(x(t) + 0, t)$. Разрыв называется контактным разрывом с индексом k, если на линии разрыва $dx/dt = \lambda_k(u_l) = \lambda_k(u_r)$.

Пусть $r_k(u)$ — собственный вектор матрицы $A(u)$, соответствующий собственному значению $\lambda_k(u)$. Поле k-й характеристики системы (1) называется истинно нелинейным, если $r_k \operatorname{grad} \lambda_k \neq 0$ при любых u. В случае $n = 1$ это означает, что $f''(u) \neq 0$ при всех u; таким образом, „истинная нелинейность" есть в некотором смысле обобщение понятия выпуклости для вектор-функций векторного аргумента. Если $r_k \operatorname{grad} \lambda_k \equiv 0$, то поле k-й характеристики системы (1) называется линейно вырожденным.

В работе построено решение так называемой „задачи Римана", т. е. задачи (1), (2), где $\varphi(x) = u_-$ при $x < 0$, $\varphi(x) = u_+$ при $x > 0$; здесь u_-, u_+ — постоянные векторы и $|u_- - u_+|$ достаточно мал; кроме того, предполагается, что каждое из полей характеристик системы (1) является либо истинно нелинейным, либо линейно вырожденным. Решение принадлежит указанному выше классу и оказывается единственным, если потребовать еще малости $|u(x, t) - u_-|$ всюду при $t \geqslant 0$, $-\infty < x < \infty$.

А. С. Калашников

7621. Одна теорема существования для уравнения $F\left(x, y, z, \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$. Беррути-Онести (Un teorema di esistenza per l'equazione $F\left(x, y, z, \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$. Berruti Onesti Natalia), Ann. Scuola norm. super. Pisa Sci. fis. e mat., 1959, 13, № 1, 89—114 (итал.)

Теорема существования классического решения задачи Коши для уравнения, указанного в заголовке, доказывается обычно в предположении, что как функция F, так и искомое решение обладают вторыми непрерывными частными производными. Здесь доказано существование по крайней мере одного решения задачи, ставящейся на линии $y = f(x)$, если от F и от решения требуется только наличие первых производных, удовлетворяющих условию Липшица (при аналогичном требовании на начальные данные). Область существования решения гарантируется в зависимости от характеристик заданных функций. Доказательство, довольно громоздкое, основано на методе характеристик в варианте, примененном Чинкуини — Чибрарио и Чинкуини для аналогичного уравнения, разрешенного относительно $\partial z/\partial x$.

А. Д. Мышкис

7622. К теории задачи с начальными условиями для одной системы уравнений с частными производными в действительной области. А х у н д о в А. М. Тр. Ин-та физ. и матем. АН АзербССР, 1953, 6, 62—87 (рез. азерб.)

Исследуется следующая задача: найти решение системы уравнений

$$\frac{\partial^{n_l} {}^m U_l}{\partial t_1^{n_l} \ldots \partial t_m^{n_l}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{(k_s)} A_{lj}^{(k_0, k_1, \ldots, k_n)}(\bar{t}) \frac{\partial^{k_0 m + k_1 + \ldots + k_n} U_j}{\partial t_1^{k_0} \ldots \partial t_m^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} +$$

$$+ f_l(\bar{t}, \bar{x}), \qquad (1)$$

$(l = 1, \ldots, N,\ \bar{x} = (x_1, \ldots, x_n);\ k = 0, \ldots, n_j - 1)$,

удовлетворяющее начальным условиям:

$$\left.\frac{\partial k U_l}{\partial t_\nu^k}\right|_{t_\nu = t_\nu^0} = \varphi_l^{(k)}(x_1, \ldots, x_n),\ \nu = 1, \ldots, m;$$

$\sum_{(k_s)}$ означает суммирование по всем целым неотрицательным $k_l \geqslant 0$; $k_0 m + k_1 + \ldots + k_n$; $A_{lj}^{(k_0, k_1, \ldots, k_n)}$ непрерывны по $0 \leqslant t \leqslant T$ $(s = 1, 2, \ldots, m)$; функции f_l зависят от $t_1, \ldots, t_m$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и определены для всех действительных x_k, $-\infty < x_k < +\infty$ и при $0 \leqslant t_s \leqslant T_s$.

Автор доказывает существование и единственность решения поставленной задачи в определенном классе неограниченных функций, а также непрерывную зависимость от начальных данных этого решения. При помощи замены указанная система заменяется системой

$$\frac{\partial^m U_l}{\partial t_1 \ldots \partial t_m} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{(k_s)} A_{lj}^{(k_1, \ldots, k_n)}(\bar{t}) \frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n} U_j}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + f_l(\bar{t}, \bar{x}). \qquad (2)$$

В § 2 изучается асимптотическое поведение решения системы

$$\frac{\partial^m v_l}{\partial t_1 \dots \partial t_m} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{(k_s)} A_{lj}^{(k_1 \dots k_n)}(t)\,(ia_1)^{k_1} \dots (ia_n)^{k_n} v_j,$$

$l = 1, 2, \dots, N$; относительно параметра при условиях:

$$v_l|_{t_\nu = t_\nu^0} = \varphi_l(a_1, \dots, a_n) \quad (\nu = 1, \dots, m),$$

где $0 \leqslant t_\nu^0 < t_\nu \leqslant T_\nu$, $|\varphi_l| < C_1 e^{C_\alpha k}$ (C_1, C — неотрицательные константы; $\alpha = \max(|a_1|, \dots, |a_n|)$).

В § 3 сформулировано условие А И. Г. Петровского для поставленной задачи. § 4 посвящен доказательству существования решения этой задачи. В § 5 доказывается теорема единственности и, наконец, в § 7 автор приводит интегральное представление задачи для системы (2). Автор при выполнении данной работы пользуется известным методом И. Г. Петровского. Система, рассматриваемая автором, отличается от системы И. Г. Петровского только тем, что в эту систему входят „многовременные" производные. К. Т. Ахмедов

7623. О существовании решения задачи Коши для некоторого класса уравнений в частных производных. Гусаченко Г. М., Докл. АН СССР, 1957, 115, №1, 27—30

Рассматривается задача Коши для уравнения вида:

$$\frac{\partial}{\partial t} P_1\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t) =$$

$$= P_2\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t),\ u(x,0) = u_0(x). \qquad (1)$$

Теорема. Если порядок дифференциального полинома $P_1\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ больше, чем порядок $P_2\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$, и если $u_0(x)$ удовлетворяет неравенству $|u_0(x)| \leqslant A \times \exp(-A_2 |x|^{\frac{\eta}{q+1}})$, $A_2 > 0$, то для задачи Коши (1) существует решение $u(x,t)$ в классе функций $|u(x,t)| \leqslant B_1 \times \exp(B_2 |x|^{\frac{q}{q+1}})$, $B_2 > 0$, а q — наибольшая кратность вещественного корня полинома $P_1(s)$.

Теорема доказывается при помощи преобразования Фурье. А. Г. Костюченко

7624. Об оценках сверху классов единственности решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных. Золотарев Г. Н., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 2, 37—40

Рассматривается система дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t). \qquad (1)$$

Функция $u(x,t)$ зависит только от одной пространственной переменной x, меняющейся от $-\infty$ до $+\infty$. Пусть p_0 — приведенный порядок системы (1).

Теорема. Если p_0 — приведенный порядок системы (1), а $F(|x|)$ — функция юнговского типа, для которой

$$\int_1^\infty \frac{F\left(\sqrt[p_0]{x}\right)}{x^2} x < \infty,$$

то существует отличное от тождественного 0 решение $u(x,t)$ системы (1), удовлетворяющее условиям:

1) $u(x,0) = 0$;

2) $|u(x,t)| \leqslant A_1 e^{\Phi(|x|)}$ $(0 < t < T,\ A_1 = A_1(T) > 0)$,

где $\Phi(|x|)$ — функция, двойственная по Юнгу функции $F(|x|)$. Эта теорема является усилением одной теоремы Гельфанда — Шилова, у которых функция $F(|x|)$ была равной $|x|^{p_0}$. Основным моментом в доказательстве является проблема Ватсона для полуплоскости.

А. Г. Костюченко

7625. Решение в целом задачи Коши для нестационарного плоского течения вязкой несжимаемой жидкости. Ладыженская О. А., Тр. Моск. матем. о-ва, 1959, 8, 71—81

Дано доказательство существования решения задачи Коши для уравнений гидромеханики в плоском случае, отличное от доказательства Лере. Вопрос сводится к доказательству разрешимости задачи:

$$L\psi = \frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} - \nu\Delta^2\psi + \psi_{x_1}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial x_2} - \psi_{x_2}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial x_1} = f(x,t),$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(x_1, x_2).$$

Считается, что $\nu = \text{const}$; $f = 0$; ψ_0 непрерывна и

$$\int_E \left(\psi_0^2 + \sum_{(l)}\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x_l}\right)^2 + \sum_{(l,j)}\left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x_l \partial x_j}\right)^2\right) dx = C < +\infty.$$

Решение находится как предел при $R \to +\infty$ решений краевых задач:

$$L\psi^R = 0 \quad (x,t) \in (|x| < R,\ t \geqslant 0),$$

$$\psi^R(x,0) = \psi_0(x)\zeta_R(|x|) = \psi_{0R}(x);$$

$$\zeta(|x|) = \begin{cases} 1, & |x| < R-2 \\ 0, & |x| \geqslant R-1 \end{cases}$$

$$\zeta(|x|) \in C^2;$$

$$\psi^R|_{|x|=R} = \Delta\psi^R|_{|x|=R} = 0.$$

Для доказательства существования ψ_R сначала в работе получены оценки: $|\psi^R(x,t) - \psi^R(0,t)| < C_1|x|$; $|\psi^R(x,t)| \leqslant C_2 R$ и некоторые другие (C_1 и C_2 зависят только от C).

Далее вводится понятие об обобщенном решении поставленной задачи для функций ψ_R и доказывается теорема единственности (с помощью интегральных оценок). Для доказательства теоремы существования ψ_R применяется метод Галеркина. Приближение порядка n ищется в виде: $\psi_{nR}(x,t) = \sum_{k=1}^n C_{kn}(t)\varphi_k(x)$, где φ_k — собственные функции уравнения Лапласа для круга, удовлетворяющие краевому условию $\varphi_k|_{|x|=R} = 0$. Для неизвестных коэффициентов C_{kn} получается нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, решения которой существуют во всем бесконечном интервале $t \geqslant 0$. Для n-х приближений метода Галеркина ψ_{nR} доказываются "априорные" оценки, такого же типа, как и для точного решения задачи о нахождении ψ_R. Эти оценки позволяют доказать сходимость ψ_{nR} к общему решению поставленной задачи для ψ_R. В последнем параграфе рассмотрена последовательность ψ_{R_m} ($R_m \to +\infty$). Доказывается, что из последовательности ψ_{R_m} можно выделить подпоследова-

тельность, сходящуюся к обобщенному решению задачи Коши: $L\psi = 0$; $\psi|_{t=0} = \psi_0$. В. М. Бабич

7626. Некоторые приложения разложения δ-функции на плоские волны к построению фундаментальных решений уравнений в частных производных. Муртазаев Д., Докл. Акад. Фанхои РСС Точикистон, Докл. АН ТаджССР, 1958, 1, № 3, 3—7 (рез. тадж.)

Методом разложения δ-функции на плоские волны строятся фундаментальные решения для уравнений теории упругости. Фундаментальное решение задачи Коши для динамической системы уравнений теории упругости

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)+\mu\Delta u_l=\frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2}$$

с начальными условиями

$$u_l\Big|_{t=0}=0;\quad \frac{\partial u_1}{\partial t}\Big|_{t=0}=-4\pi\delta(x_1,x_2,x_3);$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}\Big|_{t=0}=\frac{\partial u_3}{\partial t}\Big|_{t=0}=0$$

получается в виде

$$u_l=\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_l}\left[\frac{\delta(r-at)}{a}-\frac{\delta(r-bt)}{b}\right]+$$

$$+\frac{t}{2}\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x_1\partial x_l}[\operatorname{sgn}(r-bt)-\operatorname{sgn}(r-at)],$$

где $a^2=\mu$, $b^2=\lambda+2\mu$. Е. Д. Гарбер

7627. Существование и единственность решений уравнения в частных производных вида $X_1(x_1,\ldots,x_n)\times$ $\times\dfrac{\partial z}{\partial x_1}+\ldots+X_n(x_1,\ldots,x_n)\dfrac{\partial z}{\partial x_n}=f(x_1,\ldots,x_n,z)$. **Мерли** (Esistenza e unicità degli integrali di un'equazione alle derivate parziali della forma $X_1(x_1,\ldots,x_n)\dfrac{\partial z}{\partial x_1}+\ldots+X_n(x_1,\ldots,x_n)\dfrac{\partial z}{\partial x_n}=f(x_1,\ldots,x_n,z)$. Merli Luigi), Ann. mat. pura ed appl., 1958, **46**, 97—107 (итал.)

Автор, пользуясь понятием плюри-производной

$$D=X_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial}{\partial x_n},$$

где $X_1,\ldots,X_n$ суть функции от $x_1,\ldots,x_n$, введенной Мамбриани (РЖМат, 1958, 2065, 2066), и некоторыми ее формальными свойствами, как например, разложение плюри-производной на произведение элементарных операторов, предложенное Манфреди (РЖМат, 1958, 2064), обобщает известную теорему последней, относящуюся к обыкновенным дифференциальным уравнениям нормальной формы первого порядка с неизвестной $y(x)$, доказывая существование и единственность решения уравнения, указанного в заглавии, удовлетворяющего некоторому начальному условию. D. Mangeron

7628. Обобщенные средние. Дельсарт, Лион (Moyennes généralisées. Delsarte J., Lions J. L.), Comment. math. helv., 1959, **33**, № 1, 59—69 (франц.)

Рассматривается сингулярная задача Коши:

$$-\sum\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+$$

$$+\frac{1}{t}q(t)\frac{\partial u}{\partial t}+r(t)u=0,$$

$$u(x,0)=f(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0.$$

Пусть a — фиксированное положительное число. В работе изучается разрешимость уравнения $u(x,a)=f(x)$, $x\in R_n$, $u(x,a)$ называется обобщенным средним функции $f(x)$, соответствующим радиусу a. Показывается, что проблема сводится к теории среднепериодических функций. В процессе доказательства используются операторы преобразования и операторы обобщенного сдвига в сингулярном случае. В частном случае из результатов работы следует ранее доказанная интересная теорема Дельсарта: (РЖМат, 1959, 2674). Пусть $f(x)$ бесконечно дифференцируема в R_n. Обозначим через $u(x,r)$ среднее функции f по сфере с центром в точке x радиуса r. Если для двух фиксированных положительных чисел a и b (за возможным исключением конечного числа) и всех $x\in R_n$ $u(x,a)=u(x,b)=f(x)$, то $f(x)$ — гармоническая функция. Этот частный случай соответствует задаче Коши:

$$-\Delta_x u+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=0,$$

$$u(x,0)=f(x),\quad \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=0}=0.$$

Б. М. Левитан

7629. Поправка. Докл. АН СССР, 1959, **125**, № 3, 470 См. РЖМат, 1959, 3791.

7630. Нормальные виды уравнений с частными производными второго порядка от n независимых переменных. Гронец Ю., Acta Fac. rerum natur. Univ. Comeniamae. Math., 1958, 2, № 5-6, 165—175 (рез. нем., словацк.)

Работа состоит из двух частей. В первой части доказывается известная теорема о приведении квадратичной формы к сумме квадратов при помощи треугольных преобразований. Во второй части разбирается вопрос о каноническом виде дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами. Ссылки на литературу отсутствуют. Л. Р. Волевич

7631. Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения. Вишик М. И., Матем. сб., 1956, **39**, № 1, 51—148

Рассматривается задача Коши для дифференциального уравнения

$$Lu\equiv A(t)\frac{d^2u}{dt^2}+B(t)\frac{du}{dt}+C(t)u=h(t) \qquad (1)$$

в гильбертовом пространстве H; $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — операторы в H, неограниченные; $u(t)$ и $h(t)$ — функции со значениями в H. Задача Коши состоит в нахождении решения (1), удовлетворяющего начальным условиям

$$u|_{t=0}=u_0,\quad du/dt|_{t=0}=u_1\quad (u_0,u_1\in H). \qquad (2)$$

В § 2 выделены некоторые классы уравнений (1), для которых задача Коши (1) и (2) корректна, и доказаны теоремы существования и единственности; приведены также оценки, указывающие характер непрерывной зависимости от правой части и начальных условий. В изученные классы входят, в частности, уравнения следующего вида: а) $\dfrac{d^2u}{dt^2}-A(t)u=h(t)$, где $A(t)$ — при каждом t полуограниченный снизу самосопряженный оператор; б) $B(t)\,d^2u/dt^2-A(t)u=h(t)$, где оператор $A(t)$ подчинен оператору $B(t)$; в) уравнение Шрёдингера $du/dt-iA(t)u=h(t)$, где $A(t)$ — самосопряженный; г) $du/dt-(A(t)+iB(t))u=h(t)$, где $A(t)$ и $B(t)$ — самосопряженные, причем $A(t)$ полуограничен снизу (т. е. $A(t)+iB(t)$ — сильно эллиптический).

К задаче Коши вида (1), (2) приводится и смешанная краевая задача в цилиндрической области $Q=D\times(0<t<l)$, $D\subset E^{(n)}$ для систем дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$Lu \equiv A_{m'}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^{r'} u(x,t)}{\partial t^{r'}} + B_{r'}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + C_{s'}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = h(x,t), \quad (3)$$

где $u = (u_1(x,t), \ldots, u_N(x,t))$, $h = (h_1(x,t), \ldots, h_N(x,t))$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $A_{m'}$, $B_{r'}$, $C_{s'}$ — дифференциальные операторы по x порядков m', r', s'. Ищется решение уравнений (3), удовлетворяющее начальным условиям $u_0(x)$, $u_1(x)$ и, например, однородным граничным условиям вида

$$u\Big|_{\text{Б}} = \ldots \frac{\partial^{\lambda-1} u}{\partial x_{i_1} \ldots dx_{i_{\lambda-1}}}\Big|_{\text{Б}} = 0 \quad (1 \leqslant i_k \leqslant n), \quad (4)$$

где $\lambda = \frac{1}{2}\max(m', r', s')$, причем $\max(m', r', s')$ — четное число, Б — боковая поверхность цилиндра Q. Если $A_{m'} = E$, то изучаемые системы включают некоторые подклассы систем гиперболических и параболических по И. Г. Петровскому, в частности общие гиперболические уравнения второго порядка. В рассматриваемые системы входят и уравнения типа Соболева (когда $A_{m'}$ является дифференциальным оператором). В этом случае $\frac{d^2u}{dt^2}$ непрерывно зависит от $h(t)$, если порядок оператора $A_{m'}$ максимальный в уравнении (3), в противном случае такой зависимости нет.

Изучение указанных выше задач разбивается на три этапа. Задаче (1), (2) ставятся в соответствие функциональные уравнения

$$\widetilde{\mathfrak{C}}u = \widetilde{h}, \quad (\text{I})$$

$$\widetilde{\mathfrak{C}}^* u = \widetilde{h}_1, \quad (\text{I}^*)$$

где $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{C}^*$ — сопряженные операторы, и обобщенным решением задачи (1), (2) называется решение уравнения (1) (принятое в работе определение обобщенного решения совпадает с обычным определением при помощи интегрального тождества). Доказывается существование и единственность решения уравнений (I) и (I*). Далее излагается аналог метода Галеркина для решения системы (1), (2) этот метод тоже может быть использован для изучения дифференциальных свойств по t решения. Дифференциальные свойства по x получаются из доказанной автором теоремы: Если решение имеет производные определенного порядка по t, то оно имеет и производные до некоторого порядка по x, причем нормы последних по подобласти Q_δ оцениваются через нормы первых по большей подобласти $Q_{\delta'}$. С помощью теорем вложения Соболева можно указать достаточные требования на коэффициенты и правую часть (при $u_0 = u_1 = 0$), для того, чтобы решение имело непрерывные производные до некоторого порядка.

Рассмотрен также предел при $t \to \infty$ нестационарной задачи $du/dt - (A(t) + iB(t))u = h(t)$ и доказано, что $u(x,t) \to w(x)$ — решению стационарной задачи $-(A(\infty) + iB(\infty))w = h(\infty)$. Библ. 26 назв. А. Л. Крылов

7632. Задача Коши для уравнения типа С. Л. Соболева. Прокопенко Л. Н., Докл. АН СССР, 1958, 122, № 6, 990—993

Для дифференциального уравнения

$$\frac{d^m}{dt^m}\Delta u + \sum_{k=0}^{m-1} L_k\left[\frac{d^k u}{dt^k}\right] = f(t), \quad (1)$$

$$L_k[u] = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}^{(k)}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha^{(k)}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + a^{(k)}(x,t)\,u,$$

рассматриваемого для $(x,t) \in E_n \times [0,\infty)$, изучается в классе функций $u(x,t)$, принадлежащих при каждом t к $L_2(E_n)$, задача Коши с начальными данными $d^k u/dt^k = u_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$. Близкая задача для случая коэффициентов, не зависящих от x, изучалась при помощи преобразования Фурье С. Л. Соболевым (РЖМат, 1955, 232) и С. А. Гальперном (РЖМат., 1957, 2334).

Устанавливается, что если коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие по x, непрерывны по t и убывают вместе с производными при $|x| \to \infty$, как $1/|x|^q$, где $q \geqslant 0$ достаточно велико, то существует гладкое по x и t решение рассматриваемой задачи. При этом предполагается, что начальные данные $u_k(x)$ и правая часть $f(t)$ входят в соболевское пространство $W_2^{(l)}(E_n)$ с достаточно большим l, причем $f(t)$ как вектор-функция со значениями в $W_2^{(l)}(E_n)$ непрерывна по t. При меньшем запасе гладкости у коэффициентов, начальных данных и $f(t)$ существует обобщенное решение задачи Коши.

Для доказательства теоремы автор заменяет уравнение (1) соответствующим операторным уравнением, при этом член $\frac{d^m}{dt^m}\Delta u$ заменяется на $\frac{d^m}{dt^m}Au$, где A — замыкание оператора, построенного по Δ на гладких финитных функциях. Если рассматривать аналогичную задачу в конечной области по x, то оператор A^{-1} будет ограниченным и для доказательства существования решения можно было бы воспользоваться соответствующими общими результатами М. И. Вишика (реф. 7631). Однако в случае, рассматриваемом в статье, A^{-1} будет существовать лишь как неограниченный оператор, поэтому рассмотрения усложняются и приходится налагать условия убывания на ∞ коэффициентов выражений L_k.

Ю. М. Березанский

7633. Решение смешанной задачи для системы уравнений Максвелла в случае идеально-проводящей границы. Быховский Э. Б., Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 13, 50—66 (рез. англ.)

Смешанная задача для системы уравнений Максвелла в случае идеально-проводящей границы (при граничном условии $E_\tau|_S = 0$, где E_τ — касательная к границе трехмерной области компонента E) рассматривается как задача Коши для операторного уравнения

$$Adu/dt + S_1 u + Bu = f(t), \quad (1)$$

где $u(t)$ — функция со значениями из вещественного пространства Гильберта H; S_1 — антисимметрический оператор с плотной в H областью определения; $A(t)$ — самосопряженный, ограниченный, положительно определенный оператор; $B(t)$ — ограниченный оператор. Кроме того, на коэффициенты операторов $A(t)$ и $B(t)$ накладывается еще ряд ограничений.

Доказывается существование и единственность обобщенного решения задачи Коши для уравнения (1) функциональным методом, так же как это делается в работе О. А. Ладыженской (РЖМат, 1960, 5279).

Для уравнений Максвелла без доказательства приводится теорема, в которой формулируются условия, накладываемые на коэффициенты, чтобы решение рассматриваемой смешанной задачи было решением почти всюду, т. е. принадлежало классу $W_2^{(1)}$ в смысле С. Л. Соболева.

В. Н. Масленникова

7634. О нестационарных операторных уравнениях и их приложениях к линейным задачам математической физики. Ладыженская О. А., Матем. сб., 1958, 45, № 2, 123—158.

Автор развивает свои предыдущие результаты относительно разрешимости задачи Коши для операторных уравнений вида

$$du/dt + S_1(t)\,u + S_2(t)\,u = f \qquad (1)$$

с начальным условием

$$u\mid_{t=0} = \varphi_0 \qquad (2)$$

и вида

$$d^2u/dt^2 + S_1(t)\,u + S_2(t)\,u = f \qquad (3)$$

с начальными условиями

$$u\mid_{t=0} = \varphi_0,\ \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0} = \varphi_1. \qquad (4)$$

Здесь $S_1(t)$, $S_2(t)$ — линейные операторы в некотором гильбертовом пространстве H, u, f — абстрактные функции параметра t $(0 \leqslant t \leqslant T)$ со значениями в H. В гл. 1 приводятся результаты предыдущих работ автора (РЖМат, 1957, 638; 1960, 5 79) и дается приложение этих результатов к смешанным задачам для уравнений параболических и гиперболических типов, для уравнения Шрёдингера и для сильно параболических систем.

В гл. 2 для задач (1) — (2) и (3) — (4) даются новые доказательства теорем существования и единственности, основанные на методе конечных разностей.

Гл. 3 посвящена изложению метода непрерывного продолжения по параметру применительно к поставленным выше задачам. Л. Н. Слободецкий

7635. О некоторых связях между обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных. Крейсиг (On some relations between partial and ordinary differential equations. Kreyszig Erwin), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 2, 183—190 (англ.)

Как известно, общее решение уравнения

$$L(U) \equiv U_{zz^*} + B(z, z^*)\,U_{z^*} + C(z, z^*)\,U = 0 \qquad (1)$$

дается формулой (см., например, Векуа И. Н., Новые методы решения эллиптических уравнений, М. — Л., 1948)

$$U(z, z^*) \equiv P(f) =$$

$$= \int_{-1}^{+1} E(z, z^*, t)\, f\left(\frac{1}{2}\,z(1-t^2)\right)(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt, \qquad (2)$$

где $B(z, z^*)$, $C(z, z^*)$ — заданные аналитические функции комплексных аргументов $z; z^*$, $E(z, z^*, t)$ — так называемая производящая функция, однозначно определяемая через функции B и C, $f(z)$ — произвольная аналитическая функция, а $U(z, z^*)$ — решение (1), соответствующее данному $f(z)$.

Автор, продолжая свои ранние исследования (РЖМат, 1957, 3132; 1958, 4727), при предположении, что

$$E(z, z^*, t) = \exp Q(z, z^*, t),$$

$$Q(z, z^*, t) = \sum_{\mu=1}^{m} q_\mu(z, z^*)\,t^\mu,$$

строит обыкновенные дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют частные решения уравнения (1), соответствующие дробно-рациональным функциям $f(z)$ по формуле (2). М. Б. Гагуа

7636. Проблема коэффициентов для систем дифференциальных уравнений в частных производных. Крейсиг (Coefficient problems in systems of partial differential equations. Kreyszig Erwin), Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1958, **1**, № 3, 283—294 (англ.)

Продолжая исследования Бергмана (РЖМат, 1958, 5728), автор рассматривает проблему коэффициентов для решений переопределенной системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{1}{4}\,[\Delta_k v + C_k(x_k, y_k)\,v] = u_{z_k z_k^*} + c_k(z_k, z_k^*)\,u = 0, \qquad (1)$$

$$k = 1,2, \quad z_k = x_k + iy_k,\ z_k^* = x_k - iy_k,$$

$$\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z_k^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k}\right),$$

$$u(z_1, z_1^*, z_2, z_2^*) = v(x_1, y_1, x_2 y_2),\ c_k(z_k, z_k^*) = \frac{1}{4}\,C_k(x_k, y_k),$$

коэффициенты которой $c_k(z_k, z_k^*)$ целые функции. В частности, исходя из разложения

$$u(z_1 z_1^*,\ z_2,\ z_2^*) = \sum_{m,n,p,q=0}^{\infty} u_{mnpq} z_1^m z_1^{*n} z_2^p z_2^{*q} \qquad (2)$$

и воспользовавшись известной формулой Бергмана (см. упомянутую статью Бергмана), дающей общее представление решений системы (1), автор доказывает ряд предложений, устанавливающих связь между подпоследовательностями коэффициентов разложения

$$(u_{mpo}),\ m, p = 0, 1, \ldots,\ \text{и} \ldots (u_{moq}),\ m, q = 0, 1, 2, \ldots,$$

с одной стороны, и подпоследовательностями вида (u_{mnpq}), $n > 0$, $q > 0$ при каждом фиксированном n и q $(n, q = 1, 2, \ldots)$, с другой. М. Б. Гагуа

7637. Формула разложения произвольной функции в ряд по фундаментальным функциям одного класса граничных задач с параметром для линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Расулов М. Л., Докл. АН СССР, 1958, 120, № 2, 252—255

Выводится формула разложения произвольной функции $f \in L_2(D)$ в ряд

$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_{\substack{j=1\\k=1}}^{\infty}\int_{d_{jk}} \lambda^{m(s+1)-1}\,v(x, \lambda)\,d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{при } s < q-1 \\ f(x) & \text{при } s = q-1 \end{cases} \qquad (1)$$

по фундаментальным функциям одного класса граничных задач с параметром для линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Рассматриваемый класс задач характеризуется тем, что в нем переменные частично разделяются и для граничных задач, полученных частичным разделением переменных, справедлива формула разложения типа (1). Формула (1) обобщает известную формулу Я. Д. Тамаркина (Math. Z., 1928, 27) для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений на случай рассматриваемого класса граничных задач для уравнений с частными производными. На основании этой же формулы (1) при помощи вычетного метода можно показать, что достаточно гладкое решение соответствующей смешанной задачи представляется в виде интегрального вычета. Подобные смешанные задачи, для которых спектральные задачи не соответствуют самосопряженным операторам, встречаются, например, в подземной гидромеханике и в теории теплопроводности. Библ. 2 назв. П. Ф. Фильчаков

7638. О некоторых классах уравнений в частных производных второго порядка. Чочиев Ф. З., Тр. Сталинирск. гос. пед. ин-та, 1956, 3, 505—514

Даются достаточные условия в виде некоторых отдельных дифференциальных соотношений, которым должны удовлетворять коэффициенты данного линейного плоского дифференциального уравнения в частных производных второго порядка, чтобы нахождение его общего решения могло быть сведено к последовательному нахождению общих решений соответствующих линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. М. Б. Гагуа

7639. Регулярные бинарные пфаффианы и непараболические дифференциальные уравнения в частных производных. Хартман, Винтнер (Regular binary pfaffians and nonparabolic partial differential equations. Hartman Philip, Wintner Aurel), Rend. Circolo mat. Palermo, 1954, **3**, № 3, 347—362 (англ.)

Дается доказательство двух следующих утверждений.

I. Поверхность $z = z(x, y)$ класса C^2 без омбилических точек является поверхностью класса C^3 тогда и только тогда, когда ее гауссова и средняя кривизны есть функции класса C^1.

II. Пусть

$$u = u(x, y),\ v = v(x, y),\ (x = x(u, v),\ y = y(u, v)) \quad (1)$$

— взаимно однозначное отображение некоторой области плоскости (x, y) на некоторую область плоскости (u, v), принадлежащее классу C^1 (это означает, что функции $u(x, y)$, $v(x, y)$, $x(u, v)$, $y(u, v)$ принадлежат классу C^1 по областям их определений). Пусть, далее, (1) преобразует невырождающуюся риманову метрику (определенную или неопределенную)

$$ds^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2 \quad (2)$$

с коэффициентами класса C^1 в метрику

$$ds^2 = G_{11}dx^2 + 2G_{12}dxdy + G_{22}dy^2$$

с коэффициентами также класса C^1.

Утверждение II было ранее доказано одним из авторов только для случая определенной метрики (Hartman P., Amer. J. Math., 1952, **74**, 215—226). Л. Н. Слободецкий

7640. К проблеме существования решения у линейного уравнения с частными производными. Хорних (Zum Existenzproblem der linearen partiellen Differentialgleichungen. Hornich Hans), Monatsh. Math., 1959, **63**, № 4, 378—393 (нем.)

Пусть G — ограниченная односвязная область на плоскости, а функции $\alpha(x, y)$, $f(x, y)$ равномерно непрерывны в G. Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial l} \equiv \cos\alpha(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\alpha(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y). \quad (1)$$

Решением его называется функция u, непрерывная и обладающая в каждой точке G производной в направлении l. В общем случае нельзя гарантировать существования подобного решения даже в малом (РЖМат, 1956, 1350). Доказывается теорема: Пусть уравнение $\partial u/\partial l = 0$ не имеет в G замкнутых характеристик и для каждой характеристической компоненты (х. к.), состоящей из счетного числа характеристических комплексов L_n, справедливо неравенство $\sum \sigma_n \leqslant \text{const}$ (где σ_n — верхняя грань длин характеристик между двумя произвольными точками из L_n), тогда уравнение (1) имеет решение Однородное уравнение (1) имеет нетривиальное. (отличное от константы) решение в том и только том случае, когда в G существует более одной х. к. При этом характеристикой (Lösungsweg) именуется непрерывная, спрямляемая в G кривая $x = x(s)$, $y = y(s)$ (s — длина дуги), удовлетворяющая почти всюду уравнению $dx \cdot dy = \cos\alpha(x, y) \cdot \sin\alpha(x, y)$. Характеристическим комплексом (Lösungskomplex) называется подмножество G, в котором каждые две точки могут быть связаны характеристикой. Множество (возникающее из объединения характеристических комплексов в результате замыкания внутри G), каждые две точки которого связываются характеристикой в $\overline{G}$, носит название х. к.

Решение u, существование которого утверждает теорема, не единственно. Имеются примеры, иллюстрирующие необходимость выставленных в теореме требований. П. И. Лизоркин

7641. Базисные множества полиномиальных решений дифференциальных уравнений в частных производных. Хорват (Basic sets of polynomial solutions for partial differential equations. Horvath J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 4, 569—575 (англ.)

Автор, пользуясь алгебраическим методом (обозначения см. Bourbaki N., Eléments de mathématique, Livre II: Algèbre, Chaps. IV-V, Actualités scientifiques et industrielles. № 1102, Paris, 1950), строит базисные множества полиномиальных решений дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами вида

$$D = \sum {}_M D^M = 0,$$

где $D^M = \dfrac{\partial^m}{\partial x^M} = \dfrac{\partial^m}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}$, $m = |M| = m_1 + \ldots + m_n$, $M = (m_1, \ldots, m_n)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E = R^n (n > 1)$.

Полученные результаты, примененные затем для построения вышеуказанных базисных множеств для дифференциальных операторов

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^m}{\partial x_i^m},\quad q\frac{\partial^3}{\partial x^3} + p\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3}{\partial y^3},\quad \Delta^2,\quad \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$$

и волнового оператора $\sum_{i=1}^{n-1} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$, обобщают и объединяют многочисленные уже известные результаты, полученные главным образом Майлсом и Вильямсом (РЖМат, 1956, 4537, 7429; 1957, 3985, 4016) и автором (РЖМат, 1957, 5730). D. Mangeron

7642. Общая постановка некоторых краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных. Вишик М. И., Соболев С. Л., Докл. АН СССР, 1956, **111**, № 3, 521—523

Известно, что для гиперболического уравнения

$$Lu = f \quad (1)$$

естественно решается задача обращения оператора L при условии $u \equiv 0$ при $t < 0$, где f — обобщенная функция. Доказывается, что к такой задаче сводится и задача Коши для уравнения (1). В настоящей заметке аналогичный путь предлагается для решения эллиптических краевых задач. В конечной области Ω с границей S рассматривается задача

$$\Delta u(x) = f(x) \text{ в } \Omega,\ x \in \Omega, \quad (2)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S + b(s)\,u\Big|_S = \varphi(s) \text{ на } S,\ s \in S. \quad (3)$$

Функции u и f продолжаются нулем вне $\Omega + S$.

Найти Δu как обобщенную функцию непосредственно из условий задачи не удается, однако можно найти зна

чение функционала Δu на функциях $v \in E_1$, гладких и удовлетворяющих сопряженному граничному условию

$$\frac{\partial v}{\partial n} + bv\Big|_S = 0, \qquad (4)$$

$$(\Delta u, v) = (u, \Delta v) = (f, v) - \int_S \varphi v ds = (\rho, v), \qquad (5)$$

где $\rho = f(x) - \varphi(s)\,\delta_S$, δ_S — δ-функция на S. Последнее равенство можно записать в виде

$$\overset{E_1}{\Delta} u = \rho. \qquad (6)$$

Будем считать, что ρ — обобщенная функция порядка m, равная нулю вне $\Omega + S$; пространство таких функций обозначается через $Y_m(\Omega + S)$. Если $\rho \in Y_m$, то $E_1 = C^m$. Показывается, что если S — гладкая, то $Y_m(\Omega + S)$ изоморфно $C^m(\Omega + S)^*$.

Теорема. Если задача (2), (4) непрерывно разрешима из $C^k(\Omega + S)$ в $C^m(\Omega + S)$, то уравнение (6) разрешимо и притом однозначно из $Y_m(\Omega + S)$ в $Y_k(\Omega + S)$.

Пусть $W_p^m(\Omega + S)$ — функции с обобщенными производными порядка m, суммируемыми со степенью p, обращающиеся в нуль вне $\Omega + S$, $Z_{m,p}(\Omega + S)$ — пространство обобщенных функций, обращающихся в нуль вне $\Omega + S$ и являющихся непрерывными функционалами над $W_p^m(\Omega + S)$.

Теорема. При гладкой S между $Z_{m,p}(\Omega + S)$ и $W_p^m(\Omega + S)^*$ имеет место изоморфизм.

Если сопряженная однородная задача (2), (4) имеет единственное решение, непрерывное из $W_{p_1}^{(k)}$ в W_p^m, то уравнение (7) имеет единственное решение из $Z_{m,p}$ в Z_{k,p_1}.

Приведены примеры. Изложенные соображения очевидно обобщаются на другие задачи. А. Л. Крылов

7643. Частные операторы Дельсарта. Тиссен (Opérateurs de Delsarte particuliers. Thyssen M.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1957, 26, № 2, 87—96 (франц.)

Автор изучает операторы A_k, преобразующие $M_k(\lambda) \equiv D^2 + (2k+1)\lambda \operatorname{ctg} \lambda t D - \frac{(2k+1)^2\lambda^2}{4}$ в D^2, $D \equiv \frac{d}{dt}$, т. е. такие, что $A_k D^2 = M_k(\lambda) A_k$ (и операторы A_k обратного преобразования), k — произвольное комплексное число $\neq -1, -2, \ldots$; λ — действительное или чисто мнимое число. При помощи этих операторов преобразования смешанная задача для $\Lambda_x + M_k(\lambda)$, где Λ_x — дифференциальный оператор эллиптического типа, не зависящий от t, сводится к таковой для $\Lambda_x + D^2$, рассматривавшейся Лионом (РЖМат, 1957, 1414). Отмечается, что для действительных $k > -1/2$ и λ чисто мнимых операторы A_k и A_k содержатся в работе референта (РЖМат, 1956, 428); при $\lambda \to 0$ они обращаются соответственно в операторы Пуассона и Сонина, изучавшиеся Дельсартом (Acta Math., 1938, 69, 25)—317) и Б. М. Левитаном (Успехи матем. наук, 1949, 6, 102—143) при действительных $k > -1/2$ (соответственно $-1/2 < k < 1/2$) и продолженные Лионом (РЖМат, 1960, 5296) на все значения $k \neq -1, -2, \ldots$ М. Н. Олевский

7644. Об уравнениях с малым параметром при старших производных в линейных дифференциальных уравнениях с частными производными. Ладыженская О. А., Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 7, 104—120 (рез. англ.)

Рассматриваются линейные уравнения эллиптического и параболического типа с малым параметром при старших производных, а также линеаризированные уравнения гидродинамики вязкой жидкости. Для эллиптического уравнения второго порядка вида

$$L_\varepsilon u = \frac{\partial\left(a_{ij}(x, \varepsilon) u_{x_j}\right)}{\partial x_i} + a_i(x) u_{x_i} - a(x) u = f, \qquad (1)$$

где a_{ij} — такие, что $\beta(\varepsilon) \geqslant \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha(\varepsilon)$ при $\sum_{i=1}^n \xi_i^2 = 1$ и $\beta(\varepsilon) = o(\varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon) = o(\varepsilon)$, при некоторых других предположениях на коэффициенты этого уравнения, доказано, что решение u_ε задачи Дирихле в области D слабо сходится при $\varepsilon \to 0$ к некоторому решению уравнения первого порядка

$$a_i(x) u_{x_i} - a(x) u = f, \qquad (2)$$

в областях специального вида, высекаемых из D характеристиками уравнения (2).

Для доказательства этого факта устанавливается равномерная ограниченность u_ε в L_2, откуда следует слабая компактность u_ε. Из единственности предельной функции, которая затем устанавливается, следует слабая сходимость всей последовательности u_ε. (Аналогичным путем слабую сходимость u_ε в общем случае, т. е. без ограничений на поведение характеристик уравнения (2), доказал И. Копачек (РЖМат, 1960, 6507)). Приводится также другое доказательство сформулированной выше теоремы, использующее так называемый „пограничный слой“. Аналогичные теоремы устанавливаются для первой краевой задачи в случае параболического уравнения второго порядка и задачи Коши в случае некоторой параболической системы.

В добавлении приводится доказательство слабой сходимости решений u_ε первой краевой задачи для сильно эллиптической системы вида $L_\varepsilon u = \varepsilon L_{2m} u + L_{2n} u = f$ при $\varepsilon \to 0$ к решению первой краевой задачи сильно эллиптической системы $L_{2n} u = f$ при некоторых дополнительных предположениях относительно L_{2m} и L_{2n}. (Но более сильные результаты были ранее получены М. И. Вишиком и Л. А. Люстерником (РЖМат, 1958, 1204; 1959, 5841). Ими получена для решений u_ε сильно эллиптических систем с малым параметром при старших производных асимптотика любого порядка по ε, что и составляет основной интерес в этих задачах. Из асимптотического представления решения и его производных следует сходимость u_ε в любой метрике C^m).

Примечание референта. Утверждение автора о том, что в цитированных в статье работах Левинсона (Ann. Math., 1950, 51, № 2, 428—445), О. А. Олейник (Матем. сб., 1952, 31, вып. 73 (1), 104—118) и С. Л. Каменомостской (Матем. сб., 1952, 31, 73:3; РЖМат, 1956, 8821) существенно используется наличие в уравнениях только двух независимых переменных, является неверным. Методы, развитые в этих работах, применимы в случае любого числа независимых переменных, и полученные в них результаты легко обобщаются на этот случай. С. Л. Каменомостская

7645. О спектральных свойствах самосопряженных эллиптических операторов. Костюченко А. Г., Докл. АН СССР, 1957, 115, № 1, 34—37

На линейном многообразии D всех $2m$-кратно непрерывно дифференцируемых финитных n-мерных вектор-функций определяется формально симметрическая дифференциальная операция в частных производных

$$l=\sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=2m} A^{k_1k_2\ldots k_n}(x)\frac{\partial^{2m}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_m}}+T,$$

где x — точка n-мерного евклидова пространства R_n, $A^{k_1k_2\ldots k_n}(x)$ — матричный коэффициент, а T — линейная дифференциальная операция порядка $<2m$.

Предполагается, что элементы $a_{ij}^{k_1k_2\ldots k_n}(x)$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$ матриц $A^{k_1k_2\ldots k_n}(x)$ имеют $2m$ непрерывных производных, ограниченных во всем пространстве R_n, а коэффициенты при младших производных имеют производные первого порядка и ограничены в R_n вместе с этими производными. Кроме этого, старшие коэффициенты подчинены еще некоторым условиям, обеспечивающим сильную эллиптичность операции l.

Пусть L есть замыкание в $L_2(R_n)$ оператора, порождаемого операцией l на D. В предположении полуограниченности снизу оператора L приводятся следующие утверждения.

Теорема 1. Существует такое вещественное число λ_0, что для ядра резольвенты $K(x, y; \lambda_0)$ выполняется неравенство $\int_{-\infty}^{\infty}|K^2(x, y; \lambda_0)|\,dy<C$, где константа C от x не зависит.

Теорема 2. Оператор L имеет индекс дефекта $(0, 0)$.

Теорема 3. Если E_λ — разложение единицы оператора L, $g^{(\alpha)}(x)$ — порождающие векторы и $\sigma_\alpha(\lambda)=(E_\lambda g^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})$ — спектральные меры, то почти все по мере $\sigma_\alpha(\lambda)$ собственные функции $dE_\lambda g^{(\alpha)}/d\sigma_\alpha$ ограничены по x. По совокупности переменных x, y для почти всех λ по спектральной мере будет также ограничено спектральное ядро.

Примечание референта. При доказательстве теоремы 3 автор ссылается на свою заметку (РЖМат, 1958, 2047). Однако поскольку в этой заметке при доказательстве сильной ограниченности вариации функционалов $E_\lambda g^{(\alpha)}(x)$ в L_1 вместо

$$\sum \operatorname*{vrai\,max}_{(x)}|E_{\Delta l}g^{(\alpha)}(x)|$$

ошибочно оценивается $\sum|E_{\Delta_l}g^{(\alpha)}(x)|$, то теорему 3 нельзя считать установленной. Вопрос о справедливости тесремы 3 остается открытым даже для простейшей одномерной дифференциальной операции второго порядка. Утверждение автора о том, что теорема 2 является усилением соответствующих теорем М. А. Наймарка и И. М. Рапопорта, не следует понимать в том смысле, что из тесремы 2 вытекают соответствующие теоремы указанных авторов.

И. М. Глазман

7646. Решение нелинейных эллиптических уравнений. Ниче (Solutions of non-linear elliptic equations. Nitsche J. C. C.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 62 (англ.)

Изучается поведение решений эллиптических дифференциальных уравнений с точки зрения ограничений, которые обусловливаются нелинейностью. Приводятся рассуждения, касающиеся ограничения некоторых классов уравнений, как, например, $\Delta u=f(u)$, $\delta\iint F(p, q)\,dxdy=0$, $\Phi(r+t, rt-s^2)=0$, и частные свойства их решений, например типы особенностей, поведение роста, оценки априори; приводятся также „меры" нелинейности.

7647. Задача о граничных и средних значениях дифференциального уравнения Пуассона. Эйккер (Über eine Rand- und Mittelwertaufgabe der Poissonschen Differentialgleichung. Eicker Friedhelm), Z. angew. Math. und Mech., 1959, 39, № 7-8, 279—284 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Пусть T — односвязная цилиндрическая область с произвольными основаниями, расположенными на двух параллельных плоскостях, перпендикулярных образующей. Пусть ось z параллельна образующей и T ограничена плоскостями $z=0$ и $z=z_0$. Требуется найти решение уравнения Пуассона $\Delta\omega=f(x, y, z)$ при заданной функции $f(x, y, z)$ при условиях: а) среднее значение для $\omega(x, y, z)$ на любом поперечном сечении должно равняться нулю $\bar{\omega}=\iint_D\omega(x, y, z)\,dxdy=0$ для $0\leqslant z\leqslant z_0$; б) функция ω должна на боковой поверхности M цилиндра T зависеть лишь от z и обращаться в нуль на основаниях цилиндра $\omega|_M=g(z)$, $g(0)=g(z_0)=0$. Функция $g(z)$ не является заданной, а должна быть получена из решения. Доказывается, что для существования и единственности решения поставленной задачи достаточно, чтобы $f(x, y, z)$ была непрерывна по совокупности переменных и дифференцируемой по z до второго порядка включительно. Для более общих областей доказывается, что эта задача эквивалентна некоторому интегральному уравнению первого рода.

А. А. Вашарин

7648. Бинарные линейные эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными. Хартман, Винтнер (Binary, linear, elliptic, partial differential equations. Hartman Philip, Wintner Aurel), Duke Math. J., 1955, 22, № 4, 515—524

Хорошо известно, что дифференциальное уравнение

$$(A\varphi_x+B_1\varphi_y)_x+(B_2\varphi_x+C\varphi_y)_y+E\varphi=0, \qquad (1)$$

в котором коэффициенты функции класса C^1 и форма

$$A\xi^2+(B_1+B_2)\xi\eta+C\eta^2$$

положительно определенная, с помощью преобразования $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$ класса C^2 с положительным якобианом может быть приведено к форме

$$(\varphi_u/g+\gamma\varphi_v)_u+(-\gamma\varphi_u+\varphi_v/g)_v+E\Gamma\varphi/g=0, \qquad (2)$$

где g, γ и Γ — функции класса C^1, причем $g=g(u, v)>0$. Уравнение (2), в свою очередь, с помощью подстановки $\varphi=\lambda\psi$, где $\lambda=\lambda(u, v)\in C^2$, может быть сведено к форме

$$\psi_{uu}+\psi_{vv}+Hg\psi=0. \qquad (3)$$

В первой части авторы показывают, что если уравнения (1), (2), (3) заменить соответствующими интегральными тождествами (например, уравнение (1) записать в форме

$$\int_J\{(B_2\varphi_x+C\varphi_y)\,dx-(A\varphi_x+B_1\varphi_y)\,dy\}=\iint_T E\varphi\,dxdy,$$

где T — произвольная область с достаточно гладкой границей J), то те же результаты получаются, если во всех случаях требуемую гладкость снизить на единицу. Во второй части работы рассматриваются уравнение

$$(\varphi_u/g)_u+(\varphi_v/g)_v=0 \qquad (4)$$

и равносильная ему система

$$\psi_u=\varphi_v/g,\ \psi_v=-\varphi_u/g. \qquad (5)$$

На примерах показывается, что существует функция $g\in C^1$ такая, что уравнение (4) не имеет в классе C^2 нетривиальных решений и что существует непрерывная функция g такая, что система (5) не имеет в классе C^1 нетривиальных решений.

Л. Н. Слободецкий

7649. О решениях задачи Неймана уравнения $\Delta_2u+ku=f$ в области с углами. Альбертони (Sulla

risoluzione del problema di Neumann per l'equazione $\Delta_2 u + ku = f$ in un dominio con punti angolosi. Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat., 1956, **90**, 221—243) (итал.)

Пусть D состоит из конечного числа ограниченных плоских областей, граница которых составляет кривую Γ с непрерывной кривизной. Предположим, что функция f удовлетворяет условию Гёльдера в D и что функция B интегрируема и непрерывна почти всюду на Γ. Автором в предыдущей работе (РЖМат, 1959, 9107) для решения этого уравнения в области D была применена теория Фредгольма, где λ обозначало комплексный параметр и нормальная производная от u на Γ предполагалась совпадающей с значениями B. В этой работе задача Нёймана решается вдоль некоторых линий для связной области, но граница ее может состоять из конечного числа гладких дуг, имеющих непрерывную кривизну. Граничная кривая не может иметь особенностей типа острия. F. G. Dressel

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 7, 570.

7650. Обобщение одной интерполяционной задачи, связанной с ядерными функциями. Адлер (Généralisation d'un problème de l'interpolation en connexion avec les fonctions-noyau. Adler György), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1957, **2**, № 1-2, 145—152 (франц.; рез. венг., русск.)

Автор дает обобщение интерполяционной задачи, фигурирующей в упомянутой в списке литературы книге. Эта задача состоит в следующем: ищется такая функция $u \in \Sigma$, где Σ обозначает класс функций, удовлетворяющих уравнению $\Delta u(x, y) = q(x, y)\, u(x, y)$ ($q(x, y) > 0$), которая обладает наименьшей нормой

$$\sqrt{E\{u\}} = \sqrt{E\{u, u\}} = \sqrt{\iint\limits_D [u_x^2 + u_y^2 + qu^2]\, dxdy}$$

и в каждой точке Q_i ($i = 1, 2, \ldots N$) области D удовлетворяет α_i условиям:

$$\frac{\partial^{r_{ij}+s_{ij}} u(Q_i)}{\partial x^{r_{ij}} \partial y^{s_{ij}}} = a_{ij}$$

($i = 1, 2, \ldots, N$; $j = 1, 2, \ldots, \alpha_i$; r_{ij}; $s_{ij} \geqslant 0$ — целые). (1)

Решение задачи с ядром $K(P, Q) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(P)\, \varphi_\nu(Q)$ может быть выражено в виде

$$u(P) = \sum_{i,j} x_{ij} \frac{\partial^{r_{ij}+s_{ij}}}{\partial x_Q^{r_{ij}} \partial y_Q^{s_{ij}}} K(P, Q),$$

где неизвестные x_{ij} могут быть определены из системы уравнений (1).

Автор показывает наводящий метод, с помощью которого решение может быть получено, после чего доказывает, что таким образом полученная функция действительно является решением уравнения. Резюме автора

7651. Об алгорифме Шварца в теории дифференциальных уравнений математической физики. Бабушка Иво, Чехосл. матем. ж., 1958, **8**, № 3, 328—343 (рез. нем.)

Доказывается теорема 1: Пусть H_1, H_2 — подпространства гильбертова пространства H; P_1, P_2, P_0 — проекторы на H_1, H_2, $H_0 = H_1 \cap H_2$ соответственно. Тогда при $n \to \infty$ $(P_2 P_1)^n \to P_0$ сильно. Показывается, что сходимость алгорифмов типа Шварца для эллиптических краевых задач в случаях суммы и пересечения областей легко следует из теоремы 1. Теорема 1 позволяет также установить сходимость некоторых „альтернирующих" алгорифмов, сводящих решение заданной эллиптической граничной задачи к последовательному решению ряда более простых граничных задач в той же области. Приведено исследование двух алгорифмов указанного вида. М. Ш. Бирман

7652. Новые выражения ядра Грина для операторов метагармонического, волнового и диффузии. Буажло, Гарнир (Nouvelles expressions des noyaux de Green relatifs aux opérateurs métaharmonique, des ondes et de la diffusion. Boigelot A., Garnir H. G.), Ricerche mat., 1958, **7**, № 2, 186—204 (франц.)

Пусть u — обобщенное решение уравнения $(-\Delta + z) \times u = f$ в области Ω, Ω_ε — множество точек из Ω, удаленных от границы Ω не менее чем на ε, $\varepsilon > 0$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_s^2}$,

$$\alpha_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \geqslant \varepsilon, \\ 1 & \text{при } x \leqslant \varepsilon/2, \end{cases} \qquad \alpha(x) \in C^\infty;$$

тогда при $x = (x_1, x_2, \ldots, x_s) \in \Omega_\varepsilon$

$$u = u * \Delta^k [(1 - \alpha_\varepsilon)\, e_k] + z^k u * [\alpha_\varepsilon\, e_k] - \sum_{j=0}^{k-1} z^j f * \Delta^{k-j-1} [\alpha_\varepsilon\, e],$$

где e_k — основное фундаментальное решение бигармонического уравнения $\Delta^k v = 0$.

Пусть теперь $G_z f$ — оператор, обратный оператору $-\Delta + z$, который рассматривается на функциях, удовлетворяющих на границе области однородным краевым условиям. Как известно, G_z является интегральным оператором. Для его ядра $K(x_0, x, z)$ в работе получено представление:

$$K(x_0, x, z) = G_z [\Delta^k (1 - \alpha_\varepsilon)\, e_k(x_0 - w) + z^k \alpha_\varepsilon\, e_k(x_0 - w)] - \sum_{j=0}^{k-1} z^j \Delta^{k-j-1} \alpha_\varepsilon\, e_k(x_0 - x).$$

Оператор G предполагается здесь действующим на $[\cdots]$ как на функцию $w = (w_1, \ldots, w_s)$ и переводящим ее в функцию $x = (x_1, \ldots, x_s)$, число k здесь целое и столь большое, что $e_k \in L_2(\Omega)$, точка x_0 удалена от границы не менее чем на ε.

Если для уравнения $\left(-\Delta + a \frac{\partial^2}{\partial t^2} + b \frac{\partial}{\partial t} + c\right) h = 0$ решать смешанную задачу с начальными данными: $h|_{t=0} = 0$; $h_t|_{t=0} = \delta(x - x_0)$ и с нулевыми краевыми условиями, то при $t > 0$ можно считать h обобщенной функцией t, зависящей от x и x_0 как от параметров.

Для $K(x, x_0, \varphi) = (h, \varphi)$ ($\varphi(t) \in C^\infty$ и финитна), выведено новое представление через оператор G_φ, введенный ранее (РЖМат, 1959, 8063 К). Аналогично можно рассмотреть и случай $a = 0$, $b > 0$ (уравнение диффузии). В. М. Бабич

7653. Асимптотические разложения для граничной задачи, содержащей параметр. Мак-Ками (Asymptotic developments for a boundary value problem containing a parameter. MacCamy Richard C.), Quart. Appl. Math., 1959, **17**, № 2, 155—163 (англ.)

Рассматриваются две задачи о построении гармонической функции $u(x, y)$ ($y < 0$) по условиям

$$u_y(x, 0) = 0 \quad (|x| > 1), \quad u_y(x, 0) + Ku(x, 0) = g(x) \quad (|x| < 1),$$

$$u(x, y) = c \ln(x^2 + y^2) + O(x^2 + y^2)^{-1} \quad (x^2 + y^2 \to \infty), \quad c = \text{const}$$

или

$$u_y(x, 0) - Ku(x, 0) = 0 \quad (|x| > 1), \quad u_y(x, 0) = g(x) \quad (|x| < 1),$$

$u(x, y) = c_{\pm} \cdot e^{Ky} \cdot e^{iKx} + O(x^{-1})$ $(x \to \pm\infty$, y — ограничен, c_+, $c_- = \text{const})$.

Вопрос о единственности решения не рассматривается. Решение первой задачи ищется в виде потенциала простого слоя и оказывается аналитическим по K при малых $|K|$. Решение второй задачи, более сложной, ищется с помощью функции Грина и имеет асимптотическое разложение

$$Ku \sim \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}(x, y) K^m (K \ln K)^n, \quad A_{00} \equiv 0,$$
$$0 < |K| < K_0.$$

В физически важном частном случае $g(x) = -\cos Kx$ это разложение сходится, причем указан рекуррентный метод для подсчета коэффициентов.

Примечание референта: Парадоксы, о которых говорит автор, основаны на недостаточном уточнении условий на бесконечности при постановке задачи. А. Д. Мышкис

7654. Об ограниченных решениях дифференциального уравнения $\Delta u = f(x, y, u, p, q)$. Хирасава (On the bounded solutions of the partial differential equation $\Delta u = f(x, y, u, p, q)$. Hirasawa Yoshikazu), Comment. math. Univ. St. Pauli, 1959, 7, № 1, 13—19 (англ.)

Предположения: D — ограниченная плоская область; функция $f(x, y, u, p, q)$ непрерывна на множестве $\{x, y \in D;\ |u|,\ |p|,\ |q| < \infty\}$ и ограничена на множествах $\{x, y \in D;\ |u| \leqslant M;\ |p|,\ |q| < \infty\}$. Доказывается, что на решения уравнения, указанного в заглавии, распространяются некоторые свойства гармонических функций и решений уравнения Пуассона: достижение граничных значений в регулярных точках границы; теоремы о сравнении решений, соответствующих разным правым частям и граничным условиям. М. З. Соломяк

7655. Сингулярные интегралы в теории потенциала. Миранда (Gli integrali principali nella teoria del potenziale. Miranda Carlo), Rend. Seminar. mat. e fis. Milano, 1952—1953 (1954), **24**, 107—122 (итал.; рез. англ.)

Даны основы теории сингулярных интегральных уравнений и их приложений к теории потенциала. С помощью функции Леви строятся для уравнения второго порядка эллиптического типа потенциалы для области — типа ньютонова потенциала и для границы области — типа потенциала простого слоя. Построенные потенциалы позволяют изучать краевые задачи, типа задачи с косой производной, путем сведения их к сингулярным интегральным уравнениям. Дан обзор работ итальянских и французских математиков в этом направлении. В конце работы рассмотрены различные типы сингулярных уравнений и их свойства. В. С. Виноградов

7656. Обоснование альтернирующего метода с помощью ортогональных проекций. Моргенштерн (Begründung des alternierenden Verfahrens durch Orthogonalprojektion. Morgenstern Dietrich), Z. angew. Math. und Mech., 1956, **36**, № 7-8, 255—256 (нем.)

7657. О сингулярностях решений дифференциальных уравнений в частных производных с тремя переменными. Крейсиг (On singularities of solutions of partial differential equations in three variables. Kreyszig Erwin), Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1958, **2**, № 2, 151— 159 (англ.)

Работа посвящена изучению решений эллиптического уравнения от трех действительных переменных

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + a(x_2, x_3)\, v = 0.$$

Если ввести переменные $X = x_1$, $2Z = x_3 + i x_2$, $-2Z^* = x_3 - i x_2$, то функция $w(X, Z, Z^*) \equiv v(x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяет уравнению

$$w_{zz} - w_{zz^*} + F(Z, Z^*)\, w = 0, \quad F(Z, Z^*) \equiv a(x_2, x_3),$$
$$\frac{\partial}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial x_3} - i \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial Z^*} = -\frac{\partial}{\partial x_3} - i \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Делаются следующие предположения: функция $F(Z, Z^*)$ есть целая функция, имеющая разложение

$$F(Z, Z^*) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} c_{mp} Z^m Z^{*p};$$

исследуемые решения допускают разложения вида

$$w(x, z, z^*) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} k_{nmp} X^n Z^m Z^{*p}.$$

Пусть

$$c_p(Z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{mp} Z^m, \quad a_p(X, Z) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{\infty} k_{nmp} X^n Z^m,$$
$$p = 0, 1, \ldots$$

Бергман (реф. 7658 изучал области регулярности, природу и расположение особенностей решений w, исходя из свойств функции $a_0(X, Z)$; используя эти результаты, автор изучает эти же вопросы, исходя из свойств функции $a_r(X, Z)$ при любом конечном фиксированном r. Основные результаты содержатся в следующих теоремах: 1. Если w регулярна по Z в односвязной области D, содержащей точку $Z = 0$, то функции $a_p(X, Z)$, $p = 1, 2, \ldots$, регулярны для всех значений $Z \in D$, $|X| < \infty$. 2. Пусть $a_r(X, Z)$ регулярна по Z в односвязной области D, содержащей точку $Z = 0$, но не содержащей нулей функций $c_j(Z)$, $j = 0, 1, \ldots, r-1$. Тогда w регулярна в $D \times (|X| < \infty)$.

3. Пусть $k_{nmp} = \overline{k}_{npm}$, $n = 0, 1, \ldots, N$ и пусть

$$\limsup |k_{nmr}|^{1/m} = \rho = \text{const}, \quad n = 0, 1, \ldots, N.$$

Если $c_j(Z) \not\equiv 0$ для всех Z, $|Z| \leqslant \rho$ и $j = 0, 1, \ldots, r-1$, то для того чтобы w имела особенность в точке $Z = Z_n = \rho e^{i\alpha_n}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\limsup \left(\left| \sum_{\sigma=0}^{s} \binom{s}{\sigma} k_{n\sigma,r} Z_n^{\sigma} \right| \right)^{1/s} = 2.$$

Получены также некоторые результаты и в том случае, когда функция F имеет особые точки. Библ. 12 назв. И. И. Данилюк

7658. Об особенностях решений некоторых дифференциальных уравнений от трех переменных. Бергман (On singularities of solutions of certain differential equations in three variables. Bergman Stefan), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, **85**, № 2, 462—488 (англ.)

Свойства решений некоторых дифференциальных уравнений от трех переменных. Бергман (Properties of solutions of certain differential equations in three variables. Bergman Stefan), J. Math. and Mech., 1958, **7**, № 1, 87—101) (англ.)

Автор продолжает свои ранние, хорошо известные исследования, касающиеся вопросов построения формул, дающих общее представление решений плоских дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа с аналитическими коэффициентами и их применения для установления отдельных свойств решений этих уравнений. В частности, в реферируемых работах аналогичный вопрос рассматривается относительно пространственных уравнений вида

$$\frac{\partial^s \psi}{\partial x^s} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + F(y, z)\, \psi = 0 \quad (s = 1, 2),$$

где $F(x, y)$ — заданная целая функция относительно переменных y, z, $\psi = \psi(x, y, z)$ — искомое регулярное решение, а s ($s = 1, 2$) фиксированно. Причем в первой из подлежащих реферированию работ, в основном, рассматривается случай $s = 1$, а во втором $s = 2$.

М. Б. Гагуа

7659. Свойства решений некоторой системы дифференциальных уравнений в частных производных. Бергман, Шиффер (Properties of solutions of a system of partial differential equations. Bergman Stefan, Schiffer M. M.), Studies Math. and Mech. New York, Acad. Press, Inc., 1954, 79—87 (англ.)

Выводятся формулы с указанием некоторых их применений, представляющие собой общее решение переопределенной системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial z^*} = F(z, z^*)\psi, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial w\partial w^*} = G(w, w^*)\psi, \qquad (1)$$

где z, z^*, w и w^* — комплексные переменные, меняющиеся соответственно в областях D_z, D_{z^*}, D_w и D_{w^*}, содержащих начало координат, $F(z, z^*)$ и $G(w, w^*)$ — заданные регулярные аналитические функции в областях $D_z \times D_{z^*}$ и $D_w \times D_{w^*}$ соответственно, а $\psi = \psi(z, z^*, w, w^*)$ — искомое в области $D_z \times D_{z^*} \times D_w \times D_{w^*}$ регулярное решение рассматриваемой системы (1). В частности, методом последовательных приближений доказывается, что всякая функция ψ_0, удовлетворяющая системе уравнений

$$\frac{\partial^2\psi_0}{\partial z\partial z^*} = 0; \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial w\partial w^*} = 0,$$

порождает решение системы (1) с помощью функционального ряда,

$$\psi(z, z^*, w, w^*) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_\nu(z, z^*, w, w^*),$$

где ψ_ν определяется из следующих рекуррентных соотношений

$$\psi_\nu(z, z^*, w, w^*) =$$

$$= \int_0^z \int_0^{z^*} F(\zeta, \zeta^*)\psi_{\nu-1}(\zeta, \zeta^*, w, w^*)\, d\zeta d\zeta^* + \chi_\nu(z, z^*, w, w^*),$$

$$\chi_\nu(z, z^* w, w^*) = \int_0^w \int_0^{w^*} G(\omega, \omega^*)\chi_{\nu-1}(z, z^*, \omega, \omega^*)\, d\omega d\omega^*,$$

$$\chi_0(z, z^*, w, w^*) = \psi_0(z, z^*, w, w^*).$$

М. Б. Гагуа

7660. Новые методы для решения граничных задач. Бергман (New methods for solving boundary value problems. Bergman Stefan), Z. angew. Math. und Mech., 1956, **36**, № 5-6, 182—191 (англ.; рез. нем., франц., русск.)

Излагается метод, при помощи которого можно построить решения линейного дифференциального уравнения в частных производных в случае двух независимых переменных, исходя из аналитической функции одной комплексной переменной. Метод обобщает операцию „определения вещественной части". Аналогичный метод позволяет получить решения некоторых дифференциальных уравнений в случае трех независимых переменных, исходя из систем аналитических функций двух комплексных переменных. Указываются применения теории в механике сжимаемой жидкости, а также к краевым задачам и в проблеме собственных значений.

По резюме автора

Примечание референта. Аналогичный метод систематически развивается также в монографиях И. Н. Векуа: „Новые методы решения эллиптических уравнений" (М.—Л., 1948), „Обобщенные аналитические функции" (М.—Л., 1949). М. Б. Гагуа

7661. Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных. Слободецкий Л. Н., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, **197**, 54—112

В работе для любых вещественных и неотрицательных чисел $l_1, \ldots, l_r$ вводятся функциональные пространства $W^{(l_1,\ldots,l_r)}_{x^{(1)},\ldots,x^{(r)},2}(Q)$, где гиперцилиндрическая область n-мерного пространства $E_n Q = \Omega^{(1)} \times \ldots \times \Omega^{(2)}$, $\Omega^{(k)}$ — конечная или бесконечная область $E^{(k)}$ — n_k-мерного пространства точек $x^{(k)} = x_1^{(k)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)}$. $\sum_{k=1}^{r} n_k = n$. Введенные пространства при $l_1 = \ldots l_r = l$ и целом l совпадают с пространствами С. Л. Соболева $W_2^{(l)}(Q)$, при $l = 0$ с $L_2(Q)$. Для этих пространств устанавливаются теоремы продолжения и вложения, формулируемые в точности так же, как соответствующие теоремы С. М. Никольского для пространств $H_2^{(r_1,\ldots,r_n)}$. Изучены свойства пространств $W^{(l_1,\ldots,l_r)}_{x^{(1)},\ldots,x^{(r)},2}(Q)$: полнота, продолжаемость функций за пределы, сравнение $W^{(l_1,\ldots,l_r)}_{x^{(1)},\ldots,x^{(r)},2}$ с $H_2^{(r_1,\ldots,r_n)}$, плотность множества финитных функций и др. Пространства $W^{(l_1,\ldots,l_r)}_{x^{(1)},\ldots,x^{(r)},2}$ рассматриваются также на дифференцируемых многообразиях. Основные результаты получены с помощью преобразования Фурье и равенства Парсеваля. В качестве приложений выводятся необходимые и достаточные условия разрешимости различных задач математической физики для эллиптических и параболических уравнений, для полигармонического уравнения. Теоремы вложения являются дальнейшим усилением соответствующих теорем С. Л. Соболева. Отдельные частные результаты работы были известны ранее. О. В. Бесов

7662. Замечание к статье Оуэнса. Пейн, Уэйнбергер (Remark on a paper of O. G. Owens. Payne L. E., Weinberger H. F.), Duke Math. J., 1957, **24**, № 2, 233 (англ.)

См. РЖМат, 1957, 7071.

7663. Смешанная задача для линейного гиперболического уравнения второго порядка, вырождающегося на начальной плоскости. Барановский Ф. Т., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, **183**, 23—58

Рассмотрен вопрос о корректности смешанной задачи:

$$\varphi(t)u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + b_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + cu + f;$$

a_{ij}, b_i, c, f — функции $x_1, x_2, \ldots, x_m, t$; $a_{ij} = a_{ji}$;

$u|_S = 0$; $u|_{t=0} = \varphi(x_1, \ldots x_m)$; $u_t|_{t=0} = \psi(x_1, \ldots, x_m)$.

Удовлетворение уравнению, краевым и начальным условиям понимается в обобщенном смысле. При некоторых ограничениях типа гладкости на коэффициенты уравнения, свободный член и начальные данные, доказывается корректность сформулированной смешанной задачи, если при $t \to 0$ $\varphi(t)$ ведет себя как t^α ($0 \leqslant \alpha \leqslant 1$). Доказательство корректности основано на оценках энергетического типа.

В. М. Бабич

7664. Об одной краевой задаче с заданием на всей границе для гиперболической системы, эквивалентной уравнению колебания струны. Вахания Н. Н., Докл. АН СССР, 1957, **116**, № 6, 906—909

Рассматривается задача: в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant X$, $0 \leqslant t \leqslant T$ с границей Γ найти решение системы

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial x} \tag{1}$$

с граничным условием

$$au_1 + bu_2 \mid_\Gamma = f. \tag{2}$$

Положим $\rho = T/X$. С. Л. Соболевым (РЖМат, 1960, 5294, 1956, 109, № 4) исследован случай $\rho = 1$. В первой части автор рассматривает случай любого рационального ρ, следуя методу С. Л. Соболева. При рассмотрении иррациональных ρ предполагается, что $a^2 - b^2 \neq 0$ на Γ. Для любого иррационального ρ доказано, что решение однородной задачи ($f \equiv 0$) равно нулю, если $u_2 = 0$ в какой-нибудь одной точке Γ. Теорема существования дважды непрерывного решения неоднородной задачи доказана в предположении, что $\left| \rho - m/n \right| \geqslant \frac{A}{n^{k+1}}$ для любых целых m и n и некоторых положительных постоянных A и k. Кроме того, предполагается достаточная гладкость функций f и $\ln(a+b)$ в зависимости от числа k. Для доказательства автор использует прием сведения задачи (1), (2) к двум задачам Дирихле для уравнения струны.

Б. В. Боярский

7665. Элементарные решения задач с начальными и краевыми условиями для гиперболических дифференциальных уравнений. Штеттер (Elementarlösungen bei Anfangswert-Randwert-Problemen hyperbolischer Differentialgleichungen. Stetter H. J.), Arch. Math., 1958, 9, № 6, 416—420 (нем.)

Работа посвящена построению „элементарного решения" для уравнения $L(\varphi) = \varphi_{xx} - \varphi_{yy} + a\varphi_x + b\varphi_y + c\varphi = 0$ ($a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$, $c = c(x, y)$), соответствующего следующей задаче: $\varphi = 0$ при $y - y_0 = x - x_0$, $x \geqslant x_0$, $R(\varphi) = A\varphi_x + B\varphi_y + C\varphi = F$ при $y = k(x)$, $\left|\frac{dk}{dx}\right| < 1$; $A \neq B$; $x \geqslant x_0$. Элементарное решение определяется как функция, удовлетворяющая этим условиям при $F(x) = \delta(x - \xi)$. Показано, как решение поставленной здесь задачи с любой $F(x)$ выражается интегралом от произведения $F(x)$ на элементарное решение.

В конце работы приведен пример специальной краевой задачи описанного типа, когда этот интеграл сводится к интегралу типа свертки.

В. М. Бабич

7666. Смешанные краевые задачи для вырождающихся гиперболических уравнений. Краснов М. Л., Тр. Моск. энерг. ин-та, 1956, вып. 28, 25—45

Рассматривается дифференциальное уравнение в частных производных гиперболического типа вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,\,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \sum_{i=1}^{m} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + e(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + d(x,t)\,u = h(x,t), \tag{1}$$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ в цилиндре $Q = D \times (0 < t < l)$, где D — ограниченная область в E^m с границей Γ, вырождающееся на гиперплоскости $t = 0$ или на части $B_0 = \Gamma_0 \times (0 < t < l)$ боковой поверхности $B = \Gamma \times (0 < t < l)$ цилиндра Q. При различных ограничениях на коэффициенты и правую часть уравнения (1) устанавливаются существование и единственность обобщенного решения смешанной задачи для уравнения (1) в Q при начальных условиях: $u|_{t=0} = \partial u/\partial t|_{t=0} = 0$ и краевом условии: $A : u|_B = 0$ или $B : u|_{B_1} = 0$, где $B_1 = B \setminus B_0$. Например, в случае, когда $\sum_{i,\,k=1}^{m} a_{i,k}(x,t)\,\xi_i\xi_k > 0$ в Q при $\sum_{i=1}^{m} \xi_i^2 = 1$ и $\sum_{i,\,k=1}^{m} a_{i,k}(x,t)\,\xi_i\xi_k \geqslant 0$ в точках B_0 (причем ранг матрицы $\| a_{i,k} \| < m - 1$ и в точках D $x_m \geqslant 0$), при дополнительных условиях:

а) $0 < x_m^\alpha\,\xi_m^2 < C_1^2 \sum_{i,\,k=1}^{m} a_{i,k}(x,t)\,\xi_i\xi_k$ равномерно по t;

б) $c^2 x_m^\alpha < a_{mm}(x,t) < C^2 x_m^\alpha$ равномерно по t;

в) $\sum_{i=1}^{m} b_i^2(x,t)\,\xi_i^2 < C_2^2 \sum_{i,\,k=1}^{m} a_{i,k}(x,t)\,\xi_i\xi_k$;

вводится множество $\mathring{\Omega}$ непрерывных в Q функций $u(x,t)$, имеющих ограниченные кусочно-непрерывные производные $\partial^2 u/\partial t^2$, $\partial^2 u/\partial t \partial x_i$ и исчезающих в некоторой граничной полоске Q, исключая верхнее основание. $\dot{\Omega}$ — замыкание $\mathring{\Omega}$ в метрике, определяемой скалярным произведением:

$$\{u, v\} = \iint_Q \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \sum_{i,\,k=1}^{m} a_{i,k}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial t}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial t}\right) dx\,dt.$$

Обобщенным решением смешанной задачи (с краевым условием: A при $0 < \alpha < 1$ и B при $\alpha \geqslant 1$) в этом случае считается функция $u(x,t) \in \dot{\Omega}$, удовлетворяющая интегральному тождеству:

$$\iint_Q \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v + \sum_{i,\,k=1}^{m} a_{i,k}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + e\frac{\partial u}{\partial t} v + duv - hv\right] dx\,dt = 0$$

для любой $v(x,t)$, исчезающей на B_1, и для которой вблизи B_0: $\iint_Q \left[v^2 + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2\right] dx\,dt < +\infty$.

Теорема 3. Пусть $a_{i,k}$; b_i; e; d; $\partial b_i/\partial t$; $\partial e/\partial t$; $\partial d/\partial t$, непрерывны в $\bar{Q}$, $\partial^3 a_{ik}/\partial t^3$ ограничены в $\bar{Q}$; $h(x,t)$, $\partial h/\partial t \in L_2(Q)$.

Если выполнены условия а), б), в) и

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial b_i}{\partial t}\right)^2 \xi_i^2 < C_3^2 \sum_{i,\,k=1}^{m} a_{ik}\xi_i\xi_k \quad (C_1, C_2, C_3 = \text{const}),$$

то обобщенное решение смешанной задачи существует и единственно в классе $\dot{\Omega}$. Доказательство единственности проводится обычным способом энергетических оценок, существование доказывается применением аналога метода Галеркина (реф. 7631).

Подробнее исследуются смешанные задачи для частных случаев уравнения (1) при $m = 1$, уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу и уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(t^\alpha \frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + b\frac{\partial u}{\partial t} + e(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + d(x,t)\,u = h(x,t)$$

$(0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant t \leqslant l;\ b = \text{const};\ a = \text{const} > 0)$, для которого начальные условия имеют вид:

$$u|_{t=0} = \lim_{t \to 0} t^{\alpha/2}\, \partial u/\partial t = 0.$$

Аналогичным образом устанавливается существование и единственность решения смешанной задачи в прямоугольнике $Q[-1 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant l]$ для уравнения:

$$\varphi(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + e(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + d(x,t)\,u = h(x,t)$$

„параболически-гиперболического типа", где $\varphi(x) = 0$ при $-1 \leqslant x \leqslant 0$; $\varphi(x) \doteq x^{\alpha}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, с некоторыми дополнительными ограничениями на коэффициенты. Здесь краевые условия: $u(-1, t) = u(1, t) = 0$, начальные условия: $u|_{t=0} = 0$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$; $\partial u/\partial t|_{t=0} = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$ и производная $\partial u/\partial x$ „склеивается" на оси $x = 0$ в некотором интегральном смысле. И. Л. Кароль

7667. О задаче Дирихле для волнового уравнения. Денчев Р., Докл. АН СССР, 1959, 127, № 3, 501—504

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y,z) \qquad (1)$$

внутри ограниченной области Ω трехмерного пространства, ограниченной замкнутой поверхностью S. Ищется обобщенное решение уравнения (1), удовлетворяющее на границе условию

$$u|S = 0. \qquad (2)$$

Рассматривается оператор $L = \Delta^{-1}\frac{\partial^2}{\partial z^2}$, где Δ — трехмерный оператор Лапласа. Предполагается, что собственные функции оператора L, удовлетворяющие условию (2), образуют в $W_2^{(1)}(\Omega)$ вместе с константой полную ортонормированную систему функций. Пусть $\lambda_k\ (k = 1, 2, \ldots)$ — собственные числа оператора L.

Теорема 1. Для единственности решения уравнения (1) при условии (2) в классе $W_2^{(1)}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lambda_k \neq \frac{1}{2}\ (k = 1, 2, \ldots).$$

Пусть $f \in W_2^{(1)}$, $F(x,y,z) = \int_0^z (z-t) f(x,y,t)\,dt$ и F_k — коэффициенты Фурье ряда по собственным функциям оператора L для функции F.

Теорема 2. Если ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} F_k^2 / \left(2 - \frac{1}{\lambda_k}\right)^2$ сходится, то уравнение (1) имеет решение в $W_2^{(1)}$, удовлетворяющее условию (2). Рассматриваются частные виды областей, для которых верны обе теоремы. А. И. Кошелев

7668. О смешанной задаче для одного гиперболического уравнения с малым параметром. Зламал Милош (Zlámal Milos), Чехосл. мат. ж., 1959, 9, № 2, 218—242 (рез. нем.)

Изучается поведение при $\varepsilon \to +0$ решений смешанной задачи для уравнения

$$\varepsilon\alpha(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta(t)\frac{\partial u}{\partial t} - a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t), \qquad (1)$$

где $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$, $a(x) > 0$. Рассмотрим уравнение 1) в прямоугольнике $R\{0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ при условиях:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0;\quad u(x,0) = f(x); \qquad (2)$$

$$u_t(x,0) = g(x). \qquad (3)$$

Будем обозначать через $u(x,t)$ решение задачи (1), (2), (3), а через $U(x,t)$ — решение уравнения

$$\beta(t)\frac{\partial U}{\partial t} - a(x)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = F(x,t) \qquad (4)$$

в R при условиях (2). Положим $k(x) = g(x) - U_t(x,0)$, $\nu(t) = \int_0^t \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}\,ds$.

Теорема. Пусть выполняются следующие предположения:

1) $a(x) \in C^{(2)}[0,l]$; $\alpha(t), \beta(t) \in C^{(2)}[0,T]$; $\frac{d}{dt}\left[\frac{\alpha(t)}{\beta(t)}\right] \geqslant 0$.

2) F_{xxx}, F_{xxt}, $F_{xtx} \in C(R)$; $F(0,t) = F(l,t) = 0$.

3) $f(x) \in C^{(5)}[0,l]$, $g(x) \in C^{(3)}[0,l]$; $f(0) = f(l) = f''(0) = f''(l) = g(0) = g(l) = 0$.

Тогда имеют место асимптотические формулы:

$$u(x,t) = U(x,t) + O(\varepsilon);\quad u_x(x,t) = U_x(x,t) + O\left(\varepsilon^{\frac{3}{4}}\right);$$

$$u_t(x,t) = U_t(x,t) + k(x)\,e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}} + O\left(\varepsilon^{\frac{1}{4}}\right).$$

Для доказательства теоремы сначала рассматривается случай, когда $F \equiv 0$. Путем замены

$$u(x,t) = U(x,t) + \varepsilon\frac{\alpha(t)}{\beta(t)}k(x)\left[1 - e^{-\frac{\nu(t)}{\varepsilon}}\right] + \varepsilon z(x,t)$$

выделяются члены типа „пограничного слоя", после чего методом Фурье строится функция $z(x,t)$ как решение соответствующей смешанной задачи и оцениваются z, z_x z_t. С помощью метода Фурье аналогично исследуется случай, когда $f \equiv g \equiv 0$. Общий случай получается суперпозицией. А. С. Калашников

7669. Об интегрировании некоторых линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Збрана (Sulla integrazione di certe equazioni differenziali lineari alle derivate parziali. Sbrana Francesco), Rend. Seminar. mat. e fis. Milano, 1954—1955 (1956), **26**, 116—121 (итал.; рез. англ.)

Предлагается метод для интегрирования линейных дифференциальных уравнений с частными производными, основанный на функциональном преобразовании, природа которого зависит от типа уравнения и числа независимых переменных. Такого рода преобразования могут быть легко выведены из известного кратного интеграла Зоммерфельда. Рассматриваются два примера.

1. Для уравнения распространения сферических волн в области S

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Phi(Q,t)$$

с помощью преобразования $\int_S U(Q,t)\frac{\exp(\omega R)}{R}\,dS(Q) = u(P,t;\omega)$, $\omega = c + i\lambda$, $c = 0$, $-\infty < \lambda < +\infty$, $R = |\overline{PQ}|$, получается представление неизвестной функции $U(Q,t)$ через ее начальные значения $U(Q,0)$; $U_t(Q,0)$ и граничные значения $U(Q,t)$ и $\frac{\partial U(Q,t)}{\partial n}$ на границе области S.

2. Для уравнения

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_1^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi_2^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta_1^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta_2^2}, \quad \Phi(Q)=\Phi(\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2),$$

рассматриваемого в области

$$-a\leqslant\xi_l\leqslant a,\quad -b<\eta_l<b, \tag{1}$$

с помощью представления

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty r\cdot\exp(-\varepsilon r)\,dr\int_0^\infty\rho\cdot\exp(-\varepsilon\cdot\rho)\,d\rho\times$$

$$\times\int_S\Phi(Q)\,J_0(rR)\cdot J_0(\rho l)\,dS(Q)=\gamma\Phi(P),$$

(S — область изменения ξ_l и η_l, определенная неравенствами (1), $\gamma=1$, если P лежит внутри S, и $\gamma=0$, если вне) и формулы Грина получается явный вид зависимости между значениями $\Phi(Q)$ на границах квадратов $|\xi_l|<a$ и $|h_l|<b$, а также представление неизвестной функции через ее значения и значения ее первых производных на указанных границах. В. С. Виноградов

7670. Уточнение, касающееся работы «О нелинейных уравнениях параболического типа с двумя переменными». Чилиберто (Precisazione relativa alla memoria: Sulle equazioni non lineari di tipo parabolico in due variabili. Ciliberto Carlo), Ricerche mat., 1958, 7, № 2, 232—234 (итал.)

Приводится полное доказательство одной из теорем статьи, упомянутой в заглавии (РЖМат, 1956, 8842). О. В. Гусева

7671. Два точных решения нелинейной задачи Стефана. Тирский Г. А., Докл. АН СССР, 1959, **125**, № 2, 293—296

Рассматривается система уравнений

$$N_1(\theta_1)\frac{\partial\theta_1}{\partial t}=\varkappa_1\frac{\partial}{\partial y}\left[L_1(\theta_1)\frac{\partial\theta_1}{\partial y}\right],\quad 0<y<\eta(t),\quad t>0,$$

$$N_2(\theta_2)\frac{\partial\theta_2}{\partial t}=\varkappa_2\frac{\partial}{\partial y}\left[L_2(\theta_2)\frac{\partial\theta_2}{\partial y}\right],\quad \eta(t)<y<\infty,\quad t>0$$

с начальным условием $\theta_l(y,0)=0$, с граничными условиями $\theta_1(0,t)=1$, $\theta_2(\infty,t)=0$ и с условиями сопряжения

$$\theta_1(\eta(t),t)=\theta_2(\eta(t),t)=p,$$

$$L_2(\theta_2)\frac{\partial\theta_2}{\partial y}-nL_1(\theta_1)\frac{\partial\theta_1}{\partial y}=\alpha\frac{dy}{dt}$$

при $y=\eta(t)$. Решение этой задачи ищется в виде $\theta_1(y,t)=f_1(x)$, $\theta_2=f_2(x)$, $\eta_1(t)=2\eta_0\sqrt{\varkappa_2\cdot t}$, где $x=\frac{y}{2\sqrt{\varkappa_2 t}}$. Эти функции удовлетворяют следующим нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$m\frac{d}{dx}\left[L_1(f)\frac{df_1}{dx}\right]+2xN_1(f_1)\frac{df_1}{dx}=0,\quad 0<x<\eta_0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[L_2(f_2)\frac{df_2}{dx}\right]+2xN_2(f_2)\frac{df_2}{dx}=0,\quad \eta_0<x<\infty$$

и граничным условиям:

$$f_1(0)=1,\quad f_2(\infty)=0,\quad f_1(\eta_0)=f_2(\eta_0)=p_0,$$

$$L_2(f_2)\frac{df_2}{dx}-nL_1(f_1)\frac{df_1}{dx}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}D\cdot\eta_l,\qquad \text{при } \eta_l=\eta_0,$$

где $m=\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}$, $D=\sqrt{\pi\varkappa_2\alpha}$.

Если $L_l(f_l)\equiv N_l(f_l)$ то точное решение последней нелинейной краевой задачи находится в виде неявной функции, но при отыскании η_0 приходится решать трансцендентное уравнение. Если $L_l\not\equiv N_l$, то автор получает функциональное уравнение типа Вольтерра, которое можно решить методом последовательных приближений. Рассматривается также нелинейная задача Ламе—Клапейрона—Стефана. Аналогичным методом автор находит точное решение. Е. И. Ким

7672. Применение преобразования Лапласа к решению задач теплопроводности. Иванов А. В., Тр. Ин-та энерг. АН БССР, 1958, вып. 7, 3—44

Дается схема решения многих задач теплопроводности в неоднородном изогнутом стержне переменного поперечного сечения с учетом теплообмена с окружающей средой с помощью преобразования Лапласа. При решении неоднородного уравнения теплопроводности с неоднородными граничными условиями третьего рода решение ищется в виде суммы двух функций, первая из которых удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению, неоднородным граничным условиям и нулевому начальному условию, а вторая — неоднородному дифференциальному уравнению, однородным граничным условиям и исходным начальным условиям. Решение для каждой из этих функций получается с помощью преобразования Лапласа. При применении преобразования Лапласа к первой функции задачное дифференциальное уравнение в частных производных переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение с соответствующими преобразованными граничными условиями, которое и решается. При переходе от изображения к оригиналу применяется теорема о свертке. Решение получающегося при решении второй вспомогательной задачи неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения при однородных граничных условиях представляется в интегральной форме с помощью функции Грина. Указывается, что многие другие задачи с иными граничными условиями также могут быть решены по указанной схеме. Предложенная схема иллюстрируется решением ряда задач (стержень при наличии источников тепла, граничных условий первого рода и произвольной начальной температуре, полуограниченный и неограниченный стержень). В. Г. Меламед

7673. Теорема о дифференциальных неравенствах для уравнений параболического типа. Кухта Г. П., Уч. зап. Кишиневск. ун-т, 1959, **39**, 247—248

Достаточное условие суперпараболичности, известное для случая уравнения теплопроводности, переносится на более общие уравнения. Д. М. Эйдус

7674. Решение уравнения теплопроводности для трехслойного стержня. Шимко Н. Г., Тр. Ин-та энерг. АН БССР, 1958, вып. 4, 85—93

Рассматривается смешанная задача для уравнения теплопроводности $\varphi(x)\frac{\partial u}{\partial t}=k(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)$, где функции $k(x)$ и $\varphi(x)$ кусочно-постоянны и имеют разрывы в двух точках. Задача решается методом Фурье. Д. М. Эйдус

7675. Представление решений уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу через аналитические функции. Кривенков Ю. П., Докл. АН СССР, 1957, **116**, № 4, 545—548

Для уравнения

$$w_{xx}+w_{yy}+\frac{c}{y}w_y=0, \tag{1}$$

c — постоянная, при значениях $0<c<1$, усиливаются результаты предыдущей статьи автора (РЖМат, 1959, 1525). Пусть T — односвязная область, лежащая в полуплоскости $y>0$ и примыкающая к интервалу L оси $y=0$, $\overline{T}$ — область, симметричная ей относительно оси ox, и $C_2(T)$ — класс непрерывных в $T+L$ функций, обладающих непрерывными первыми и вторыми производными в T.

Теорема 1. Если решение $w(x, y)$ уравнения (1), принадлежащее $C_2(T)$ или $\lim_{y\to 0} y^c w_y$ принимает на L аналитические по x значения, то найдется такая область σ, примыкающая к L, в которой решение представится в виде

$$w(x,y) = A_1(x,y;c) + \left(\frac{y}{1-c}\right)^{1-c} A_2(x,y;\ 2-c), \quad (2)$$

$$A_k(x,y;c) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma^2\left(\frac{c}{2}\right)} \int_0^1 \frac{\varphi_k(x+iy(1-2\sigma))}{[\sigma(1-\sigma)]^{1-c/2}}\, d\sigma$$

$$(k = 1, 2),$$

$\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ — аналитические в $\sigma + L + \overline{\sigma}$ функции, удовлетворяющие на L условиям:

$$\varphi_1(x) = w(x, 0), \quad (3)$$

$$\varphi_2(x) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{y}{1-c}\right)^{1-c} w_y. \quad (4)$$

Определения. Две функции $w(x, y)$ и $w^*(x, y)$, определенные в T, называются сопряженными, если они принадлежат $C_2(T)$ и на L удовлетворяют соотношениям: $w(x, 0) = w^*(x, 0)$, $\lim_{y\to 0} y^c w_y = -\lim_{y\to 0} y^c w_y^*$. Область T называется принадлежащей классу B, если область $T + L + \overline{T}$ содержит весь отрезок, соединяющий две любые ее точки, имеющие общие абсциссы.

Теорема 2. Для представимости решения $w(x, y)$ уравнения (1) при $0 < c < 1$, принадлежащего классу $C_2(T)$, где $T \in B$, в форме (2), необходимо и достаточно выполнения хотя бы одного из условий: а) существование в T сопряженного решения; б) существование аналитической в T функции, удовлетворяющей условию (3) на интервале L; в) существование аналитической в T функции, удовлетворяющей условию (4) на интервале L.

В области $D \equiv T + L + \overline{T}$, где $T \in B$, рассматривается класс функций $C_2(D)$, к которому относится всякая пара функций, принадлежащих, соответственно, классам $C_2(T)$ и $C_2(\overline{T})$ и образующих в (D) одну, непрерывную вместе с выражением $|y|^c w_y$ функцию.

Теорема 3. Любое решение $w(x, y)$ класса $C_2(D)$ уравнения (1) при $0 < c < 1$ представляется в (D) в виде $w(x,y) = A_1(x, y;\ c) + \operatorname{sign} y \left(\frac{|y|}{1-c}\right)^{1-c} A_2(x, y;\ 2-c)$, где $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ — аналитические в (D) функции, удовлетворяющие на L соответственно условию (3) и условию $\varphi_2(x) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{|y|}{1-c}\right)^{1-c} w_y$. Все указанные представления единственны. М. Н. Олевский

7676. Крутящие колебания кругового цилиндра конечной длины. Вакка (Vibrazioni torsionali di un cilindro circolare di lunghezza finita. Vacca Maria Teresa), Atti Semin. mat. e fis. Univ. Modena, 1953—1954 (1954), **7**, 87—104 (итал.)

Рассматриваются крутящие колебания кругового цилиндра радиуса a длины l, когда крутящая компонента смещения не зависит от угла скручивания. Задача сводится в общем случае к нахождению решения уравнения

$$\frac{\partial^2 V_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_n}{\partial r} - \frac{V_n}{r^2} - \frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2 V_n}{\partial t^2} - \left[\frac{2n+1}{l}\pi\right]^2 V_n = 0 \quad (1)$$

при условиях:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V_n}{r}\right) = h(t) \text{ для } r = a \quad (2)$$

$$V_n\Big|_{t=0} = f_n(r), \quad \frac{\partial V_n}{\partial t}\Big|_{t=0} = g_n(z),$$

где h, g_n, f_n — заданные функции, ρ — плотность масс, μ — постоянная Ляме, если u_v — крутящая компонента, то

$$u_v = V_n \cos\left[\frac{2n+1}{l}\pi z\right].$$

Задача (1), (2) разбивается на две задачи и каждая из них решается эффективно до конца. С. А. Терсенов

7677. О регулярной задаче Коши для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу. Дэйвис (On a regular Cauchy problem for the Euler — Poisson — Darboux equation. Davis Ruth M.), Ann. mat. pura ed appl. 1956, **42**, 205—226 (англ.)

Пользуясь обобщением метода Рисса на несамосопряженные уравнения, автор получает в явной форме (довольно громоздкой) решение $u(x_1, \ldots, x_n; t)$ уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial u}{\partial t} \quad (1)$$

(k — действительное число), удовлетворяющее начальным условиям

$$u\Big|_{t=t_0} = f(x_1, \ldots, x_n), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=t_0} = \varphi(x_1, \ldots, x_n), \quad t_0 > 0, \quad (2)$$

$f \in C^{(n+1)/2}$ (функция φ принята $\equiv 0$). Задача (1), (2) названа регулярной задачей Коши для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу. При $t_0 = 0$ и $k \neq 0$ она становится сингулярной и допускает решение лишь при $\varphi \equiv 0$ (РЖМат, 1960, 3046); ее решение было дано Вайнштейном (Weinstein A., C. r. Acad. sci., 1952, **234**, 2584—2585), Диасом и Уинбергером (РЖМат, 1955, 248; см. также Капилевич М. Б. Матем. сб., 1950, **30**, 11—38; Блюм, РЖМат, 1955, 4438, 5047). Некоторые обобщения сингулярной задачи на случай, когда в левой части уравнения (1) оператор Лапласа над u заменен линейным дифференциальным оператором с переменными коэффициентами, а оператор по t в правой части заменен на $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + k\alpha \operatorname{cth}\alpha t \frac{\partial}{\partial t}$, рассмотрены в работах референта (РЖМат, 1954, 5581; 1956, 428, 4532). Отмечается, что решение сингулярной задачи, вообще говоря, не получается из решения соответствующей регулярной задачи при $t_0 \to 0$ (РЖМат, 1957, 5599). Любопытно, что при $k > 0$ предположения о гладкости функции f в регулярной задаче — более тяжелые, чем в соответствующей сингулярной задаче, между тем как при $k < 0$ имеет место обратное. Указывается, что при n нечетном, k четном и $0 \leqslant k \leqslant n - 1$ имеет место принцип Гюйгенса. Краткое содержание этой работы было опубликовано раньше (РЖМат, 1957, 4033).

Примечание референта. Референтом в докладе на 3-м Всесоюзном математическом съезде (РЖМат, 1957, 2328) было указано в весьма простой форме решение регулярной задачи Коши (2) для обобщенного уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу:

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k\alpha \operatorname{cth}\alpha t \frac{\partial u}{\partial t} + bu,$$

где Δ_2 — оператор Бельтрами в пространстве постоянной кривизны $-\alpha^2 < 0$, k и b — постоянные. Это решение получается непосредственным применением одной теоремы референта (РЖМат, 1954, 5581). При $\alpha \to 0$ оно обращается в решение задачи (2) для уравнения Эйлера — Пуассона Дарбу и совпадает с формой решения, полученной в этом случае Копсоном для $n = 2m$ (РЖМат, 1957, 4017). М. Н. Олевский

7678. Исследование решений краевых задач для уравнения $u_{xx}-K(x)u_{tt}=0$ в полосе с вырождением или сингулярностью на границе. Баранцев Р. Г., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 5, 6—9

В полосе $S[0 \leqslant x \leqslant 1]$ рассматривается для уравнения

$$u_{xx}-K(x)u_{tt}=0 \tag{1}$$

смешанная задача (C) с условиями:

$$u\mid_{t=l(x)}=p(x), \quad x\in[0,\ 1], \tag{2}$$

$$u_t\mid_{t=l(x)}=\begin{cases} q(x), \text{ если } \mid l'(x)\mid <\sqrt{K(x)}, \\ \text{не задается, если } l'(x)\equiv\sqrt{K(x)}, \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} u(0,t)\cos\xi+u_x(0,t)\sin\xi=0, \quad 0<\xi\leqslant\pi; \\ u(1,t)\cos\eta+u_x(1,t)\sin\eta=0, \quad 0<\eta\leqslant\pi, \end{aligned} \tag{4}$$

причем $K(x)=x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\overline{K}(x)$, $-1<\alpha<2$ при $\xi\neq\pi$, $-2<\alpha<2$ при $\xi=\pi$, $-1<\beta<2$ при $\eta\neq\pi$, $-2<\beta<2$ при $\eta=\pi$, а $\overline{K}(x)$ положительна и дважды дифференцируема в $[0,\ 1]$.

В предыдущей работе автора (РЖМат, 1959, 4279) решение этой задачи строилось в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}'c_nB_n(x)\exp(-i\lambda_nt), \tag{5}$$

где $B_n(x)$ удовлетворяют условию (4) и уравнению $B_n''+\lambda_n^2KB_n=0$, а коэффициенты c_n определяются из разложения функций p и q в ряды, получающиеся после подстановки ряда (5) в условия (2) и (3). При выполнении условий теорем разложения ряд (5) является обобщенным решением задачи (C), единственным в классе L_2.

В реферируемой работе приводятся результаты исследования функциональных свойств суммы ряда (5) в полосе S и во внутренней полосе $S'[0<x_1\leqslant x\leqslant x_2<1]$. Например (теоремы 2 и 7), если в $(0,\ 1)$ $l(x)\equiv\int_0^x\sqrt{K(x)}\,dx$ и $p''(x)=x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta-2}g(x)$, где $g(x)$ имеет в $(0,\ 1)$ ограниченное изменение, $a>1+\alpha/4$; $b>1+\beta/4$; $b>-\beta/4$ при $\beta\geqslant 0$; $a>-\alpha/2$ при $\alpha\leqslant 0$, $a>-\alpha/4$ при $\alpha\geqslant 0$, $b>-\beta/2$ при $\beta\leqslant 0$ и еще $p(0+)=0$ при $\xi=\pi$ в случае $\alpha\leqslant 0$, $p(1-)=0$ при $\eta=\pi$ в случае $\beta\leqslant 0$, и кроме того:

$$p(0+)\cos\xi+p'(0+)\sin\xi=0 \quad \text{при } \alpha\geqslant 0,\ 0<\xi\leqslant\pi,$$

$$p(1-)\cos\eta+p'(1-)\sin\eta=0 \quad \text{при } \beta\geqslant 0,\ 0<\eta\leqslant\pi,$$

$$K^{-1/4}(x_*)[p'(0+)-p'(1-)]+\int_0^{x_*}[p'(x)-p'(0+)]\times$$

$$\times(K^{-1/4})'dx+\int_{x_*}^1[p'(x)-p'(1-)](K^{-1/4})'\,dx=0;$$

$$x_*\in(0,\ 1);$$

тогда $u\in C^{(1)}$ в S'. При тех же условиях $u\in C^{(1)}$ в S, если одновременно $\alpha\geqslant 0$ и $\beta\geqslant 0$; если же $\alpha<0$ ($\beta<0$), то это верно лишь тогда, когда $a>1$ ($b>1$) и

$$p(0+)\cos\xi+p'(0+)\sin\xi=0 \quad \text{при } \xi\in(0,\pi]$$

$$([p\cos\eta+(p'-ql')\sin\eta]_{x=1-}=0 \quad \text{при } \eta\in(0,\pi]).$$

И. Л. Кароль

7679. Ограничение и сравнение с помощью метагармонических функций. Супино (Limitazioni e confronti per le funzioni meta-armoniche. Supino G.), Rev. Unión mat. argent. y Asoc. fís. argent., 1955, 17, 287—292 (итал.)

Автор рассматривает некоторые известные свойства решения уравнения эллиптического типа $\Delta u-\lambda^2u=0$. Например, свойство максимума и минимума решения на границе плоской области D рассматривается так же подробно, как степень роста производных при подходе к границе D. F. G. Dressel

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 5, 399

7680. О проблеме коэффициентов для решений дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Крейсиг (On coefficient problems of solutions of partial differential equations of the fourth order. Kreyszig Erwin), J. Math. and Mech., 1957, 6, № 6, 811—822 (англ.)

Рассматриваются некоторые вопросы, относящиеся к проблеме коэффициентов для решений уравнения вида

$$\frac{\partial^4u}{\partial z^2\partial z^{*2}}+a\frac{\partial^2u}{\partial z^2}+b\frac{\partial^2u}{\partial z\partial z^*}+c\frac{\partial^2u}{\partial z^{*2}}+d\frac{\partial u}{\partial z}+$$

$$+e\frac{\partial u}{\partial z^*}+hu=0, \tag{1}$$

где a, b, c, d, e и h — заданные целые функции относительно своих комплексных аргументов z и z^*, а u — искомое решение. В частности, исходя из разложения

$$u(z,z^*)=\sum_{m,n=0}^{\infty}u_{mn}z^mz^{*n}=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(z)z^{*n},$$

и воспользовавшись формулой Бергмана (Bergman S., Duke Math. J., 1944, 11, 617—649) общего представления решений уравнения (1), автор доказывает ряд теорем, устанавливающих связь между свойствами функции $u_0(z)$ и $u_1(z)$, с одной стороны, и $u_n(z)$ при $n>1$, с другой. Эти теоремы представляют собой некоторые обобщения соответствующих предложений, ранее известных для решений уравнения вида

$$\frac{\partial^2u}{\partial z\partial z^*}+a\frac{\partial u}{\partial z}+b\frac{\partial u}{\partial z^*}+cu=0.$$

Библ. 9 назв. М. Б. Гагуа

7681. Об одном классе дифференциальных уравнений эллиптического типа для случая разомкнутого контура. Плуме З. Я., Raksti. Rigas ped. inst., Уч. зап. Рижск. пед. ин-та, 1957, 4, 47—56

Рассматривается уравнение 4-го порядка следующего типа:

$$\Delta\Delta u+a\frac{\partial\Delta u}{\partial x}+b\frac{\partial\Delta u}{\partial y}+c\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+d\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+$$

$$+c\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+g\frac{\partial u}{\partial x}+h\frac{\partial u}{\partial y}+ku=0. \tag{1}$$

Коэффициенты уравнения аналитичны в области S, полученной из комплексной плоскости удалением некоторой простой, разомкнутой дуги L и бесконечно удаленной точки. Кривизна дуги L удовлетворяет условию Гёльдера.

Для уравнения (1) рассматривается граничная задача: найти регулярное в S решение уравнения (1), ограниченное на концах L (в бесконечности решение может вести себя как угодно) по краевым условиям

$$u^+=f_0^+(t_0), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^+=f_1(t_0), \tag{2}$$

$$u^-=f_0^-(t_0), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^-=f_1^-(t_0).$$

Здесь n — нормаль к L в положительном направлении. Автор утверждает, что задача (1), (2) всегда разрешима. Для доказательства этого утверждения задача (1), (2) сводится к системе четырех уравнений для четырех

неизвестных функций (плотностей потенциалов), из которых два уравнения суть сингулярные интегральные и два интегро-дифференциальные сингулярные уравнения. Относительно эквивалентности задачи (1), (2) данной системе ничего не указывается. Ввиду того, что решение может быть неограниченным в бесконечности, свободные члены в полученной системе могут быть выбраны с любым наперед заданным числом произвольных постоянных.

Утверждение автора, что данную систему можно привести к одному линейному дифференциальному уравнению первого порядка и к двум сингулярным интегральным уравнениям ошибочно. На самом деле здесь получается система двух сингулярных интегро-дифференциальных уравнений и одно сингулярное интегральное уравнение, поэтому вопрос о применимости к данной системе альтернатив Нетера остается открытым.

В. С. Виноградов

7682. О теоремах, аналогичных теореме Фрагмена—Линделёфа. Евграфов М. А., Докл. АН СССР, 1959, 126, № 3, 478—481

Доказывается теорема о росте решений дифференциальных уравнений в цилиндре, аналогичная теореме Фрагмена — Линделёфа о росте гармонической функции в полуполосе. Введем обозначения:

$$X = \{x_1, \ldots, x_r\},\ \frac{\partial}{\partial X} = \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_r}\right\},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^m = \frac{\partial^{m_1 + \ldots + m_r}}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_r^{m_r}},\ \Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\}.$$

Пусть D — ограниченная область с гладкой границей в пространстве X, B — цилиндр $x > 0$, $X \in D$,

$$P\left(x, X, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial X}\right) = \sum_{k,\, m} a_{km}(x, X) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^m,$$

где $a_{km}(x, X)$ — гладкие функции. Пусть, далее, H — пространство функций $f(X)$, удовлетворяющих на границе D линейным однородным краевым условиям и таких, что

$$P\left(x, X, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial X}\right) = \sum_{k,\, m} a_{km}(x, X) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^m.$$

Через $\lambda_k(x)$ обозначим те значения λ, для которых задача

$$P\left(x, X, \lambda, \frac{\partial}{\partial X}\right) u(X) = 0,\ u \in H,$$

допускает нетривиальные решения, а через $H_s(x)$ — подпространства H, аннулируемые оператором $P\left(x, X, \lambda_s(x) \frac{\partial}{\partial X}\right)$.

Пусть $P(x, X, \lambda, \Xi)$ удовлетворяет условиям:

1. В любой полосе $\alpha < \operatorname{Re}\lambda < \beta$ число $\lambda_s(x)$ конечно и сумма размерностей, соответствующих $H_s(x)$, при $x \to \infty$ ограничена.

2. Для любого λ существует R такое, что

$$\int_0^\infty \max_{x \in D} \sup_{\|\Xi\| > R} \left| \frac{\frac{\partial}{\partial x} P(x, X, \lambda, \Xi)}{P(x, X, \lambda, \Xi)} \right| dx < \infty.$$

3. В каждом $H_s(x)$ можно выбрать такой базис $\varphi_{sp}(x, X)$, что $\lim_{x \to \infty} \varphi_{sp}(x, X) = \varphi_{sp}(X)$, $\varphi_{sp}(X)$ — линейно независимы. В этих условиях имеет место

Теорема. Если

$$P\left(x, X, \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, X) = 0,\ u(x, X) \in H,$$

$$\max_{x \in D} |u(x, X)| = o(e^{\beta x}),$$

то

$$u(x, X) = v(x, X) + \sum_{\alpha < \operatorname{Re}\lambda_s < \beta} C_{sp} u_{sp}(x, X),$$

где

$$\max_{x \in D} |v(x, X)| = o(e^{dx})$$

$$u_{sp}(x, X) = [\varphi_{sp}(X) + o(1)] \exp\left[\int_0^x \lambda_s(t)\, dt\right].$$

Аналогичная теорема приведена для уравнений

$$A\left(x, \frac{d}{dx}\right) u(x) = 0,$$

где $A(x, \lambda) = \sum_{k=0}^n A_k(x) \lambda^k$ — оператор в метрическом пространстве. Результаты данной работы обобщают работы Лакса и Ландиса (РЖМат, 1957, 7066), но являются гораздо более точными.

М. В. Федорюк

7683. К теореме Алманси о бигармонической задаче. Боджо (Sopra un teorema di Almansi relativo al problema biarmonico. Boggio Tommaso), Boll. Unione mat. ital., 1957, 12, № 3, 369—376 (итал.; рез. англ.)

Пусть на плоскости $z = x + iy$ имеем область D, которую можно отобразить конформно на круг $|z_1| = |x_1 + iy_1| < 1$ при помощи функции $z = f(z_1)$, где $f(z_1)$ есть полином порядка m. Автор, используя некоторые свойства аналитических функций, дает новое доказательство теоремы Алманси: Любая бигармоническая функция w в D может быть представлена в виде $w = xu + yv + w + P$, где u, v, w — гармонические функции, P — бигармоническая функция, равная нулю на границе D, и в переменных x_1, y_1 есть полином степени $2m$.

С. А. Терсенов

7684. Приведение линейной системы уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами к системе нормального типа. Борок В. М., Докл. АН СССР, 1957, 115, № 1, 13—16

Рассматривается система линейных уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial^{n_i} u_i(x, t)}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=1}^N \sum_{<m_0 \ldots m_n>} A^{ij}_{m_0 \ldots m_n} \frac{\partial^{m_0 + \ldots + m_n} u_j(x, t)}{\partial t^{m_0} \partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}, \quad (1)$$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, где суммирование производится по всевозможным совокупностям индексов $<m_0 \ldots m_n>$, $m_0 < n_j$, $m_i < M$.

Пусть $\lambda_j(s)$ — корни характеристического многочлена

$$\det \left\| \begin{matrix} \lambda^{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^{n_N} \end{matrix} \right\| - \left\| \sum_{<m_0 \ldots m_n>} A^{ij}_{m_0 \ldots m_n} \lambda^{m_0} (is_1)^{m_1} \ldots (is_n)^{m_n} \right\|.$$

Приведенным порядком ρ_0 системы, по Гельфанду и Шилову, называется наименьшее из таких чисел k, которые удовлетворяют соотношению $\max_{1 < j < N_1} \operatorname{Re}\lambda_j(s) \leqslant C_k |s|^k$.

Теорема 1. Приведенный порядок p_0 может быть найден по формуле $p_0 = \max\limits_{1 \le i \le N_1} \frac{p_i}{i}$. Здесь p_i —старшая степень по совокупности переменных $s_1, \ldots, s_n$ $p_i(s)$.

Определение. Система (1) с приведенным порядком $p_0 = m/k$ (дробь m/k несократима) имеет нормальный тип, если: 1) все $m_0 = 0$, 2) $n_i \leqslant k$, 3) $\sum_{i=1}^{n} m_i \leqslant m$.

Теорема 2. Задача Коши для всякой системы вида (1) может быть сведена к задаче Коши для системы нормального типа. А. Г. Костюченко

7685. Эквивалентные системы линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Борок В. М., Докл. АН СССР, 1957, 117, № 4, 555—558

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial^{n_i} u_i(x, t)}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{(m_s)} A^{ij}_{(m_s)} \frac{\partial^{m_0+\ldots+m_n} u_s(x, t)}{\partial t^{m_0} \partial x_1 \ldots \partial x_n^{m_n}}, \quad (1)$$

где $\sum_{(m_s)}$ означает суммирование по всевозможным совокупностям индексов $(m_0, \ldots, m_n)$, причем $m_0 < n_j$, $m_k < M$ $(k = 1, 2, \ldots, n, \sum_{i=1}^{N_1} n_i = N)$. Систему (1) путем введения дополнительных неизвестных функций можно привести к виду

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t), \quad (1')$$

где $u(x, t) = \{u_1(x, t), \ldots, u_N(x, t)\}$, $P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — квадратная матрица порядка N.

Определение 1. Система (1′) называется эквивалентной системе

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial z} = Q\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x, t), \quad (1'')$$

если обе системы содержат одинаковое число неизвестных функций и если существует такой невырожденный оператор $T\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)$ $(\det \tau(s) \neq 0)$, что если $u(x, t)$ — решение системы (1′), то $v(x, t) = T\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t)$—решение системы (1″).

Основной результат: Для того чтобы системы (1′) и (1″) были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы матрицы $P(s)$ и $Q(s)$ были подобны. А. Г. Костюченко

7686. Вычетный метод решения смешанных задач и некоторые с ним связанные формулы разложения. Расулов М. Л., Докл. АН СССР, 1958, 120, № 1, 33—36

Применяя вычетный метод, разработанный автором ранее (Матем. сб., 1952, 30 (72), № 3), автор выводит формулу, представляющую достаточно гладкое решение смешанных задач для системы линейных дифференциальных уравнений с кусочно-гладкими коэффициентами при граничных условиях, которые связывают производные искомой вектор-функции в более чем двух точках интервала изменения пространственного переменного и содержат также ее производные по времени в виде интегрального вычета. Кроме того, выводится новая формула разложения произвольных вектор-функций в ряды по фундаментальным функциям соответствующей спектральной задачи. В качестве примеров рассмотрена одна нестационарная задача гидромеханики, решенная ранее другим методом И. А. Чарным (Чарный И. А., Подземная гидромеханика, 1948) и одна задача теории теплопроводности. Полученные результаты тесно примыкают к предыдущим работам автора (РЖМат, 1959, 1490. 1491). Библ. 3 назв. П. Ф. Фильчаков

7687. Об одной специальной системе уравнений. Дезин А. А., Докл. АН СССР, 1959, 127, № 3, 497—500

Рассматривается система восьми уравнений с частными производными первого порядка для 8 неизвестных функций от четырех независимых переменных. В предположении, что искомые функции и правые части являются периодическими в 4-мерном единичном кубе, изучается структура системы и устанавливается ее однозначная (с точностью до констант) разрешимость при любых правых частях из L_2. Используемый метод — ортогональные разложения в гильбертовом пространстве. Выясняется, что структура приведенной системы обобщает в известном смысле структуру уравнений Коши — Римана и некоторых уравнений, связанных с операторами теории поля. Приводимые ортогональные разложения представляют собой по существу специальный случай теоремы Кодаира для многообразия, гомеоморфного 4-мерному тору. В. Н. Масленникова

7688. Поведение решений системы дифференциальных уравнений эллиптического типа в окрестности бесконечно удаленной точки. Лопатинский (Поведінка розв'язків системи диференціальних рівнянь еліптичного типу в оточенні нескінченно віддаленої точки. Лопатинський Я. Б.), Доповіді АН УРСР, 1959, № 9, 931—935 (укр.; рез. русск., англ.)

Рассматривается эллиптическая система

$$\sum_{k_1+\ldots+k_n=s} A_{k_1\ldots k_n} \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} +$$

$$+ \sum_{k_1+\ldots+k_n<s} B_{k_1\ldots k_n}(x) \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} = 0,$$

где $A_{k_1\ldots k_n}$ — постоянные квадратные матрицы, $B_{k_1\ldots k_n}(x)$ — матрицы, элементы которых являются достаточно гладкими функциями от $x_1, \ldots, x_n$ и имеют заданный порядок убывания на бесконечности. Доказывается, что для любых чисел λ, λ_1 $(\lambda_1 < \lambda)$ существует конечное число таких решений $u_1(x), \ldots, u_m(x)$ $(m = m(\lambda, \lambda_1))$ рассматриваемой системы, что всякое решение $u(x)$ этой системы, определенное в окрестности бесконечно удаленной точки и удовлетворяющее оценке $u(x) = 0(|x|^{\lambda})$, представимо в виде

$$u(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i u_i(x) + u_0(x),$$

где c_i — постоянные, $u_0(x) = 0(|x|^{\lambda_1})$. Д. М. Эйдус

7689. О классах решений эллиптических линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Фридман (On classes of solutions of elliptic linear partial differential equations. Friedman Avner), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 3, 418—427 (англ.)

Как известно, свойство аналитичности коэффициентов эллиптического уравнения переносится на его регулярные решения. В реферируемой работе из класса бесконечно дифференцируемых функций выделяются отдельные подклассы, обладающие аналогичным свойством. В частности, через $C(M_n, D)$ обозначается класс в данной конечномерной области D бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$ таких, что для любой замкнутой подобласти D_0 $(D_0 \subset D)$ существуют постоянные H_0 и H, удовлетворяющие для данного $f(x)$ неравенствам

$$\left|\frac{\partial^n f(x)}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_N^{i_N}}\right| \leqslant H_0 H^n M_n$$

$$(x=(x_1,\ldots,x_N)\in D_0,\ n=1,2..),$$

где $M_n\ (n=1,2,..)$ — заданная последовательность положительных чисел, и доказывается следующая теорема: Пусть

$$\sum_{l=1}^{p} A_{kl}\,u_l(x) = h_k(x)\ \ (k=1,2,\ldots,p), \qquad (1)$$

где

$$A_{kl}=\sum_{j=0}^{s}\sum_{i_1+\ldots+i_N=j} f_{i_1,\ldots,i_N}^{kl}(x)\,\frac{\partial^j}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_N^{i_N}}$$

— эллиптическая система дифференциальных уравнений. Тогда, если все коэффициенты $f_{i_1,\ldots,i_N}^{kl}(x)$ и $h_k(x)$ принадлежат классу $C(M_n, D)$, то и компоненты любого ее регулярного решения $(u_1(x),\ldots,u_p(x))$ также принадлежат классу $C(M_n, D)$, если только последовательность $M_n\ (n=1,2,\ldots)$ удовлетворяет условиям:

$$\binom{n-s+2}{i} M_i\,M_{n+2-i} \leqslant A_n M_{n+1}\quad (i=2,3,\ldots n-s+2),$$

где A — некоторая константа. М. Б. Гагуа

7690. О зависимости индекса одного оператора граничной задачи для эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка от старших коэффициентов. Лаврук Б. Р., Докл. АН СССР, 1958, 121, № 6, 970—972

Рассматривается оператор $\left(A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right), B\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)$ ($A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — дифференциальный оператор внутри некоторой области, $B\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — граничный оператор) и ему сопряженный оператор $\left(A^*\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right), B^*\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)$ (РЖМат, 1960, 4. 050). Индексом первого оператора называется разность между числом решений однородной задачи, связанной с первым оператором, и числом линейно независимых решений однородной сопряженной задачи, связанной с сопряженным оператором. Доказывается следующая теорема: Индекс оператора не меняется при произвольных изменениях старших коэффициентов оператора $\left(A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right), B\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)$, если: а) сохраняется условие эллиптичности оператора $A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$; б) $\det\sum_{i=1}^{n} B_i(y)\,\nu_i(y)\neq 0$, в любой граничной точке y, $\nu(y)$ — внутренняя нормаль; в) обе упомянутые граничные задачи удовлетворяют условию приводимости к регулярным интегральным уравнениям. И. И. Данилюк

7691. О теореме представления для линейных эллиптических систем с разрывными коэффициентами и ее приложения. Берс, Ниренберг (On a representation theorem for linear elliptic systems with discontinuous coefficients and its applications. Bers L., Nirenberg L.), Convegno internaz. equazioni lineari alle derivate parziali 1954. Roma, 1955, 111—140 (англ.)

Рассматривается равномерно эллиптическая система первого порядка на плоскости, которую в комплексной форме можно записать следующим образом:

$$w_{\bar z} = \mu(z)\,w_z + \nu(z)\,\bar w_z + aw + \beta\bar w + \gamma, \qquad (1)$$

$$|\mu|+|\nu|<k<1,\ \ |\alpha|+|\beta|<k',\ \ |\gamma|<k''. \qquad (2)$$

Коэффициенты предполагаются измеримыми функциями в некоторой области D, принадлежащей кругу $|z|\leqslant 1$. Тогда справедлива теорема:

Любое решение уравнения (1) представимо в виде

$$w(z)=e^{s(z)}f[\chi(z)]+s_0(z);$$

$s(z)$ и $s_0(z)$ равны нулю при $z=1$ и действительны на окружности $|z|=1$; $\chi(z)$ — гомеоморфизм единичного круга на себя; $f(\zeta)$ — функция, аналитическая в образе $\chi(D)$; $s_0(z)$, $s(z)$, $\chi(z)$, $\chi^{-1}(\zeta)$ (обратный гомеоморфизм) удовлетворяют условию Гёльдера с постоянными, зависящими только от k, k', k''. Строгого доказательства теоремы нет.

С помощью вышеуказанной теоремы представления выводятся: теорема об изолированности нулей для решений однородных эллиптических систем, теорема единственности продолжения решений эллиптических систем, теорема об изолированных особенностях. Далее дается решение задачи Дирихле для системы (1) и для квазилинейной системы, т. е. когда μ, ν, α, β, γ зависят от z и w, но сохраняются неравенства (2) и расширение теоремы Римана об отображениях квазилинейных систем типа $w_{\bar z}=\mu(z_1 w)\,w_z+\nu(z,w)\,\bar w_z$.

В конце работы проводится сравнение свойств решений системы (1), со свойствами псевдоаналитических функций, т. е. когда на коэффициенты накладываются более ограничительные условия гладкости.

В. С. Виноградов

7692. О линейных и нелинейных эллиптических краевых задачах на плоскости. Берс, Ниренберг (On linear and non-linear elliptic boundary value problems in the plane. Bers L., Nirenberg L.), Convegno internaz. equazioni lineari alle derivate parziali 1954. Roma, 1955, 141—167 (англ.)

Рассматриваются задача Дирихле и задача Неймана для линейных и нелинейных равномерно эллиптических уравнений второго порядка. С помощью теоремы о представлении решений для эллиптических систем первого порядка, полученной в работе этих же авторов (реф. 7691), даются априорные оценки для решений задач Дирихле и Неймана для эллиптического уравнения второго порядка. Эти оценки зависят только от максимума коэффициентов, константы равномерной эллиптичности и констант условия Гёльдера, которому удовлетворяют на границе области данные краевые значения самой искомой функции или ее нормальной производной. Далее, применяя принцип Шаудера, авторы решают краевые задачи для нелинейных равномерно эллиптических систем. Для доказательства единственности решений указанных краевых задач даны расширения теоремы о максимуме модуля и неравенства Гарнака для линейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами. Указываются возможные обобщения. В. С. Виноградов

7693. О смешанной задаче для параболической системы на плоскости. Михайлов В. П., Докл. АН СССР, 1959, 126, № 6, 1199—1202

Рассматривается параболическая система вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{k=0}^{2p}A_k(x,t)\,\frac{\partial^{2p-k}u}{\partial x^{2p-k}}=f(x,t),$$

где $A_k(x,t)$ — квадратные матрицы с достаточно гладкими элементами, зависящими от x и t. Ставится смешанная задача

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\ \ \left.\frac{\partial^l u}{\partial x^l}\right|_{x=0}=\lambda_l(t),\ \ \left.\frac{\partial^l u}{\partial x^l}\right|_{x=1}=\mu_l(t);$$

$i = 0, 1, \ldots, p-1$. Сначала рассматривается случай системы с постоянными коэффициентами. С помощью преобразования Лапласа строится решение задачи и соответствующая этой задаче матрица Грина, доказывается ряд свойств этой матрицы, устанавливаются оценки для ее производных. Затем, пользуясь построенной матрицей Грина для случая постоянных коэффициентов, автор с помощью метода С. Д. Эйдельмана строит матрицу Грина в случае переменных коэффициентов. Затем с помощью матрицы Грина доказывается корректность постановки рассматриваемой смешанной задачи. В случае переменных коэффициентов доказательства не приведены. Указывается на возможность обобщения на случай более общих краевых условий. При формулировке этих условий в статье на стр. 1199 допущена опечатка.

Д. М. Эйдус

7694 К. Уравнения математической физики. Моисил (Ecuaţiile fizicii matematice. Moisil Gr. C. Bucureşti, Lit. şi Tip. Inv., 1958 (1959), 302 p., il., 20 lei), Bibliogr. RPR, 1959, 8, № 7, 178 (рум.)

7695 Д. О среднем значении решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Хабета (Über Mittelwerte von Lösungen linearer partieller Differentialungleichungen. 2. Ordnung. Habetha Klaus.—Diss., Math.-naturwiss. Freier Univ. Berlin, 1959, 84 S.). Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, B, № 21, 1954 (нем.)

7696 Д. Вычетный метод решения смешанных и граничных задач для линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Расулов М. Л. Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, Львов, 1959

7697 Д. О разрывных решениях квазилинейных уравнений и систем гиперболического типа. Калашников А. С. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1959

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

Редакторы *В. В. Немыцкий, А. Г. Свешников, Н. И. Мозжерова*

7698. О воздействии внешней силы на автогенератор. Соболь И. М., Радиотехн. и электроника, 1959, 4, № 10, 1739—1741

Рассматривается система укороченных уравнений

$$\dot{A} = A\delta(A) + \frac{E\omega_0}{2}\cos\varphi, \qquad \dot{\varphi} = \Delta - \frac{E\omega_0}{2A}\sin\varphi, \tag{1}$$

описывающая воздействие внешней э. д. с. с амплитудой E на ламповый генератор. В (1) A — амплитуда, ω_0 — собственная частота, φ — разность фаз, Δ — расстройка. Для системы (1) излагается способ линеаризации, дающий приближенное представление амплитуды при всех $0 \leqslant t \leqslant \infty$. Согласно этому способу решение системы (1) при заданных начальных условиях $A(0)$ и $\varphi(0)$ ищется в виде

$$A(t) = A_0(t)[1 + a(t)], \tag{2}$$

где $A_0(t)$ — решение первого уравнения системы (1) при $E = 0$, удовлетворяющее начальному условию $A_0(0) = A(0)$. Предполагая, что $|a(t)| \ll 1$, подставляя (2) в систему (1) и пренебрегая малыми второго порядка, автор получает систему

$$\dot{a} = A_0\delta'(A_0)a + \frac{E\omega_0}{2A_0}\cos\varphi, \qquad \dot{\varphi} = \Delta - \frac{E\omega_0}{2A_0}\sin\varphi. \tag{3}$$

Из первого уравнения системы (3) определяется $a(t)$. Обозначая через $\bar{a}(t)$ максимальное значение $a(t)$ при $\cos\varphi = 1$, автор показывает, что если условие $\bar{a}(t) \ll 1$, называемое усиленным условием линеаризации, выполнено, то условие $a(t) \ll 1$ справедливо для всех решений $a(t)$ системы (3) при любой начальной фазе $\varphi(0)$ и любой расстройке Δ.

Ю. А. Митропольский

7699. Динамика электрического звонка. Акаси, Леви (The motion of an electric bell. Akashi Hajima, Levy Sheldon). Amer. Math. Monthly, 1958, 65, № 4, 255—259 (англ.)

Уравнение движения системы в пренебрежении электромагнитной инерцией и потерями авторы записывают в виде

$$u'' + u = 0 \text{ при } i = 0, \qquad u'' + u = 1 \text{ при } i = i_0.$$

Последующее рассмотрение на фазовой плоскости указывает на существование предельного цикла.

Примечание референта. Более глубокое исследование вопроса содержится в работе Н. А. Фуфаева (РЖМат, 1956, 5268).

П. И. Кузнецов

7700. Об оценке качества нелинейных автоматических систем при случайных помехах. Попов Е. П., Автоматика и телемеханика, 1959, 20, № 10, 1313—1319

С помощью метода, представляющего собой совокупность методов статистической и гармонической линеаризации, исследуется влияние случайных помех на устойчивость и динамические качества нелинейных систем автоматического управления. Рассматривается нелинейная система автоматического управления, имеющая произвольную структуру, описываемая дифференциальным уравнением

$$Q(p)x + R(p)F(x) = S_1(p)f_1(t) + S_2(p)f_2(t), \tag{1}$$

где $F(x)$ — заданная нелинейность, $f_2(t)$ — случайная помеха с нулевым математическим ожиданием, $f_1(t)$ — регулярное внешнее воздействие, медленно меняющееся по сравнению с помехой, $Q(p), R(p), S_1(p), S_2(p)$ — операторные многочлены с постоянными коэффициентами ($p = d/dt$). Решение ищется в виде

$$x = x_м(t) + x_{сл}(t), \tag{2}$$

где $x_м(t)$ — регулярная составляющая или математическое ожидание, $x_{сл}(t)$ — центрированная случайная составляющая. Считая помеху $f_2(t)$ стационарным случайным процессом, решение $x_{сл}(t)$ полагается также стационарным случайным процессом, что базируется на медленном изменении математического ожидания $x_м(t)$ настолько, что его можно считать постоянным за возможные "периоды" изменения $x_{сл}(t)$. Это предположение соответствует рассмотрению случая высокочастотных помех по сравнению с возможными частотами изменения полезного сигнала. Используя, как и при гармонической линеаризации, свойства фильтра линейной части системы, случайные процессы в системе (1) автор приближенно характеризует двумя первыми статистическими моментами: математическим ожиданием (средним значением) и дисперсией, т. е.

$$F(x) = F_м + q_{сл}x_{сл}, \tag{3}$$

где для однозначных нелинейностей

$$F_м = \int_{-\infty}^{\infty} F(x_м + x_{сл})w(x)\,dx \tag{4}$$

при нормальном законе распределения

$$w(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_м}{\sigma_x}\right)^2} \quad (5)$$

где σ_x — среднеквадратическое значение случайной составляющей $x_{сл}$;

$$q_{сл} = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} F(x_м + x_{сл})\, x\, w(x)\, dx. \quad (6)$$

Подставляя (2) и (3) в уравнение (1), автор последнее разбивает на два уравнения:

$$Q(p)\, x_м + R(p)\, F_м = S_1(p)\, f_1(t), \quad (7)$$

$$Q(p)\, x_{сл} + R(p)\, q_{сл}\, x_{сл} = S_2(p)\, f_2(t), \quad (8)$$

соответственно для регулярной составляющей (математическое ожидание), которая является полезным сигналом, и для случайной составляющей (центрированной), которая соответствует помехе. Из уравнения (8), зная спектральную плотность внешней помехи $s_f(\omega)$, автор определяет дисперсию помехи на входе нелинейного звена σ_x^2. Подставляя σ_x в (3) и (7), автор получает нелинейное уравнение системы в целом для полезного сигнала в виде

$$Q(p)\, x_м + R(p)\, \Phi(x_м) = S_1(p)\, f_1(t), \quad (9)$$

отличающееся от уравнения (1) тем, что здесь отброшены помехи, но взамен заданной нелинейности $F(x)$ подставлена новая функция $\Phi(x_м)$, найденная для полезного сигнала с учетом влияния помех. Уравнение (9) исследуется с помощью обычных методов.

Ю. А. Митропольский

7701. Применение теории вычетов к приведению уравнений систем автоматического регулирования к каноническим переменным. Комарницкая О. И., Прикл. матем. и механ., 1959, 23, № 5, 845—850

Для уравнений системы прямого регулирования

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j + h_i\, f(\sigma), \quad \sigma = \gamma_1 z_1 + \ldots + \gamma_n z_n$$

$$(i = 1, \ldots, n),$$

а также для уравнений системы непрямого регулирования с помощью теории вычетов устанавливаются формулы линейного преобразования к каноническим переменным. При этом рассматривается самый общий случай структуры корней характеристического уравнения $|a_{ij} - \delta_{ij}\lambda| = 0$ относительно элементарных делителей. Статья является обобщением соответствующих результатов работ А. И. Лурье ("Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования", Гостехиздат, 1951) и Р. А. Спасского ("К преобразованию уравнений системы автоматического регулирования", Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1956, т. 125).

Р. А. Спасский

7702. Оптимальный выбор разрывной возмущающей силы. Бушоу (Optimal discontinuous forcing terms. Bushaw D.), Ann. Math. Studies, 1958, 4, № 41, 29—52 (англ.)

Рассматривается задача: для данной функции $g(x, y)$ построить такую функцию $\varphi(x, y)$, принимающую только значения 1 и —1, чтобы из произвольной точки области R плоскости (x, y) решение системы $\dot{x} = y$, $\dot{y} = \varphi(x, y) - g(x, y)$ попадало в точку $(0, 0)$ за наименьшее возможное время. Приводятся некоторые соображения о решении этой задачи в общем случае. В случае, когда функция $g(x, y)$ линейна, задача решается до конца.

Значительно более общие задачи были решены Л. С. Понтрягиным, В. Г. Болтянским, Р. В. Гамкрелидзе (РЖМат, 1957, 8685; 1958, 7764).

А. Ф. Филиппов

7703. Компромиссный подход к задаче выбора оптимального переходного процесса в следящей системе. Смит, Леондес (On a compromise approach to servomechanism dynamic response optimization. Smith C. L., Leondes C. T.), Proc. Nat. Electron. Conf. Vol. 14. (Chicago, Ill., 1958). Chicago, Nat. Electron. Conf., Inc, 1959, 100—122 (англ.)

Система регулирования описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Показано, что на основании этой системы можно, пользуясь понятием линии переключения, перейти к нелинейному уравнению второго порядка, при этом новая полученная система может иметь значительно лучшие характеристики (время переходного процесса и перерегулирование). Рассматриваются различные пути осуществления таких систем (непрерывное и разрывное изменение коэффициента демпфирования), их устойчивость, а также выясняются условия, при которых последние имеют решающие преимущества перед линейными. Даются практические рекомендации и схемы для практического осуществления таких систем.

Ю. П. Леонов

7704. Одна статистическая задача оптимального уравнения. Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С., Докл. АН СССР, 1959, 128, № 5, 890—892

Рассматривается функционал

$$\int_0^{\infty} h(\tau)\, \frac{\partial}{\partial \tau} (\psi_n(x, \sigma, \tau))\, d\tau, \quad (1)$$

где $h(\tau)$ — неотрицательная функция, не превосходящая единицы, а $\psi_n(x, \sigma, \tau)$ — вероятность того, что случайная точка n-мерного ($n > 2$) пространства, распределение вероятности которой подчиняется первому дифференциальному уравнению А. Н. Колмогорова (коэффициенты которого подчинены некоторым естественным условиям положительности и ограниченности) и которая в момент σ находится в положении x, на отрезке времени $\sigma \leqslant t \leqslant \tau$ встретится с ε-окрестностью точки z, движущейся согласно системе уравнений $\dot{z} = f(z, u)$, где u—параметр, могущий меняться в пределах некоторой заданной области r-мерного векторного пространства. Требуется подобрать изменение параметра в зависимости от времени t таким образом, чтобы функционал (1) принимал экстремальное значение. Основной результат работы состоит в том, что главный член функционала $\psi_n(x, \sigma, \tau)$ имеет вид: $\varepsilon^{n-2} \varphi_n(x, \sigma, \tau)$, где $\varphi_n(x, \sigma, \tau)$ — некоторая функция, допускающая вычисления в явном виде.

М. М. Постников

7705. Нелинейные проблемы теории регулирования. Магнус (Nichtlineare Probleme der Regelungstheorie. Magnus K.), Z. angew. Math. und Mech., 1959, 39, № 9-11, 400—401 (нем.)

Дается краткий обзор современного состояния проблемы.

7706. Отражение и преломление ударных волн на границе двух сред. I. Случай нормального падения. Губанов А. И., Ж. техн. физ., 1958, 28, № 9, 2035—2040

Рассматривается нормальное падение ударной волны на контактную поверхность двух произвольных сред, случай отражения ударной волны. Соотношения на фронте ударной волны в каждой из сред считаются известными. Из равенства давлений и скоростей на контактной поверхности получено общее уравнение для

определения давления за фронтом отраженной ударной волны. Даются приближенные формулы для слабой ударной волны и случаев, когда контактная поверхность разделяет два идеальных газа, две слабо или сильно отличающиеся произвольные среды. В. А. Сучков

7707. О движении вязкой жидкости на вращающемся шаре. Лебедкина Л. Г., УзССР Фанлар Акад. ахборати, Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем. н., 1959, № 2, 38—46 (рез. узб.)

Рассматривается задача о стационарном движении сферического слоя вязкой несжимаемой жидкости. На внутренней границе слоя ставится условие прилипания к твердому, вращающемуся с постоянной угловой скоростью ω шару радиуса a. На внешней границе слоя (при $r = a + l$) заданы касательные напряжения, направленные вдоль параллелей и не зависящие от долготы. Проекции скорости на оси сферических координат записываются в виде $v_r = w$, $v_\varphi = v$, $v_\lambda = \omega r \sin\vartheta + u$. Для u, v, w рассматривается линеаризованная система уравнений Навье — Стокса. Решение строится в виде рядов по степеням малого параметра ω. Для функций u, v, w находятся первые два члена таких рядов, причем граничные условия выполняются приближенно с точностью до 4-й степени отношения l/a. Исследуется поведение полученного решения. Особо рассматривается частный случай касательных напряжений, соответствующий, по словам автора, в общих чертах распределению широтной составляющей ветра над Атлантическим и Тихим океанами. Б. В. Русанов

7708. Плоская нелинейная задача об установившемся движении смазки между шипом и подшипником. Никитин А. К., Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Механ. и машиностр., 1959, № 4, 11—21

Рассматривается задача установившегося движения смазки между эксцентрично расположенными подвижным круговым шипом и неподвижным круговым подшипником. Считая заполненным жидкостью все пространство между шипом и подшипником, автор ищет функцию тока ψ как решение уравнения

$$\nu\Delta\Delta\psi = \frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\Delta\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

при заданных значениях ψ и ее нормальной производной на поверхности шипа и подшипника. При помощи бигармонической функции Грина задача приводится к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению, для которого методом последовательных приближений доказывается теорема существования и единственности решения при некотором достаточном условии, наложенным на граничные данные и область движения. В соответствии с этим решение строится в виде ряда по положительным степеням числа Рейнольдса. С точностью до третьего приближения определяются коэффициенты разложения и исследуется воздействие жидкости на шип. При определении коэффициентов разложения используются биполярные координаты. Д. Е. Долидзе

7709. Об одном новом методе интегрирования нелинейного уравнения для вертикальной составляющей вихря скорости. Добрышман Е. М., Цисян сюэбао, Acta meteorol. sinica, 1959, **30**, № 2, 121—136 (кит.; рез. русск.)

7710. Неустановившийся асимптотический пограничный слой на бесконечной пористой пластине. Регирер С. А., Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Механ. и машиностр., 1959, № 4, 136—139

Система уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

описывающая нестационарное движение вязкой жидкости вдоль бесконечной пластины, при наличии однородного отсоса заменой независимой переменной $z = y + q$, $q = \int_0^t v(t)\,dt$ сводится к системе

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Приводится несколько примеров решений этих уравнений методом преобразования Лапласа. В. А. Меркулов

7711. Влияние поддерживающих сил на некоторые вязкие потоки со всасыванием. Гупта (Effect of buoyancy forces on certain viscous flows with suction. Gupta A. S.), Appl. Scient. Res., 1959, **A18**, № 4, 309—320 (англ.)

Рассматривается движение плоской пористой пластинки внутри вязкой несжимаемой жидкости с теплопроводностью и при действии силы тяжести. Направление движения пластинки перпендикулярно к горизонтальной линии кромки пластинки. Ось x направлена по направлению движения, ось y перпендикулярна к плоскости пластинки. Тогда проекция скорости на ось y равна $v = V_0(t)$, где V_0 — скорость проницаемости стенки. Для проекции скорости на ось x и температуры T автор пишет следующие уравнения пограничного слоя:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \rho g\sin\alpha\cdot\beta(T - T_\infty),$$

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2},$$

где α — угол наклона пластинки с горизонтом, β — коэффициент объемного расширения. Эти уравнения при заданных граничных условиях и при равновесном начальном состоянии решаются в следующих предположениях: 1) $V_0 = \text{const}$, скорость пластинки пропорциональна e^{ct}; 2) $V_0 = ct^{-1/2}$, скорость пластинки пропорциональна t^m. В обоих случаях уравнения приводятся к обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям. Даются некоторые заключения относительно влияния пористости на изменение скорости течения и силы трения в случае равноускоренного движения пластинки. Рассматривается также вопрос влияния пористости и действия силы тяжести на силу трения при стационарном течении сжимаемой жидкости вдоль пластинки, когда гидродинамические элементы зависят только от y. Д. Е. Долидзе

7712. О колебании тел, плавающих в водоеме ограниченных размеров. Моисеев Н. Н., Докл. АН СССР, 1957, **114**, № 6, 1180—1183

Рассматривается линейная задача о колебаниях около положения равновесия системы n тел, плавающих на поверхности ограниченного объема жидкости. Приводится система уравнений, описывающая движение системы из n тел и жидкости. Эта система состоит из уравнений количества движения, уравнений моментов и уравнения, обеспечивающего постоянство давления на свободной поверхности жидкости.

Утверждается, что существует полная система главных колебаний; дается необходимый и достаточный критерий устойчивости системы; приводится уравнение для определения частот колебаний; утверждается, что спектр частот является простым. Методом Фурье решается задача об определении движения по начальным данным. Указывается, что все результаты получаются методами, развитыми в работах автора (Моисеев Н. Н., Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1954, № 7) и автора и референта (Крейн С. Г., Моисеев Н. Н., Прикл. матем. и механ., 1957, № 2). С. Г. Крейн

7713. Распространение волн на границе упругого полупространства, вызываемых волнами жидкости в бассейне со скачкообразно меняющейся глубиной. Ставровский А. С., Докл. АН СССР, 1959, **126**, № 4, 763—766

Изучается плоская задача о влиянии мгновенных поднятий жидкости, заполняющей полубесконечный бассейн конечной глубины, на смещение точек подстилающей суши. Предполагается наличие глубоководной и мелководной частей бассейна, которые трактуются в виде двух прямоугольных уступов глубины h_1 и h_2. Рассматривается прямоугольное поднятие жидкости, возникающее в момент $t=0$ на некотором расстоянии от берега и затем распространяющееся в противоположные стороны. Если пренебречь высотами h_1 и h_2 по сравнению с размерами земли, а также влиянием боковых давлений жидкости на упомянутые уступы, то проблема сводится к динамической задаче теории упругости для полуплоскости при условии, что при $t>0$ на части границы, $x>0$, задана нормальная нагрузка. Решение проводится методом интегральных преобразований.

В. А. Свекло

7714. Аналитическое исследование движения воды в мелком море. Данциг (Einige analytische Ergebnisse über die Wasserbewegung in einem untiefen Meere. Dantzig D. van), Z. angew. Math. und Mech., 1959, **39**, № 5-6, 169—179 (нем.)

В § 1 выписываются уравнения движения воды, полученные в обычных предположениях теории приливов

$$\partial \mathbf{u}/\partial t + \lambda \mathbf{u} - \Omega \times \mathbf{u} + c^2 \nabla w = \mathbf{F} \qquad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} + \partial w/\partial t = 0.$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор горизонтальной скорости частиц жидкости, λ — коэффициент трения, $\frac{1}{2}\Omega$ — угловая скорость вращения Земли, $c=\sqrt{gh}$, g — ускорение силы тяжести, h — глубина жидкости в положении равновесия, $w(x\ y,\ t)$ — отклонение свободной поверхности от равновесного состояния, $\mathbf{F}(x,\ y,\ t)$ — вектор, описывающий силу ветра.

Преобразованием Лапласа по t и исключением компонент вектора $\mathbf{v}$ автор приходит к неоднородной задаче Пуанкаре для уравнения

$$\partial^2 w/\partial x^2 + \partial^2 w/\partial y^2 - \varkappa w = c^2 F, \qquad (2)$$

где $\varkappa$ и F — некоторые заданные функции переменных x и y и оператора $p=\frac{\partial}{\partial t}$. Основное содержание статьи посвящено исследованию фундаментальных решений краевой задачи для уравнения (2), изучению свойств функции Грина и анализу некоторых частных решений (1), соответствующих фундаментальным решениям уравнения (2).

Н. Н. Моисеев

7715. Об асимптотике осесимметричной расходящейся волны в тяжелой жидкости. Иорданский С. В., Докл. АН СССР, 1959, **125**, № 6, 1211—1214

См. РЖМех, 1960, № 2, 1984.

7716. О работах по распространению нестационарных волн (звуковых, сейсмических и т. п.), выполненных в Ленинграде за 1950—1955 гг. Петрашень Г. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, **3**. М., 1958, 566—570

Доклад является кратким обзором работ, выполненных Г. И. Петрашенем и его учениками за период 1950—1955 гг. Указано, что эти работы выполнялись в связи с задачами теоретической сейсмологии. Теоретические исследования велись в следующих направлениях: 1) изучались законы распространения нестационарных волн в слоисто-изотропных средах с плоскопараллельными границами раздела, 2) изучались процессы распространения волн в упругих средах, содержащих цилиндрические или сферические границы раздела, 3) изучались волны в неоднородных средах, 4) изучалась дифракция волн от углов и полубесконечных экранов. Далее приводится краткая характеристика так называемого метода неполного разделения переменных, который применялся в большинстве работ.

Изложение ведется на примере осесимметрических задач для слоисто-изотропных сред с плоскими границами раздела. В основе метода лежит то обстоятельство, что после применения преобразования Лапласа (по времени) и преобразования Фурье — Бесселя по $\rho\ (=\sqrt{x^2+y^2})$ задача сводится к легко разрешимым обыкновенным дифференциальным уравнениям с переменной z в качестве аргумента. После перехода от „изображений" к „оригиналам" получается представление решения, весьма удобное для изучения.

В. М. Бабич

7717. Задачи типа Лэмба для волнового уравнения в линейно-неоднородном полупространстве. Алексеев А. С., Уч. зап. ЛГУ, 1958, № 246, 167—227

Методом неполного разделения переменных строится решение двух нестационарных граничных задач для волнового уравнения в полупространстве, скорость распространения волн в котором линейно возрастает с расстоянием от границы. На свободной поверхности задается искомая функция или ее нормальная производная. Начальные условия предполагаются нулевыми. Из решения задачи, представленного интегралами Фурье — Бесселя от интегралов Меллина, с помощью асимптотических соотношений для функций Ханкеля от комплексного значка выделяются особенности волнового поля вблизи фронтов. Отмечено, что в окрестности каустических поверхностей тип разрыва решения меняется (например, в случае трех пространственных координат, после прохождения области каустики конечный скачок переходит в логарифмический разрыв).

В. М. Бабич

7718. Распространение нестационарных волн и каустики. Бабич В. М., Уч. зап. ЛГУ, 1958, № 246, 228—260

Пусть волновой процесс описывается уравнением $\frac{1}{c^2(x,\ y)} u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0$ с переменной скоростью $c(x,\ y)$, достаточно гладкой и удовлетворяющей условию $0 < c(x,\ y) < \psi(r)$, где $\int_0^\infty \frac{dr}{\psi(r)} < +\infty$. В окрестности волнового фронта с уравнением $\tau(x,\ y)=0$ для фиксированного момента времени $t=0$ построим поле экстремалей интеграла $\int \frac{ds}{c}$, ортогонально пересекающих кривую $\tau(x,\ y)$. Волновые фронты и построенные экстремали (лучи) образуют естественную координатную сеть $(\alpha,\ \tau)$ ($\alpha=\text{const}$ дает луч, $\tau=\text{const}$ — волновой фронт). Допустим, что переход от координат $\alpha,\ \tau$ к $x,\ y$ осуществляется по формуле $\mathbf{x}=\mathbf{x}(\alpha,\ \tau)$. Каустикой называется геометрическое место точек $\mathbf{x}_\alpha=0$.

В работе установлены некоторые соотношения геометрического характера, связанные с каустиками. В частности доказано, что если на волновом фронте, соответствующем центральному полю лучей, в некоторый момент времени возникла особенность $\mathbf{x}_\alpha=0$, то в последующие моменты времени эта особенность на фронте волны всегда имеется. На примере частных задач замечено, что при переходе через каустику тип разрыва на фронте волны меняется: скачок решения преобразуется в логарифмический разрыв. В работе показано, что это явление имеет общий характер по крайней мере для процессов, описываемых рассмотренным уравнением.

А. С. Алексеев

7719. О распространении упруго-пластических волн в полупространстве. Рахматулин Х. А., Прикл. матем. и механ., 1959, **23**, № 3, 419—424

Рассматривается приближенный метод решения задачи о распространении упругих волн в полупространстве $z \geqslant 0$ при действии нормального к границе давления. С учетом превалирующего значения перемещения w в на-

правлении оси oz составляется сначала точное уравнение для этой величины, которое затем „исправляется“ до волнового. Полученное таким образом уравнение решается с учетом граничных условий по методу Релея. Утверждается, что получаемые при этом результаты оказываются более близкими к тому, что имеет место в действительности. Более подробно рассмотрен случай мгновенного включения постоянной во времени осесимметричной нагрузки (упругая стадия деформации). Изучены три возможные формы области влияния. Полученные результаты прилагаются далее к изучению распространения в том же полупространстве упруго-пластических волн. При этом для схемы Прандтля выписывается уравнение движения с разрывной скоростью. Наиболее простое уравнение получается в случае жестко-пластического тела. В. А. Свекло

7720. Волна пластичности. Кабулов В. К., УзССР Фанлар Акад. ахбороти, Изв. АН УзССР. Сер. техн. н., 1959, № 3, 13—25

Исследуется динамический упруго-пластический изгиб балок, причем за основу берется зависимость между моментами и кривизнами, материал балки предполагается упрочняющимся. Таким образом, балка делится по длине на участки, одни из которых являются чисто упругими, а другие — чисто пластическими. Решение ищется по методу Галеркина путем разложения выражений для прогибов w на каждом участке в ряды вида

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\, T_n(t).$$

Следует заметить, что на границах между упругими и пластическими областями непрерывны не только моменты, но и кривизны. Поэтому формулы (9), (10), из которых следует разрывность кривизны, являются ошибочными. В данной задаче исследуется простейшее, неволновое уравнение изгиба балки, поэтому термин „волна пластичности“, примененный автором, вряд ли уместен. Г. С. Шапиро

7721. Пример решения плоской задачи теории упругости. Брчић (Прилог решењу равног проблема теорије еластичности. Брчић Влатко), Зб. Грађевинског фак. Ун-т Београду, 1958, № 4, 59—111 (сербохорв., рез. франц.)

Исследуется частный случай плоской задачи теории упругости изотропного тела для области с двумя осями симметрии, форма которой соответствует форме одной детали палубы корабля. Область состоит из двух одинаковых прямоугольников (полос) с соответственно параллельными сторонами, соединенных в одно целое третьим, средним, более коротким прямоугольником, т. е. имеет сходство с двутавровым профилем; входящие углы предполагаются слегка закругленными. Нагрузка задается в виде усилий одинаковой интенсивности, нормальных и распределенных равномерно по коротким сторонам крайних прямоугольников; обе свободные стороны среднего прямоугольника (перемычки) не загружены и не закреплены. Для решения задачи применены 3 метода: 1) метод сеток, основанный на замене дифференциальных формул и уравнений плоской задачи — формулами и уравнениями в конечных разностях; 2) экспериментальный метод — оптический метод исследования напряжений и 3) метод Н. И. Мусхелишвили, основанный на комплексном представлении напряжений с помощью двух функций комплексного переменного. Методом сеток задача решена с различной степенью точности и с учетом закругления входящих углов. Экспериментальное исследование проведено на плоских моделях из прозрачного оптически активного материала в поляризованном свете (на установках типа „Föppl“ и „Galileo“); получены и исследованы изоклины, изохромы (линии одинаковых наибольших касательных напряжений), траектории главных напряжений и определены численные значения напряжений по важнейшим сечениям. Используя метод Н. И. Мусхелишвили, автор заменяет данную область областью в виде двух бесконечных полос, соединенных прямоугольником, с закругленными входящими углами, и применяет конформное отображение ее на круг. Отображающая функция получается из формулы Кристоффеля — Шварца и имеет в конечном счете вид степенного ряда, причем автор сохраняет по 3 — 4 члена ряда и тем самым вместо нужного контура получает близкий к нему. Рассмотрены различные отношения сторон среднего прямоугольника, для которых приведены результаты вычислений. Проводится сопоставление численных результатов для напряжений, полученных указанными тремя методами. Весь материал работы изложен весьма подробно и обстоятельно и иллюстрирован многочисленными чертежами и схемами. Ряд параграфов посвящен изложению общей теории плоской задачи, физических основ и техники оптического эксперимента и содержит основные факты из истории этих проблем. В конце работы имеются выводы и библиография, содержащая 38 названий. С. Г. Лехницкий

7722. Изгиб полубесконечной плиты на комбинированном упругом основании. Попов Г. Я., Докл. АН СССР, 1959, **126**, № 3, 534—537

Полубесконечная плита ($x \geqslant 0$, $-\infty < y < \infty$), нагруженная по прямой $x = b$ по закону $\cos \lambda y$, покоится на упругом полупространстве, имеющем свойства винклерова упругого основания. Даются формулы для распределения давления $p(x, y)$ под плитой и прогиба $w(x, y)$ в форме определенных интегралов $\int_0^{\infty} \Psi(x, \lambda) \cos \lambda y d\lambda$, причем выражения лапласовых трансформант $\Psi(x, \lambda)$ также представлены определенными интегралами весьма сложного вида. А. И. Лурье

7723. О напряженном состоянии полого кругового цилиндра. Хрусталев А. Ф., Коган Б. И., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 4, 178—183

Дается решение осесимметричной задачи теории упругости для бесконечного полого кругового цилиндра, на внутренней поверхности которого на половине длины задана следующая связь между радиальными напряжениями σ_r и радиальными перемещениями u: $\alpha\sigma_r + \beta u = \gamma$ (α, β и γ постоянные). Функция напряжений Лява представляется в форме

$$\varphi(\rho, \lambda) = \int_{-i\infty}^{0-; +i\infty} \varphi_0(\rho, \lambda, m)\, dm,$$

где φ_0 — решение бигармонического уравнения осесимметричной задачи в цилиндрических функциях, ρ и λ — безразмерные координаты точек области цилиндра, m — комплексный параметр. Исследуется сходимость несобственного интеграла, представляющего функцию φ. При частных значениях α, β и γ указываются выражения для напряжений σ_r и перемещений u в области концентрации — в месте перехода от ненагруженной поверхности к нагруженной (при малом λ). К. В. Соляник-Красса

7724. Упругое равновесие стержня, обладающего цилиндрической анизотропией, под действием нагрузки, равномерно распределенной по длине. Уздалев А. И., Инженерный сб., 1958, **26**, 148—160

Рассматривается упругое равновесие цилиндрического или призматического бруса, обладающего цилиндрической анизотропией, нагруженного по поверхности усилиями, не зависящими от z, т. е. распределенными по длине равномерно, а по контуру поперечного сечения — произвольно. Исследуется только частный случай анизотропии, когда материал является ортотропным и, кроме того, коэффициенты Пуассона для радиального и тангенциального направлений, соответствующие растяжению в осевом направлении z, одинаковы. Такая анизотропия характеризуется восемью независимыми упру-

гими константами. Автор исходит из основной системы уравнений равновесия упругого тела с анизотропией данного типа при малых деформациях и применяет полуобратный метод: полагает, что из 6 составляющих напряжений 3 не зависят от z, 2 являются линейными функциями, а σ_z — квадратичной функцией z. Вводятся 3 функции напряжений F, Ψ_1, Ψ_2, удовлетворяющие уравнениям равновесия сплошной среды. Автор, определяя перемещения из уравнений обобщенного закона Гука (путем интегрирования) и учитывая условия их совместности, заключает, что F удовлетворяет неоднородному уравнению 4-го порядка, а Ψ_1, Ψ_2 — неоднородным уравнениям 2-го порядка и граничным условиям. Дано общее решение задачи о распределении напряжений в полом круговом цилиндре (трубе), на который действуют поверхностные усилия, заданные в виде рядов Фурье; решение также получается в виде рядов. Более подробно рассмотрен частный случай — упругое равновесие трубы с одним закрепленным концом, погруженной в жидкость. Даны явные формулы для напряжений и приведены результаты вычислений для материала с упругими постоянными сосны. Имеющиеся в работе графики распределения напряжений по радиальным сечениям показывают, что, несмотря на сравнительно большое различие между упругими постоянными сосны для разных направлений, напряжения мало отличаются от соответствующих напряжений в трубе из изотропного материала. С. Г. Лехницкий

7725. Изопериметрические неравенства для неоднородных заделанных стержней и пластинок. Бисак (Isoperimetric inequalities for the nonhomogeneous clamped rod and plate. Beesack Paul R.), J. Math. and Mech., 1959, 8, № 4, 471—482 (англ.)

Обобщаются результаты Пойа и Сегё (Polya G., Szegö G. Isoperimetric inequalities in mathematical physics, Princeton, 1951) об экстремальных частотах основных тонов неоднородных струн и мембран при варьировании распределения масс. Здесь доказываются аналогичные результаты для уравнений 4-го порядка.

Теорема 1. Пусть $p(x)$ непрерывна и положительна для $-a \leqslant x \leqslant a$, $p^-(x)$ и $p^+(x)$ — четные функции, равноизмеримые с $p(x)$ (т. е. такие, что лебеговы меры множеств $\{x : p > d\}$, $\{x : p^- > d\}$, $\{x : p^+ > d\}$ одинаковы для каждого d), причем $p^-(x)$ убывает, а $p^+(x)$ возрастает для $x > 0$. Пусть, далее, λ, λ^-, λ^+ означают соответственно наименьшие собственные значения для краевых задач:

$$u^{IV} - \lambda p(x)\, u = 0, \quad u(\pm a) = u'(\pm a) = 0,$$

$$u^{IV} - \lambda^- p^-(x)\, u = 0, \quad u(\pm a) = u'(\pm a) = 0,$$

$$u^{IV} - \lambda^+ p^+(x)\, u = 0, \quad u(\pm a) = u'(\pm a) = 0.$$

Тогда $\lambda^- \leqslant \lambda \leqslant \lambda^+$.

Теорема 2. Пусть D — область плоскости x, y, ограниченная самонепересекающейся гладкой кривой C, и $p(x, y)$ непрерывна и положительна в $\overline{D} \setminus C$. Обозначим через $\overline{D}$ круг: $0 \leqslant x^2 + y^2 = r^2 < A/\pi$, где A — площадь D, и через $\overline{C}$ — границу этого круга (окружность радиуса $r = R_0$). Пусть, далее, $p^-(x, y) = p^-(r)$ — функция, равноизмеримая с $p(x, y)$ (по плоской лебеговой мере) и определенная в $\overline{D} \setminus \overline{C}$, причем $p^-(r)$ убывает для $r > 0$. Тогда, если λ означает наименьшее собственное значение краевой задачи $\nabla^4 u - \lambda p(x, y)\, u = 0$, $u(C) = \partial u(C)/\partial n = 0$, и если соответствующая собственная функция не меняет знака в D, то $\lambda \geqslant \lambda^-$, где

$$\lambda^- = \inf \left\{ \iint_{\overline{D}} (\nabla^2 v)^2 \, d\sigma \right\} \Big/ \left\{ \iint_{\overline{D}} p^- v^2 \, d\sigma \right\},$$

инфинум берется в классе всех функций $v(x, y)$, непрерывных вместе со своими частными производными первого порядка в $\overline{D} \setminus \overline{C}$ и таких, что $\nabla^2 v$ интегрируем с квадратом в $\overline{D}$ по Лебегу, и $v(\overline{C}) = \partial v(\overline{C})/\partial n = 0$. Аналогичное утверждение (теорема 3) доказывается для $p^+(r)$. В. И. Левин

7726. Несимметричное давление на упругое полупространство жесткого кругового в плане штампа с поверхностью, изображаемой некоторым полиномом относительно декартовых координат. Довнорович В. И., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 3, 111—118

См. РЖМех, 1960, 4, 4993.

7727. О некотором свойстве термоупругих сред. Зорский (On a certain property of thermoelastic media. Zorski H.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. techn., 1958, 6 № 6, 327—330 (англ., рез. русск.)

Рассмотрена динамическая задача термоупругости для неограниченной среды, начальная температура которой во всех точках равна нулю. При решении задачи предполагалось, что температурные перепады в среде появляются лишь в связи с расходом тепловой энергии на деформирование среды. Автор показывает, что напряжения в данный момент времени и в данной точке пространства зависят лишь от объемной деформации во всем пространстве, вычисленной за промежуток времени от начала процесса до рассматриваемого момента.

М. С. Ага

7728. Сингулярные решения для термоупругой среды. Зорский (Singular solutions for thermoelastic media. Zorski H.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. techn., 1958, 6, № 6, 331—339 (англ., рез. русск.)

Рассмотрена динамическая задача термоупругости для бесконечного пространства, в котором имеется точечный источник тепла. При постановке задачи учитывался расход тепловой энергии на деформирование среды, а также предполагалось, что в начальный момент времени вектор перемещения, его производная по времени и температура в любой точке пространства равны нулю. Математически задача ставилась следующим образом: требуется найти вектор перемещения $\mathbf{u}(P, t)$ и температурную функцию $T(P, t)$ для любой точки P пространства, являющиеся решением системы уравнений

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + k \nabla T,$$

$$a^2 \Delta T = \frac{\partial T}{\partial t} + b^2 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{1}{\rho c_v} \delta(t_0)\, \delta(P - P_0),$$

удовлетворяющим начальным условиям

$$\mathbf{u}(P, 0) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(P, 0) = T(P, 0) = 0.$$

При решении задачи было принято предположение, что перемещения очень малы, вследствие чего можно в уравнениях пренебречь инерционными членами. В этом предположении в работе получены сингулярные решения для $\mathbf{u}$ и T. Также рассмотрен случай, когда никаких источников тепла нет, но имеется импульсивная сосредоточенная сила. М. С. Ага

7729. Термические нестационарные напряжения, выступающие в бесконечном цилиндре с прямоугольным и круговым сечением. Новацкий (Non-steady state thermal stresses in an infinite cylinder of rectangular or circular cross-section. Nowacki W.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. techn., 1958, 6, № 6, 321—326 (англ., рез. русск.)

Рассматривается задача нахождения термоупругих напряжений в бесконечных цилиндрах с прямоугольным и круговым поперечными сечениями. При этом предполагается, что в начальный момент времени цилиндры нагреты до температуры $T_0 = \text{const}$, а затем граничные поверхности цилиндров поддерживаются при нулевой

температуре. Температурные функции находятся в форме двойного (для случая прямоугольного сечения) или простого (для случая кругового сечения) рядов Фурье. Для определения термоупругих напряжений вводятся термоупругий потенциал и функция Эйри, а окончательные выражения для напряжений также представляются в форме двойного (для случая прямоугольного сечения) и простого (для случая кругового сечения) рядов Фурье. Вопросы сходимости полученных рядов в работе не обсуждаются. М. С. Ага

7730. Напряженное состояние в упругом слое, вызванное действием стационарного источника тепла. Новацкий (The state of stress in an elastic slab due to a steady heat source. Nowacki W.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. techn., 1958, **6**, № 6, 301—308 (англ., рез. русск.)

Рассматривается задача определения термонапряженного состояния плоского бесконечного слоя толщины h, вызванного действием сосредоточенного стационарного источника тепла. Выберем оси цилиндрической системы координат так, чтобы ось or лежала в одной из граничных плоскостей слоя, а ось oz была направлена внутрь слоя. Тогда уравнения граничных плоскостей будут $z=0$ и $z=h$. Пусть в точке $(0, \zeta)$ расположен сосредоточенный стационарный источник тепла мощностью W. Пусть также граничные плоскости поддерживаются при нулевой температуре. В этом случае температурная функция $T(r, z)$ должна быть решением уравнения $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=-\frac{W}{\lambda}\frac{\delta(r)}{\pi r}\delta(z-\zeta)$, удовлетворяющим граничным условиям $T(r, 0)=0$, $T(r, h)=0$. Здесь λ — коэффициент температуропроводности, а δ — функция Дирака. Температурная функция $T(r, z)$ находится в форме ряда Фурье, каждый член которого выражается с помощью интеграла Ханкеля. Термоупругие напряжения определяются в предположении, что граничные плоскости $z=0$ и $z=h$ свободны от напряжений. При решении задачи автор применяет термоупругий потенциал и вводит функцию Лава. В окончательном виде термоупругие напряжения выражаются посредством несобственных интегралов Ханкеля, сходимость которых не обсуждается. М. С. Ага

7731. Два случая разрывного поля температуры в упругом пространстве и полупространстве. Игначак, Новацкий (Two cases of discontinous temperature field in an elastic space and semi-space. Ignaczak J., Nowacki W.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. techn., 1958, **6**, № 6, 309—319 (англ., рез. русск.)

Рассматривается задача определения термоупругих напряжений в упругом пространстве и полупространстве для двух специальных случаев распределения температуры. В первом случае предполагается, что внутри некоторого параллелепипеда температура постоянна, а вне его равна нулю. Решение этой задачи получается в замкнутой форме с помощью аппарата термоупругого потенциала. Во втором случае предполагается, что внутри некоторого цилиндра конечных размеров температура постоянна, а вне цилиндра равна нулю. В последнем случае термоупругие напряжения выражаются посредством интегралов Фурье — Ханкеля. Показано также, что в этом случае напряжения могут быть представлены с помощью эллиптических интегралов или функций Лежандра. М. С. Ага

7732. Диаграммы направленности для щелевой антенны на эллиптическом цилиндре. Уэйт, Минтка (Calculated patterns of slotted elliptic-cylinder antennae. Wait James R., Mientka Walter E.), Appl. Scient. Res., 1959, **B7**, № 6, 449—462 (англ.)

Рассматривается антенна в виде узкой продольной щели конечной длины на бесконечном идеальнопроводящем эллиптическом цилиндре. Используя результаты более ранней работы (Wait J., R., J., Appl. Phys., 1955, **26**, 458), авторы получили диаграммы направленности для различных значений отношения полуосей цилиндра. Производится их сравнение с диаграммами направленности для щели на круглом цилиндре и на полосе. Отмечается, что для достаточно больших (по сравнению с длиной волны) полуосей эллиптического цилиндра диаграммы направленности зависят, главным образом, от кривизны поверхности вблизи щели. Н. Н. Говорун

7733. О решении задачи Коши для кинетического уравнения электронной плазмы. Иорданский С. В., Докл. АН СССР, 1959, **127**, № 3, 509—512

Кинетическое уравнение для электронов в плазме в одномерном случае может быть записано следующим образом:

$$\frac{\partial n}{\partial t}+v\frac{\partial n}{\partial x}-\frac{e}{m}E(x, t)\frac{\partial n}{\partial v}=0, \qquad (1)$$

где E определяется из уравнения

$$\frac{\partial E}{\partial x}=-4\pi e\left\{\int_{-\infty}^{\infty}n(v, x, t)\,dv-N_0\right\}.$$

Здесь N_0 — плотность положительных ионов, предполагаемая постоянной. Магнитное поле считается равным нулю. Автор называет задачей Коши для системы уравнений (1) — (2) следующую задачу: требуется найти функции $n(v, x, t)$ и $E(x, t)$, удовлетворяющие уравнениям (1) — (2) такие, что $n\mid_{t=0}=f(x, v)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}E=0$, где $f(x, v)>0$ непрерывная функция, заданная на всей плоскости x, v. В работе исследуется случай, когда полный заряд электронов и ионов равен нулю:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}f(x, v)\,dv-N_0\right\}dx=0. \qquad (3)$$

Кроме того, предполагается, что существует предельная функция

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x, v)=N(v) \quad \left(\int_{-\infty}^{+\infty}N(v)\,dv=N_0\right) \qquad (4)$$

такая, что

$$|f(x, v)-N(v)|<k(v)\varphi(x) \quad (0<N(v)<k(v)), \qquad (5)$$

здесь функция $\varphi(x)$ ограничена, $k(v)$ монотонно убывает с ростом $|v|$, причём

$$\int_{-\infty}^{+\infty}k(v)\,v^2dv<\infty, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx<\infty.$$

Автор сводит поставленную задачу к некоторому нелинейному интегральному уравнению и доказывает теорему: Решение задачи Коши для системы уравнений (1)—(2) существует при любой непрерывной функции $f(x, v)=n\mid_{t=0}$, удовлетворяющей условиям (4) и (5). Это решение единственное. Д. П. Костомаров

7734. Одна задача нестационарной теплопроводности. Зарубин В. С., Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Энерг. и автоматика, 1959, № 2, 38—44

Оболочка жидкостного реактивного двигателя рассматривается как две параллельные плоские стенки, между которыми движется охлаждающая жидкость. Предполагается, что удельный тепловой поток q_2, идущий на подогрев охлаждающей жидкости, пропорционален температуре жидкости на охлаждаемом участке:

$$q_2=q_{2\max}\frac{t_2-t_{2\min}}{t_{2\max}-t_{2\min}},$$

где $q_{2\max}$ — наибольший удельный поток на данном участке, $t_{2\max}$ — наибольшая температура охлаждающей

жидкости на данном участке, $t_{2\min}$ — температура жидкости на входе в охлаждающий тракт двигателя. Для упрощения задачи, чтобы избежать громоздких выкладок, предполагается, что

$$t_2 = t_{2^*} - (t_{2^*} - t_{20})\, e^{-k\tau}. \qquad (1)$$

Для случая запуска двигателя $t_{20} = t_{2\min}$ и $t_{2^*} = t_{2\max}$, а для случая остановки $t_{20} = t_{2\max}$ и $t_{2^*} = t_{2\min}$. При сделанных предположениях решение для внутренней стенки определяется уравнением

$$\frac{\partial t'(x', \tau)}{\partial \tau} = a' \frac{\partial^2 t'(x', \tau)}{dx'^2}$$

с граничными условиями

$$-\lambda' \frac{\partial t'(1/2 h', \tau)}{\partial x'} + \alpha_1 [t_1^* - t_1'(1/2 h', \tau)] = 0,$$

$$\lambda' \frac{\partial t'(-1/2 h', \tau)}{\partial x'} + \alpha_2' [t_2 - t'(-1/2 h', \tau)] = 0$$

и начальным условием $t'(x', 0) = t_0' + Dx'$. (Ось ox' выбрана нормально к стенке и направлена внутрь двигателя; начало координат выбрано на средине расстояния между поверхностями оболочки.) Для внешней стенки ось ox'' располагается также нормально и начало координат помещается на внешней поверхности стенки. Решение для температурного распределения во внешней стенке определяется уравнением, аналогичным (2), с граничным и начальными условиями

$$\frac{\partial t''(0, \tau)}{\partial x''} = 0, \quad -\lambda'' \frac{\partial t''(h'', \tau)}{\partial x''} + \alpha_2'' [t_2 - t''(h'', \tau)] = 0,$$

$$t''(x'', 0) = t_0''.$$

Решения для функций t' и t'' находятся операционным методом с применением преобразования Лапласа.

После того, как найдены функции t' и t'', параметр k из выражения (1), вошедший в выражения для этих функций через граничные условия, находится из балансового уравнения:

$$\int_0^\infty \lambda' \frac{\partial t'(-1/2 h', \tau)}{\partial x'} d\tau = \int_0^\infty \lambda'' \frac{\partial t''(h'', \tau)}{\partial x''} d\tau + \int_0^\infty q_c d\tau + \int_0^\infty c_c m_c \frac{dt_c(\tau)}{d\tau} d\tau,$$

где m_c — вес элементов связи между стенками, приходящийся на единицу охлаждаемой поверхности, c_c и $t_c(\tau)$ — весовая теплоемкость материала и температура элементов связи.

Приводится пример численного расчета нестационарной теплопередачи для случая запуска двигателя на основе выведенных соотношений. В. И. Беляев

7735. Нестационарная теплопроводность цилиндра конечной длины. Мотовиловец (Нестаціонарна теплопровідність циліндра скінченної довжини. Мотовиловець І. О.). Наук. щорічник. Механ.-матем. фак. Київськ. ун-ту, 1956. Київ, 1957, 554—556 (укр.)

Рассматривается нестационарная задача об осесимметричном теплообмене полого цилиндра конечной толщины с окружающей средой. Ищется решение уравнения теплопроводности

$$\frac{1}{\rho}(\rho u_\rho)_\rho + u_{zz} = \frac{1}{a^2} u_t \qquad (1)$$

с условиями

$$\left.\begin{aligned} u_\rho + \gamma_1 (u - \theta_1) &= 0 \text{ при } \rho = 1, \\ u_\rho - \gamma_4 (u - \theta_4) &= 0 \text{ при } \rho = \rho_1 \\ u_z - \gamma_2 (u - \theta_2) &= 0 \text{ при } z = 0, \\ u_z + \gamma_3 (u - \theta_3) &= 0 \text{ при } z = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$u = \theta_0 \text{ при } t = 0,$$

где $\theta_1 = b_1 + be^{-kt} + (b_3 + b_4 e^{-kt}) z$, $\theta_2 = c_1 + c_2 \ln \rho$, $\theta_3 = c_3 + c_4 \ln \rho$, θ_0, θ_4, k, b_i и c_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ — постоянные.

Указывается, что задача решалась методом разделения переменных с помощью преобразования Лапласа и приводится выражение для $u(x, t)$ в трудно обозримой форме.

Примечание референта. Задача может быть элементарно решена методом разделения переменных: $u(\rho, z, t) = \bar{u}(\rho, z) + \bar{v}(\rho, z) e^{-kt} + w(\rho, z, t)$, где $\bar{u}(\rho, z)$ — стационарное решение задачи (1)—(2), $\bar{v}(\rho, z)$ — решение уравнения $\frac{1}{\rho}(\rho \bar{v}_\rho)_\rho + \bar{v}_{zz} = -\frac{k}{a^2} \bar{v}$ с граничными условиями вида (2) при $\theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 0$, $\theta_1 = b_3 + b_4 z$; $w(\rho, z, t)$, решение уравнения (1) с однородными граничными условиями (2) и начальным условием $w|_{t=0} = \theta_0 - \bar{u}(\rho, z) - \bar{v}(\rho, z)$. При вычислении коэффициентов Фурье функции $w(\rho, z, 0)$ следует воспользоваться второй формулой Грина. А. А. Самарский

7736. Решение уравнения теплопроводности для полубесконечного стержня с разрывным коэффициентом. Усольцев С. А., КазССР Гылым Акад. хабарлары, Изв. АН КазССР. Сер. матем. и механ., 1957, вып. 6(10), 82—86 (рез. каз.)

Рассматривается задача о распространении тепла в полубесконечном стержне, составленном из $n+1$ однородных частей, соединенных в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В этих точках коэффициенты теплопроводности и температуропроводности разрывны и выполняются условия сопряжения (непрерывность температуры и потока). Используя эти условия, автор получает для производных $v_x(x_i + 0, t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ систему интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода. А. А. Самарский

7737. Сравнение линейной и нелинейной задач стационарного поведения нагретой трубы. Мак-Фарланд (Comparison between the linear and nonlinear steady-state behavior of a heated tube. McFarland B. L.), J. Appl. Phys., 1958, **29**, № 12, 1682-1684 (англ.)

Установившееся распределение температуры в бесконечной цилиндрической трубе внутреннего радиуса r_i и внешнего r_0, нагреваемой распределенными источниками с интенсивностью S, описывается уравнением (k — коэффициент теплопроводности):

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial k}{\partial T} \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2 + S = 0, \qquad (1)$$

с граничными условиями:

$$\text{при } r = r_0 \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad T = T_0. \qquad (2)$$

Сравнивается решение задачи (1), (2), полученное в предложении, что k и S — постоянные, равные их средним значениям $\bar{k}$ и $\bar{S}$ с решением линеаризованного уравнения (1) с условиями (2). Предлагаемая линеаризация (1) заключается в введении новой функции:

$\theta = \alpha + \beta \int_0^T k d\tau$ (α и β — постоянные). Если можно положить $S = S_B\theta$, где $S_B = \text{const}$, то (1) переписывается в виде

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r_1}\frac{\partial\theta}{\partial r} + \beta S_B\theta = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)\frac{\partial\theta}{\partial r}.$$

Так как, в силу (2), правая часть равна нулю на поверхности трубы, то предлагается ее всюду положить равной нулю и решать получившееся линейное уравнение с постоянными коэффициентами. При произвольной функции S аппроксимирующее выражение $S_B\theta$ подбирается вариацией произвольных постоянных S_B, α и β.

С. С. Дымков

7738. Обобщение теории регулярного теплового режима на случай переменных теплофизических характеристик. Кудряшев Л. И., Жемков Л. И., Инж.-физ. ж., 1959, **2**, № 4, 72—77 (рез. англ.)

Нелинейная задача о теплопроводности

$$C_p\gamma\frac{\partial t}{\partial\tau} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} t) + q_v,$$

$$\tau = 0,\ t = t_0(x, y, z);\ -\lambda_w\left(\frac{\partial t}{\partial n}\right)_w = \alpha_w t_w, \qquad (1)$$

$$\lambda = \lambda(t),\ C_p = C_p(t),$$

при помощи введения новых переменных $\Phi = \int_0^t \frac{\lambda}{C_p} dt$ и $\xi = \int_0^\tau \frac{\lambda}{C_p\gamma} d\tau$ приводится к виду:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = \nabla^2\Phi + q_v;\ \xi = 0,\ \Phi = \Phi_0(x, y, z);$$

$$-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_w = \zeta\Phi_w, \qquad (2)$$

где $\zeta = \text{const}$. К задаче (2) применимы выводы теории регулярного режима, если вместо температуры рассматривать Φ, а вместо времени ξ. Хотя такой метод не решает нелинейной задачи о теплопроводности в смысле нахождения температурного поля, он дает возможность косвенным образом изучать теплопроводность в среде с переменными теплофизическими характеристиками и, в частности, однозначно определять коэффициент теплообмена в любой момент времени. Для проверки положений теории была проведена серия опытов, заключавшихся в продувке в аэродинамической трубе предварительно нагретых цилиндрических калориметров, изготовленных из графита и стали. Опыты подтвердили наличие соотношений регулярного режима относительно функции Φ при аргументе ξ.

В. И. Беляев

7739. Об одной задаче теплообмена системы тел. Ким Е. И., Прикл. матем. и механ., 1957, **21**, № 5, 624—633

Рассматривается следующая задача о распространении тепла в неоднородной среде: Найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2(x)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\quad a^2(x) = \begin{cases} a_1^2 \text{ при } x < 0, \\ a_2^2 \text{ при } x > 0; \end{cases}$$

удовлетворяющее начальному условию $u(x, y, 0) = f(x, y)$ и условиям сопряжения

$$u(-0, y, t) = u(+0, y, t),\ k_1 u_x(-0, y, t) = k_2 u_x(+0, y, t),$$

где k_1 и k_2 — положительные постоянные величины. Задача сводится к интегральному уравнению вида

$$\psi(y, t) = C\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} K_0((y-\eta)^2,\ (t-\tau)\psi(\eta, \tau)\, d\eta + F(y, t)$$

с ядром $K_0((y-\eta)^2, t-\tau)$, имеющим при $\eta = y$ и $\tau = t$ сильную особенность

$$|K_0((y-\eta)^2, t-\tau)| < \frac{M}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\delta^2\frac{(y-\eta)^2}{t-\tau}\right],$$

где M и δ^2 — некоторые постоянные величины. Доказывается разрешимость этого интегрального уравнения.

А. А. Самарский

7740. К вопросу о теплопроводности пористых материалов. Серых Г. М., Изв. Томского политехн. ин-та, 1958, **101**, 59—70

Приводится вывод так называемого эффективного коэффициента теплопроводности $\lambda_{эф}$ в функции от пористости тела m (отношения объема, занимаемого порами, к объему самого тела), учитывающий влияние радиации тепла от поверхности пор.

Л. Н. Слободецкий

7741. Прогрев тел конечных размеров под действием лучистого тепла. Сообщ. 1. Бойков Г. П., Изв. Томского политехн. ин-та, 1958, **101**, 22—34

Отмечается, что решение различных краевых задач для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial\tau} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \qquad (1)$$

приводит к сложным аналитическим выражениям. Особенно сложна задача о прогреве тел конечных размеров под действием лучистого тепла. В этом случае краевые условия на границе тела нелинейны, что следует из закона Стефана — Больцмана. Поэтому для случая центрально симметричных тел конечных размеров предлагается отказаться от поисков точных математических решений и заменить их „техническими" решениями. Точнее, автор предлагает заменить трехмерное уравнение (1) одномерным уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial\tau} = a\xi\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad (2)$$

где ось x направлена по так называемой линии стока тепла в теле, идущей от центра тела к точке на его поверхности, в которой температура остается наименьшей на всем протяжении процесса нагрева, и ξ — численный параметр, учитывающий влияние второго и третьего измерений. Автор приводит различные соображения о способе выбора параметра ξ для тел цилиндрической формы.

Примечание референта: Обоснованность замены уравнения (1) уравнением (2) требует, разумеется, проверки. Физического обоснования своего метода автор не дает. Математическое обоснование, приведенное на стр. 25—26, совершенно несерьезно.

Л. Н. Слободецкий

7742. Прогрев тел конечных размеров под действием лучистого тепла. Сообщ. 2. Бойков Г. Ц., Изв. Томского политехн. ин-та, 1958, **101**, 35—41

Приводятся соображения по поводу способа выбора коэффициента ξ (реф. 7741).

Л. Н. Слободецкий

7743. Температурное поле и температурные напряжения, возникающие в упругом полупространстве вследствие потока лучистой энергии, падающей на границу полупространства. Даниловская В. И., Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Механ. и машиностр., 1959, № 3, 129—132

Исследуется температурное поле и термоупругие напряжения, имеющие место в однородном упругом полупространстве, если в начальный момент температура любой точки полупространства равна нулю, через граничную плоскость полупространство имеет теплообмен со средой нулевой температуры и на граничную плоскость падает поток лучистой энергии. Предполагается, что интенсивность потока тепловой энергии описывается функцией $I(t)$.

$$I(t) = \begin{cases} I_0 = \text{const} & \text{при } t \leqslant t_0, \\ 0 & \text{при } t_0 < t. \end{cases}$$

Тогда для определения температуры $T(x, t)$ нужно решить уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + I(t) e^{-kx},$$

где k — коэффициент поглощения материала, при граничном условии $\frac{\partial T}{\partial x} = hT$ при $x = 0$ и начальном условии $T(x, t) = 0$ при $t = 0$.

Для решения поставленной задачи автор применяет методы операционного исчисления. При этом температурная функция оказывается выраженной через табулированные функции *erfz*. При вычислении термоупругих напряжений автор предполагает граничную плоскость в любой момент времени свободной от напряжений, а в начальный момент времени все полупространство свободным от напряжений. При этих предположениях все компоненты тензора напряжений оказываются равными нулю, кроме X_x (ось Ox направлена перпендикулярно граничной плоскости), для определения которого требуется решить уравнение

$$q^2 \frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 X_x}{\partial t^2} = s \frac{\partial^2 T}{\partial t^2},$$

где q — скорость звука в полупространстве; s — коэффициент линейного расширения материала при нулевых граничных и начальных условиях. При решении последней задачи автор также применяет методы операционного исчисления и результаты также выражаются через табулированные функции *erfz*. М. С. Ага

7744. Об устойчивости распространения пламени. **Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б.** Прикл. матем. и механ., 1957, **21**, № 6, 856—859

Дается определение устойчивости режима распространения пламени и показывается, что в случае одного уравнения в одномерной задаче режим всегда оказывается устойчивым. Этот вывод относится как к тепловому, так и к цепному распространению пламени. Опровергаются выводы Розена о возможности неустойчивости, которые, по мнению авторов, основаны на неправильной постановке вопроса об устойчивости режима распространения. А. А. Самарский

7745. К теории локально изотропной турбулентности. **Монин А. С.**, Докл. АН СССР, 1959, **125**, № 3, 515—518

В теории локально изотропной турбулентности, развитой А. Н. Колмогоровым (Докл. АН СССР, 1941, **30**, № 4, 299—303; **32**, № 1, 19—21), предполагается, что поля гидродинамических элементов потока являются локально однородными и локально изотропными случайными полями, так что распределения вероятностей существуют лишь для разностей значений гидродинамических элементов в двух точках. При выводе основных уравнений этой теории, однако, до сих пор всегда сначала предполагалось, что турбулентность является однородной и изотропной и лишь затем полученные уравнения для статистических характеристик гидродинамических полей переписывались в терминах характеристик разностей значений поля. Показывается, что те же уравнения можно получить и без предположения об однородности и изотропности турбулентности (предполагая лишь локальную однородность и локальную изотропность), если предварительно преобразовать уравнения гидродинамики к особой „гибридной форме", в которой некоторые члены относятся к обычной неподвижной системе координат, а некоторые — к подвижной системе координат, перемещающейся вместе с частицей жидкости. А. М. Яглом

7746. Турбулентные пульсации плотности в невязкой сжимаемой жидкости. Джайн (Density fluctuations in turbulence in an inviscid compressible fluid. Jain P. C.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1958, **A24**, № 1, 40—44 (англ.)

Рассматривается невязкая сжимаемая жидкость, изменения давления и плотности которой подчиняются адиабатическому закону, и в этой жидкости — однородная, изотропная и стационарная во времени турбулентность. Основными статистическими характеристиками такой турбулентности будут пространственно-временные корреляционные функции — средние значения произведения двух гидродинамических элементов потока, взятых в различных точках и в разные моменты времени; эти функции будут зависеть от расстояния между двумя точками наблюдения и от разности двух времен наблюдения. Основное внимание в работе уделяется изучению корреляционной функции поля плотности $\rho(\mathbf{x}, t)$:

$$\omega(r, t) = \mathbf{M}[\rho(\mathbf{x}', t') - \mathbf{M}\rho][\rho(\mathbf{x}'', t'') - \mathbf{M}\rho],$$
$$r = |\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'|, \quad t = |t'' - t'|;$$

полученные при этом результаты сопоставляются с результатами Чандрасекхара (Chandrasekhar S., Proc. Roy. Soc., 1951, **A210**, 18—25), относящимися к пространственной корреляционной функции поля плотности в вырождающейся однородной и изотропной турбулентности. А. М. Яглом

7747. Термические флюктуации в нелинейной системе. Кампен (Thermal fluctuations in a nonlinear system. Kampen N. G. van), Phys. Rev., 1959, **110**, № 2, 319—323 (англ.)

Термические флюктуации в нелинейной системе изучаются на примере электрического контура, состоящего из конденсатора C и сопротивления R, находящегося в контакте с тепловой ванной. Предполагается, что R зависит от разности потенциалов V. Величина $P(q, t)\,dq$, означающая вероятность того, что заряд на C принимает значения между q и $q + dq$, определяется уравнением Фоккера — Планка в общей форме:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial q^2}[\xi(q) P] + \frac{\partial}{\partial q}[\eta(q) P], \qquad (1)$$

где функции ξ и η характеризуют свойства необратимых процессов, происходящих в сопротивлении. В работе (Kampen N. G. van, Physica 1957, **23**, 707) была установлена связь между ξ и η:

$$\eta(q) = -\frac{1}{G(q)} \frac{d}{dq}[\xi(q) G(q)], \qquad (2)$$

где G — равновесное распределение:

$$G(q) = (2\pi kTC)^{-1/2} \exp(-q^2/2kTC).$$

С помощью (2) уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q}\left[\xi G \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{P}{G}\right)\right]. \qquad (3)$$

Это уравнение описывает одновременно крупномасштабное феноменологическое поведение системы и флюктуации малого масштаба. Исходя из феноменологического рассмотрения системы, в случае малых флюктуа-

ций, для ξ получается следующее соотношение: $\xi/kT = 1/R$, в котором ξ и R могут зависеть от V.

Представление P в виде $P(q, t) = e^{-\lambda t} P_\lambda(q)$ и подстановка его затем в уравнение (3) дает уравнение для определения собственных функций P_λ:

$$\Xi P_\lambda = -\lambda P_\lambda, \qquad (4)$$

где Ξ — дифференциальный оператор в правой части уравнения (3).

Спектральная плотность флюктуаций заряда на основе теоремы Винера — Хинчина может быть следующим образом выражена через функции P_λ:

$$S(w) = \frac{2}{\pi} \sum_\lambda \frac{\lambda}{\lambda^2 + w^2} \left[\int P_\lambda(q)\, q dq\right]^2. \qquad (5)$$

Таким образом, для нахождения $S(w)$ необходимо решать уравнение (4). Решение последнего проводится методом возмущений; полагается $\xi = \xi(0) + \xi^{(1)}(q)$, где $\xi^{(1)}_{(q)}$ — малое возмущение. Вначале полагается $\xi(0) = \text{const}$, и единицы заряда и времени выбираются таким образом, чтобы $kTC = 1$ и $\xi(0) = 1$. Невозмущенное решение задачи определяется уравнением

$$P''_\lambda + P'_\lambda + (\lambda^2_n + 1) P_\lambda = 0,$$

решениями которого являются функции Эрмита. В этом случае

$$S(w) = (2/\pi)(1 + w^2)^{-1}, \qquad (6)$$

а спектральная плотность потока флюктуаций выражается формулой

$$W_f = 2\pi w^2 S(w) = \frac{4kT}{R}\left[\frac{(RCw)^2}{1 + (RCw)^2}\right],$$

которая обычно выводится как следствие формулы Никвиста (Nyquist). Дальнейшее решение задачи по обычной схеме теории возмущений приводит к следующему выражению

$$S(w) = \frac{2}{\pi}\left\{(1 + C_{11})^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + w^2}\right) + \sum_{n+1} C_{n1}^2 \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n^2 + w^2}\right)\right\},$$

которое определяет спектральную плотность с точностью до членов второго порядка. Величины λ_n и C_{nm} определяются через известные функции. Сумма в правой части этого выражения является членом второго порядка малости и поэтому λ_n могут быть заменены через $\lambda_n^{(0)} = n$. Тогда каждый из членов в этой сумме имеет вид выражения для невозмущенного спектра (6) с той разницей, что время релаксации R_0C заменяется в последующих членах через $\frac{1}{2} R_0C$, $\frac{1}{3} R_0C, \ldots$

В качестве примера в работе приводятся полученные предлагаемым методом выражения для спектральной плотности потока флюктуаций W_f для случаев, когда $R(V) = R_0 + R_2V^2$ и $R(V) = R_0 + R_1V$. В. И. Беляев

7748. К вопросу о многогрупповом методе расчета ядерных реакторов. Марчук Г. И., В сб.: Физ. и теплотехн. реакторов. М., Атомиздат, 1958, 7—21

Для расчета реакторов обычно исходят из диффузионно-возрастного приближения. Однако решение системы основных и сопряженных уравнений реактора представляет собой задачу весьма сложную. Поэтому для ее упрощения применяют известный метод групп. Делая те или иные интерполяционные предположения, можно как основные, так и сопряженные уравнения приближенно заменить системами уравнений диффузионного типа, решение которых уже не представляет большого труда. В случае слабого поглощения замедляющихся нейтронов функция плотности замедления q является медленной функцией летаргии. Поэтому для расчета реактора можно пользоваться небольшим числом энергетических групп.

В работе основное внимание уделяется тому случаю, когда в реакторе имеются зоны с сильным поглощением замедляющихся нейтронов и, следовательно, функция q сильно меняется в зависимости от летаргии. Ставится и решается (путем выбора подходящих интерполяций нейтронной плотности по энергии) задача построения расчетной схемы с небольшим числом групп, которая обеспечивает достаточную для практики точность расчета реакторов. Предлагаемый автором многогрупповой метод проверен на большом фактическом материале и используется с 1954 г. в практической работе.

А. А. Самарский

7749. Конечноразностные уравнения диффузии. Марчук Г. И. В сб.: Физ. и теплотехн. реакторов. М., Атомиздат, 1958, 22—43

При расчетах ядерных реакторов обычно применяется многогрупповое приближение, которое состоит в решении системы однородных дифференциальных уравнений диффузионного типа. Основная задача теории реакторов — вычисление первого характеристического числа, связанного с критическими размерами реактора. Для отыскания собственного значения используется обычно метод итерации источников, в результате которого задача сводится к последовательному решению уравнений диффузии в гетерогенной среде.

Статья посвящена разработке разностных методов решения уравнений диффузии, в основе которых, как указывает автор, лежит идея сквозного или непрерывного счета, предложенная референтом и А. Н. Тихоновым и заключающаяся в следующем. Для элементарной счетной ячейки пишется закон сохранения. Пользуясь той или иной локальной интерполяцией, входящие в уравнение баланса потоки и интегралы автор заменяет соответствующими разностными выражениями. При этом точки разрыва коэффициентов не выделяются. Полученные таким образом разностные схемы будут сходящимися и в случае кусочно-непрерывных коэффициентов диффузии. Эти схемы сквозного счета с успехом использовались автором для многомерных задач. Рассматриваются разностные уравнения для случаев цилиндрической и сферической симметрии, а также двумерные случаи. В §§ 3 и 5 дается вывод так называемых усовершенствованных конечноразностных уравнений диффузии, предназначенных для увеличения точности аппроксимации вблизи точки разрыва коэффициента диффузии. Эти разностные уравнения, как указывает автор, дают хорошие результаты при расчете реакторов. Теоретические оценки точности разностных схем в работе не рассматриваются.

А. А. Самарский

7750. Применение интегралов энергии к термически возбужденным движениям. Го (Application of energy integrals to thermally driven motions. Kuo H. L.), Beitr. Phys. Atmosph., 1959, **31**, № 3-4, 189—199 (англ.; рез. нем., франц.)

Исключением из гидродинамических уравнений движения и первого закона термодинамики члена, представляющего собой работу расширения сжимаемой жидкости в зависимости от давления, и почленной интеграцией по всему пространству получено, при использовании условия обтекания на граничной поверхности, уравнение

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{\partial P}{\partial t} + D = J\int Q d\mathcal{V} + \Delta_j\left(k_{(j)}\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)_s,$$

$\gamma = c_p/c_v$, K — полная кинетическая энергия воздуха, P — полная потенциальная энергия, D — скорость диссипации K, включающая и поверхностное трение, Q — количество тепла, поступающего в единицу объема в единицу времени, J — механический эквивалент теплоты, $k_{(l)}$ — термометрическая проводимость в направлении x_l, T — температура, $\Delta_l\{\ldots\}_s$ — приращение величины, стоящей в скобках по направлению x_l, проинтегрированное по поверхности S.

Полученное уравнение качественно анализируется для случая общей циркуляции атмосферы. Б. Н. Трубников

7751. Одночастичные особенности функции Грина в квантовой теории поля. Зиммерман (One particle singularities of Green functions in quantum field theory. Zimmermann W.), Nuovo cimento, 1959, **13**, № 3, 503—521 (англ.; рез. итал.)

Исследуется структура функций $\tau(p_1 \ldots p_n)$, определяемых выражением

$$\tau(p_1 \ldots p_n) = \frac{1}{(2\pi)^{5n/2}} \times$$

$$\times \int dx_1 \ldots dx_n \exp\left\{-i \sum_j p_j x_j\right\} (\Omega, TA(x_1) \ldots A(x_n)\Omega),$$

где T — оператор хронологического произведения операторов поля $A(x)$, Ω — вакуумный функционал. Исследуются сингулярности τ функций, связанные с вакуумными и одночастичными промежуточными состояниями в предположении, что все четырехмерные векторы p_i вещественны. В начальных и конечных состояниях могут быть наряду с простыми также и сложные частицы. Сделанный вывод о существовании сингулярностей типа $\delta(p)$, $\delta(p^2+m^2)$, v. p. $\frac{1}{p^2+m^2}$, где $p = \sum_\nu^r p_{i\nu}$ не основан на применении теории возмущений. В заключительной части работы рассмотрено обоснование дисперсионных соотношений на базе свойств τ функций Беркли (США). А. В. Тулуб

7752 К. Математический аспект дозвуковой и сверхзвуковой газовой динамики. Берс (Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics. Bers Lipman. New York, John Wiley and Sons; London, Chapmann & Hall, 1958. xv, 164 pp., il., 62 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 470, 13 (англ.)

См. также: 7390, 7528, 7530, 7540, 7831, 7839, 7863, 7864, 7938, 8P83, 8233, 8288, 7291.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редакторы *В. В. Немыцкий, Н. И. Мозжерова*

7753. Интегральные уравнения с двумя переменными пределами. Гермэнеску (Équations intégrales aux deux limites variables. Ghermănesco Michel), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 8, 1104—1105 (франц.)

Рассматривается уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_{0(x)}^{x} K(x, s)\varphi(s)\,ds = 0, \qquad (1)$$

в котором заданная функция 0 удовлетворяет условию $\theta_n(x) = x$, где $\theta_1(x) = \theta(x)$, а $\theta_k = \theta(\theta_{k-1})$. Утверждается, что все решения уравнения (1) удовлетворяют уравнениям Вольтерра

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^x \left[K(x, s) - \alpha_k^{n-1} K(\theta_{n-1}(x), s)\right] \varphi(s)ds = \Phi_k(x),$$

$$k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\Phi_k(x)$ является произвольным решением уравнения

$$\Phi_k(x) + \alpha_k \Phi_k(\theta) + \ldots + \alpha_k^{n-1} \Phi_k(\theta_{n-1}) = 0, \qquad (2)$$

и обратно. Уравнение (2) изучено в других заметках автора (РЖМат, 1957, 7102; 7103; 1958, 3024). Указаны также свойства решений неоднородного уравнения.

Ю. Г. Борисович

7754. О системах сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши. Хведелидзе Б. В., Сообщ. АН ГрузССР, 1957, **18**, № 2, 129—136

Теория систем сингулярных интегральных уравнений

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \int K(t, \tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t), \quad (1)$$

разработанная (Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений, ГТТИ, 1950, М. Л.) в предположении, что матрицы $a(t)$, $b(t)$ и вектор $f(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера, за исключением конечного числа точек $c_1, \ldots, c_m$, где $a(t)$, $b(t)$ могут иметь разрывы 1-го рода, а $f(t)$ может обращаться в бесконечность интегрируемого порядка, обобщается на случай, когда вместо $\int K(t, \tau)\varphi(\tau)\,d\tau$ стоит вполне непрерывный оператор v_φ; $a(t)$, $b(t)$ — ограниченные матрицы; $f(t)$ и $\varphi(t) \in L_p(\Gamma, \rho)$ (РЖМат, 1957, 368). Ф. Д. Гахов

7755. Об одном интегральном уравнении. Джавадов М. Г., Физ. вә рijазијјат инст. әсәрләри. АзәрбССР Елмләр Акад., Тр. Ин-та физ. и матем., АН АзербССР, 1959, 8, 169—172 (рез. азерб.)

Методом последовательных приближений доказывается существование единственного решения уравнения $U(t) = \psi(U \mid t) + v(t)$, где $\psi(U \mid t) = \int_0^t \Phi(t, \tau, U(\tau))\,d\tau$, $t \in [0, T]$, $U(t)$ и $\psi(U \mid t)$ принадлежат пространству Банаха, в котором норма элемента является суммируемой функцией от t. Предполагается, что $\| \psi(U_2|t) - \psi(U_1|t)\| \leqslant \varphi(t) \int_0^t a(\tau) \| U_2(\tau) - U_1(\tau) \|\,d\tau$, где $\varphi(t)$ непрерывная, $a(t)$ суммируемая на $[0, T]$ функции. Интеграл понимается в смысле Бохнера. В качестве примера применения доказанной теоремы рассматривается интегральное уравнение, к которому сводится решение смешанной задачи на прямой или полупрямой обобщенным методом Фурье. М. М. Вайнберг

7756. Об одном применении интегральных неравенств. Мамедов Я. Д., Елми әсәрләр. Азәрб. унив. Физ.-ријазијјат вә кимја сер., Уч. зап. Азерб. ун-т. Физ.-матем. и хим. сер., 1959, № 2, 41—46 (рез. азерб.)

Исходя из банахова пространства E, элементы которого $x(t)$ интегрируемы по Бохнеру на $[t_0, t_0+T]$, и $\| x(t) \|^p$ суммируема на $[t_0, t_0+T]$, вводится новое банахово пространство $\widetilde{E}$, в котором $\| \widetilde{x} \| = \left(\int_{t_0}^{t_0+T} \| x(t) \|^p\,dt \right)^{\frac{1}{p}}$. В $\widetilde{E}$ изучается уравнение

$$x(t) = F(t, x(t)), \qquad (1)$$

где F — оператор из $\widetilde{E}$ в $\widetilde{E}$. При помощи интегральных неравенств и других выкладок устанавливаются различ-

ные свойства оператора F и достаточные условия существования у уравнения (1) решения или единственного решения в некотором шаре пространства $\widetilde{E}$.

М. М. Вайнберг

7757. О точках разветвления систем нелинейных интегральных уравнений типа Урысона. Аширов С., Уч. зап. Туркм. ун-та, 1959, вып. 15, 103—108

В пространстве непрерывных функций рассматривается система уравнений

$$\varphi_i = \widetilde{K}_i(\varphi, \lambda), \quad i = 1, 2, \ldots n, \tag{1}$$

где

$$\widetilde{K}_i(\varphi, \lambda) = \int_G K_i(x, s; \varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots, \varphi_n(s), \lambda)\, ds,$$

G — замкнутое множество m-мерного евклидова пространства. Предполагается, что $\varphi = \varphi^{(0)}$ является решением (1) при $\lambda = \lambda_0$. Доказывается, что если 1 не является собственным значением некоторого оператора B, то вблизи точки λ_0 существует единственное непрерывное решение (1), представимое в виде

$$\varphi_i(x) = \varphi_i^{(0)}(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \psi_{i\nu}(x)\,(\lambda - \lambda_0)^{\nu}.$$

Без доказательства сформулировано предложение о продолжаемости решения системы (1), когда 1 является собственным значением ранга 1 оператора B.

М. М. Вайнберг

7758. Об операторе и уравнении Гаммерштейна. Шрагин И. В., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 3, 107—110

Для нелинейного интегрального оператора типа Гаммерштейна

$$\Gamma u(x) = \lambda \int_B K(x, y)\, g(u(y), y)\, dy,$$

действующего в пространстве C или в пространстве Орлича L^M, устанавливаются условия слабой непрерывности, а также при достаточно малом λ доказывается существование решения уравнения

$$u(x) = \lambda \int_B K(x, y)\, g(u(y), y)\, dy.$$

При этом используется следующий принцип неподвижной точки: если в пространстве, сопряженном к сепарабельному банахову пространству, некоторый оператор слабо непрерывно отображает выпуклое слабо компактное и слабо замкнутое множество в свою часть, то существует неподвижная точка этого преобразования.

Ю. Г. Борисович

7759. Теорема существования для уравнения Урысона в пространстве L^p. Аширов С., Елми эсэрлэр. Азэрб. унив. Физ.-рийазиййат вэ кимйа сер., Уч. зап. Азерб. ун-т. Физ.-матем. и хим. сер., 1959, № 1, 15—18 (рез. азерб.)

Топологическим методом Лерея и Шаудера устанавливаются достаточные условия существования в пространстве L^p решения уравнения $\varphi(x) = \int_G K[x, s, \varphi(s)]\, ds$.

М. М. Вайнберг

7760. Замечания к работе «О нелинейном сингулярном интегральном уравнении и о свойствах сингулярного интеграла по незамкнутым дугам». Погожельский (Remarques concernant le travail «Sur l'équation intégrale singulière non linéaire et sur les propriétés d'une intégrale singulière pour les arcs non fermés». Pogorzelski W.), J. Math. and Mech., 1959, 8, № 1, 159—160 (франц.)

Приводятся некоторые замечания к статье автора, название которой указано в заглавии (РЖМат, 1959, 6800). А. И. Кошелев

7761. О методах построения композиционных интегральных, интегро-дифференциальных и других типов уравнений. Быков Я. В. В сб.: Материалы 8-й Научн. конференции профессорско-преподават. состава Физ.-матем. фак. (Кирг. ун-т). Фрунзе, 1959, 10—11

Краткое сообщение автора о его докладе. В сообщении указывается, что для некоторых классов интегральных и интегро-дифференциальных уравнений можно строить решения по одной и той же схеме (схема не дана), что найден метод (метод не приведен) построения решения уравнения

$$L_0(u) + \sum_{k=1}^{q} P_k L_k(u) = f(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_m),$$

где L_0, L_k, P_k — линейные операторы, причем операторы L_i, $P_1, \ldots, P_q$ $(i = 0, 1, \ldots, q)$ перестановочны между собой в некотором классе функций. Ю. К. Ландо

7762. О поведении положительных решений одного класса нелинейных краевых задач для интегро-дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной. Иманалиев М. В сб.: Материалы 8-й Научн. конференции профессорско-преподават. состава Физ.-матем. фак. (Кирг. ун-т). Фрунзе, 1959, 17—19

Приведены (без доказательства) достаточные условия существования положительных наибольших и наименьших решений краевой задачи

$$y(c, \varepsilon) = A; \; ay'(c, \varepsilon) = \int_c^h K(c, t, y)\, dt + f(c, A) + \varphi(c);$$

$$\varepsilon y'' + ay' = f(x, y) + \int_c^b K(x, t, y)\, dt + \varphi(x),$$

которые стремятся соответственно при $\varepsilon \to 0$ к наибольшему и наименьшему положительному решению вырожденной задачи:

$$av'(x) = f(x, v) + \int_c^b K(x, t, v)dt + \varphi(x); \; v(c) = A.$$

Ю. К. Ландо

7763. Теоремы существования решения краевой проблемы для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Мусина С. С., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, 117, № 2, 59—61

Рассматривается краевая задача для интегро-дифференциальных уравнений

$$L[y] = \lambda \int_E K(s, t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})\, dt, \tag{1}$$

$$L[y] = \lambda \left[\int_E K(s, t)\, F(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})\, dt + f(s, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \right], \tag{2}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_{ij}\, y^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} c_{ij}\, y^{(j)}(b) = 0, \tag{3}$$

$$i = 0, \ldots, n-1,$$

где

$$L[y] = \sum_{k=0}^{n} a_k(s)\, y^{(n-k)}(s),$$

$E = [a, b]$, $a_k(s)$ — непрерывные на E функции, $a_0 \neq 0$, постоянные b_{ij} и c_{ij} не равны одновременно нулю.

$$|K(t, t_1, y_1, \ldots, y_1^{(n-1)}) - K(t, t_1, y_2, \ldots, y_2^{(n-1)})| <$$

$$\leqslant B(t, t_1) \sum_{l=0}^{n-1} | y_1^{(l)} - y_2^{(l)} |^{\alpha}$$

для любых y_1 и y_2, где $0 < \alpha \leqslant 1$.

Относительно $K(t, t_1, 0, \ldots, 0)$ и $B(t, t_1)$ предполагается обобщенная ограниченность (конечность соответствующих интегралов). При этих условиях имеет место теорема:

Если $\alpha = 1$, $|\lambda|$ достаточно мало, то краевая задача для (1) и (3) имеет единственное решение; если же $0 < \alpha < 1$, то существует по крайней мере одно решение, каково бы ни было λ. Аналогичная теорема формулируется в отношении равенств (2) и (3). Имеются в виду решения, непрерывные вместе с производными до $n-1$ порядка на сегменте E. Указано, что доказательство может быть осуществлено на основе принципов Шаудера и Каччиополи — Банаха, причем уравнения (1) и (2) приводятся к интегральным с помощью функции Грина.

В. М. Дубровский

7764. Теорема существования решения задач Коши для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Мусина С. С., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, 117, № 2, 54—58

Пусть

$$f_l(t, y) = f_l(t, y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

$$F_l(t, y) = F_l(t, y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

где $y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ — точка пространства C_n, т. е. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ суть непрерывные на сегменте $E[a, b]$ функции от t. Пусть, кроме того,

$$| f_l(t, y^{(1)}) - f_l(t, y^{(2)}) | \leqslant P_l(t) \sum_{k=1}^{n} | y_k^{(1)} - y_k^{(2)} |^{\alpha},$$

$$| F_l(t, y^{(1)}) - F_l(t, y^{(2)}) | \leqslant L_l(t) \sum_{k=1}^{n} | y_k^{(1)} - y_k^{(2)} |^{\alpha}$$

для любых $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$, $0 < \alpha \leqslant 1$. Относительно функций $P_l(t)$, $L_l(t)$, $f_l(t, 0)$, $F_l(t, 0)$ предполагается обобщенная ограниченность (конечность соответствующих интегралов). При этих условиях рассматривается система уравнений

$$y_i'(t) = \lambda [f_l(t, y) + \int_E K_l(t, t_1) F_l(t_1, y)\, dt_1]$$

с начальными условиями $y_l(t_0) = a_l$, где $t_0 \in E$; λ — постоянный параметр; ядро K_l также имеет свойство обобщенной ограниченности; $i = 1, \ldots, n$. Доказывается, что при $\alpha = 1$ и достаточно малом $|\lambda|$ имеется единственное решение, а при $\alpha < 1$ имеется решение, каково бы ни было λ, причем решения принадлежат пространству C_n. Доказательство основано на принципах Каччиополи — Банаха и Шаудера.

В. М. Дубровский

7765. Об одной обобщенной краевой задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной. Иманалиев М., Изв. АН КиргССР. Сер. естеств. и техн. н., 1959, 1, № 1, 129—144 (рез. кирг.)

Методом последовательных приближений доказывается, что краевая задача

$$\varepsilon y'' + ay' = \lambda \int_c^b K(x, t) f_1(t, y)\, dt + \lambda f(x, y),$$

$$y(c, \varepsilon) = A; \quad y(b, \varepsilon) = B,$$

$$ay'(c, \varepsilon) = \lambda f[c, y(c, \varepsilon)] + \lambda \int_a^b K(c, t) f_1(t, y)\, dt$$

при некотором значении параметра λ имеет единственное решение. Предполагается, что функции $f(x, y)$ и $f_1(x, y)$ непрерывны в области $c \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < y < \infty$, и удовлетворяют в этой области условию Липшица с достаточно малой постоянной Липшица. Функция $K(x, t)$ непрерывна и не обращается в нуль в области $c \leqslant x, t \leqslant b$. Если, кроме того, производные f_x, f_y', K_x' ограничены в соответствующих областях, то существуют при $\varepsilon \to 0$ пределы $\lim \lambda(\varepsilon) = \bar{\lambda}$, $\lim y(x, \varepsilon) = \varphi(x)$, и предельная функция $\varphi(x)$ удовлетворяет вырожденной краевой задаче:

$$a\varphi'(x) = \bar{\lambda} f(x, \varphi) + \bar{\lambda} \int_c^b K(x, t) f_1(t, \varphi)\, dt + \bar{\lambda} f(x, \varphi),$$

$$\varphi(c) = A; \quad \varphi(b) = B.$$

Ю. К. Ландо

7766. О задаче Коши для одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Иманалиев М. В сб.: Материалы 8-й Научн. конференции профессорско-преподават. состава Физ.-матем. фак. (Кирг. ун-т). Фрунзе, 1959, 15—17

Приведены (без доказательства) достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для уравнения

$$\varepsilon y''(x, \varepsilon) + ay'(x, \varepsilon) =$$

$$= (x - c)^m [f(x, y) + \int_c^b K(x, t) f_1(t, y)\, dt]$$

с начальными данными

$$y(a) = A; \quad y'(a) = B_1 C^{-am/\varepsilon},$$

где a, m, c, ε — положительные постоянные, а также достаточные условия для того, чтобы решение $y(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ сходилось к решению вырожденной задачи

$$av'(x) = (x - c)^m [f(x, v) + \int_c^b K(x, t) f_1(t, v)\, dt];$$

$v(a) = A$.

Ю. К. Ландо

См. также: 7681, 7769, 8282—8294.

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Редактор *М. К. Керимов*

7767. Некоторые применения функционального анализа в вариационном исчислении. Роте (Some applications of functional analysis to the calculus of variations. Rothe E. H.), Proc. Sympos. Appl. Math., 1958, 8, 143—151 (англ.)

Автор, как и в ряде предыдущих работ, использует теорию операторов, являющихся градиентами функционалов, и тот факт, что в рефлективном пространстве Банаха шар является слабо компактным. Кроме того, используется теория симметрических расширений полуограниченных операторов Фридрихса.

В части I дается более простое, чем в его предыдущих работах, доказательство существования минимума функционала

$$j(y) = \int_D f(t, y, y_1, \ldots, y_n)\, dt, \qquad (1)$$

где D — ограниченная область n-мерного евклидова пространства $t_1, t_2, \ldots, t_n$; $y_t = \partial y/\partial t_t$, $f \equiv \sum_{i,k=1}^{n} a_{tk}(t) y_t y_k + \sum_{i=1}^{n} b_t(t)\, y_t + c(t, y)$. Форма $\sum a_{tk}\, \xi_t\, \xi_k$ положительно определенная, функции a_{tk}, b_t, c, а также граница D предполагаются достаточно гладкими. Граничные условия: $y = 0$ на границе D.

В части II автор в качестве иллюстрации рассматривает более подробно функционал (1) в случае функций, зависящих от одной переменной t. M. Burnat

7768. Функциональные уравнения в теории динамического программирования. IX. Вариационное исчисление, аналитическое продолжение, включение операторов. Беллман, Леман (Functional equations in the theory of dynamic programming. IX. Variational analysis, analytic continuation, and imbedding of operators. Bellman Richard, Lehman Sherman), Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **44**, № 9, 905—907 (англ.)

Пусть $A+iB$ — комплексный симметрический оператор, действующий в некотором пространстве комплексных функций действительного переменного, к которому принадлежат вместе с функциями также их действительная и мнимая части. Уравнение $(A + iB)(x + iy) = u + iw$ сводится к двум уравнениям: $Ax - By = u$, $Ay + Bx = v$; если A — отрицательно определенный, то эти уравнения являются уравнениями Эйлера для вариационной задачи о максимуме по y или о минимуме по x функционала $(y, Ay) - (x, Ax) + 2(x, By) + 2(u, x) - 2(v, y)$. Если A не является отрицательно определенным, то после замены A на $A - zI$, где z — достаточно большое положительное число, вариационная задача решается с помощью разработанного авторами метода аналитического продолжения. Как иллюстрация метода рассматривается уравнение $u'' + (g(x) + ih(x))u = p(x) + iq(x)$, $a < x < T$. Если оператор A не симметричный, то рассматривается задача о максимуме функционала $(x, Bx) + (y, By) + 2(x, Ay) - (u, x) - 2(v, y)$, где B — отрицательно определенный оператор. При этом получаются вариационные уравнения $Bx + Ay = u$, $A'x + By = v$, и уравнение $Ay = u$ оказалось включенным в семейство вариационных уравнений. Дальнейшее изучение оператора A осуществляется с помощью изучения симметричного матричного оператора

$$M(z) = \begin{vmatrix} zB & A \\ A' & zB \end{vmatrix}$$

и его обратного. В частности, при $z = 0$

$$M(0)^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & A^{-1} \\ (A')^{-1} & 0 \end{vmatrix}.$$

Л. Я. Цлаф

7769. Приближенное решение дуальных интегральных уравнений вариационным методом. Нобл (The approximate solution of dual integral equations by variational methods. Noble B.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1958, **11**, № 2, 115—126 (англ.)

Рассматриваются дуальные интегральные уравнения

$$\int_\alpha^\beta M(t)\, X(t, x)\, A(t)\, dt = f(x) \quad (a \leqslant x < c)$$
$$\int_\alpha^\beta N(t)\, X(t, x)\, A(t)\, dt = g(x) \quad (c < x \leqslant b), \qquad (1)$$

где неизвестной функцией является $A(t)$, а ядро $X(t, x)$ таково, что имеют место формулы обращения

$$\int_\alpha^\beta X(t, x)\, \beta(t)\, dt = b(x) \quad (a < x < b),$$
$$\int_a^b X(t, x)\, b(x)\, dx = \beta(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta). \qquad (2)$$

Подобные уравнения возникают, например, при решении смешанных краевых задач теории потенциала, и тогда t есть параметр, получающийся при разделении переменных. В силу формул обращения (2) достаточно найти одну из функций

$$\int_\alpha^\beta M(t)\, X(t, x)\, A(t)\, dt = v(x) \quad (c < x \leqslant b),$$
$$\int_\alpha^\beta N(t)\, X(t, x)\, A(t)\, dt = u(x) \quad (a \leqslant x < c).$$

Определение функции $u(x)$ сводится к решению интегрального уравнения

$$\int_\alpha^\beta \frac{M(t)}{N(t)}\, X(t, x)\, dt \int_a^c X(t, \xi)\, u(\xi)\, d\xi = w(x), \qquad (3)$$

где

$$w(x) = f(x) - \int_\alpha^\beta \frac{M(t)}{N(t)}\, X(t, x)\, dt \int_c^b X(t, \xi)\, g(\xi)\, d\xi.$$

Аналогичное уравнение может быть написано для $v(x)$. Уравнение (3) является условием стационарности в окрестности $u(x)$ функционала

$$H(U) =$$
$$= 2\int_a^c w(x)\, U(x)\, dx - \int_\alpha^\beta \frac{M(t)}{N(t)}\, dt \left[\int_a^c X(t, x)\, U(x)\, dx\right]^2.$$

Если $[M(t)/N(t)] > 0$, то функция $u(x)$ дает этому функционалу максимум. Для приближенного нахождения $u(x)$ надлежит взять в качестве $U(x)$ подходящее выражение с некоторым числом параметров и затем определить их оптимальные значения. Более подробно исследуется случай, когда одна из функций $f(x)$, $g(x)$ равна нулю. Если $g(x) = 0$ и $[M(t)/N(t)] > 0$, а $U(x)$ — приближенное решение уравнения (3), то точность можно оценить следующим образом: пусть

$$\Delta(x) = \int_\alpha^\beta \frac{M(t)}{N(t)}\, X(t, x)\, dt \int_a^c X(t, \xi)\, U(\xi)\, d\xi - f(x)$$

есть погрешность, с которой $U(x)$ решает уравнение (3). Пусть, далее,

$$\Omega(t) = \int_a^c X(t, x)\, \Delta(x)\, dx;$$

тогда

$$H(U) \leqslant H(u) \leqslant H(U) + \int_\alpha^\beta \frac{N(t)}{M(t)}\, \Omega^2(t)\, dt.$$

В качестве приложения рассматривается задача о потенциале, создаваемом двумя параллельными и равными круговыми дисками. Н. И. Ахиезер

7770. О спектре оператора Шредингера. Жислин Г. М., Докл. АН СССР, 1958, **122**, № 3, 331—334

Развитие предыдущей работы автора (РЖМат, 1959, 487). Изучается оператор энергии системы многих частиц в поле ядра с учетом его движения

$$H = -\sum_{i=1}^{n} a_i \Delta_i - 2a_0 \sum_{\substack{i,\ j=1 \\ i<j}}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial^2}{\partial z_i\, \partial z_j} \right) - \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{1}{r_i} + \sum_{\substack{i,\ j=1 \\ i<j}}^{n} c_{ij} \frac{1}{r_{ij}},$$

где $a_i = a_0 + a'_i$; a'_i, b_i, c_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ — произвольные положительные числа; a_0 — не отрицательное число.

Доказана теорема: Существует такое число μ_1, что весь предельный спектр оператора H состоит из всех чисел λ, $\lambda \geqslant \mu_1$. Кроме того, если выполняется условие

$$b_i > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} c_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

то все точки спектра, лежащие левее μ_1, образуют возрастающую последовательность собственных значений, накопляющихся к μ_1. Л. Д. Фаддеев

7771. Примечание к теоремам. Э. Нётер. Блажек (Poznámka k vetám Emmy Noetherovej. Blažek Mikuláš), Mat.-fyz. časop., 1958, 8, № 3, 163—173 (словацк.; рез. русск., англ.)

Исследуются обе теоремы Э. Нётер (E. Noether); рассматривается случай, когда в лагранжиане некоторого физического поля выступают производные произвольного конечного порядка по пространственно-временным переменным. В работе получены законы сохранения для случая, когда лагранжиан абсолютно или релятивно инвариантен относительно непрерывной конечномерной группы преобразований, и выведены тождественные соотношения для случая, когда имеет место инвариантность относительно бесконечномерной непрерывной группы. Общие результаты применены к скалярному, электромагнитному и спинорному полям. M. Petráš

7772. Об одном вариационном принципе теории конечных деформаций. Бальдаччи (Sopra un principio variazionale nella teoria degli spostamenti elastici non infinitesimi. Baldacci Riccardo F.), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957 (1958), 23, № 5, 250—254 (итал.)

Пусть $\{u_k\}$ — вектор перемещения, $u_{k,\,r} = \partial u_k / \partial x_r$, $\{\sigma_{i,\,k}\}$ — тензор напряжения, $\{e_{ik}\}$ — тензор деформаций, f_k — объемная сила, действующая внутри области D, занимаемой упругим телом, F_k — поверхностная сила, действующая в точках поверхности $\mathfrak{F}_1$, составляющей часть границы D, $\mathfrak{F}_2$ — часть границы области D, дополнительная к $\mathfrak{F}_1$. В случае бесконечно малых деформаций уравнения равновесия имеют вид

$$\left.\begin{aligned} (s_{ik} + u_{k,\,r} s_{ir})_{,\,i} + f_k = 0 \quad & \text{в } D \\ (s_{ik} + u_{k,\,r} s_{ir})\, n_i = F_k \quad & \text{на } \mathfrak{F}_1 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} 2e_{ik} = u_{i,\,k} + u_{k,\,i} + u_{r,\,i} \cdot u_{r,\,k} \quad & \text{в } D \\ u_k = \bar{u}_k \quad & \text{на } \mathfrak{F}_2 \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Если функции s_{ik} и e_{ik} связаны соотношениями типа уравнений Гука — Коши для бесконечно малых деформаций однородного изотропного тела, то вариационная задача о минимумах функционала

$$J[e_{ik}, u_k] = \frac{1}{2} \int_D s_{ik} e_{ik}\, dv - \int_D f_k u_k\, dv - \int_{\mathfrak{F}_1} F_k u_k\, da$$

с допустимыми функциями, удовлетворяющими уравнениям (2), эквивалентна интегрированию системы (1)—(2). Этот и другие полученные результаты распространяют принцип минимума потенциальной энергии на случай конечных деформаций. Л. Я. Цлаф

7773. Об устойчивости трехслойной пологой цилиндрической оболочки при сжатии. Куршин Л. М., Изв. АН СССР. Отд. техн. н., 1958, № 8, 97—100

Рассматривается трехслойная цилиндрическая круговая оболочка, состоящая из двух тонких наружных слоев и заполнителя. Для определения деформации наружных слоев принимается гипотеза Кирхгофа, напряжения в заполнителе предполагаются линейно меняющимися по толщине, в поперечном направлении оболочка несжимаема. Нелинейная деформация оболочки определяется через 5 неизвестных компонент перемещений согласно положениям теории пластинок Кармана. Уравнения равновесия и краевые условия выводятся при помощи вариационного принципа Лагранжа. Для уменьшения числа неизвестных вводится функция тангенциальных условий и, в соответствии с этой процедурой, условие совместности деформации. В итоге получается система с тремя неизвестными, из которых только условие совместности деформации совпадает по структуре с соответствующими уравнениями однослойной оболочки. Однако строение системы такое, что для интегрирования применим метод Галеркина, где аппроксимируется только прогиб w. В качестве примера решается задача о сжатой вдоль образующей свободно опертой квадратной панели; прогиб задается в форме $w = f \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/a)$. Приводятся выражения для критической нагрузки T_+ и наименьшей нагрузки в закритической области T_-; анализируется влияние свойств заполнителя на отношение T_+/T_-. Н. А. Алумяэ

7774. Об оценке точности вариационного метода определения больших прогибов оболочек. Свирский И. В., Изв. Казанск. фил. АН СССР. Сер. физ.-матем. и техн. н., 1958, вып. 12, 43—52

Задача о минимальном значении функционала $I_1 = \int \Phi(w)\, dv$, представимого в виде суммы $\int \Phi_1(w)\, dv + \int \Phi_2(w)\, dv$, заменяется ослабленной задачей о минимуме функционала $I_2 = \int \{\Phi_1(w_1) + \Phi_2(w_2) + \lambda(w_2 - w_1)\}\, dv$, где λ — заданная функция. При этом предполагается, что функционалы $\int \Phi_1(w_1)\, dv$ и $\int \Phi_2(w_2)\, dv$ имеют при допускаемых функциях w один экстремум, и он является минимумом. Необходимые условия минимума для функционала I_2 будут $L\Phi_1(w_1) - \lambda = 0$, $L\Phi_2(w_2) + \lambda = 0$ и $\varepsilon(w_2) = L\Phi_1(w_2) + L\Phi_2(w_2)$. В расчетах задается w_2; λ определяется из уравнения $\lambda = -L\Phi_2(w_2)$. Точность каждого из решений характеризуется разностью $I_1 - I_2 = \int \Phi_1 \{[L\Phi_1]^{-1} \varepsilon\}\, dv$, где $[L\Phi]^{-1} \varepsilon$ — решение уравнения $L\Phi_1(w_2 - w_1) = \varepsilon(w_2)$. Это соотношение используется для оценки точности определения вариационным методом прогибов пластин и оболочек. Метод может быть применен, когда в оболочке имеют место растягивающие главные мембранные напряжения. Н. А. Алумяэ

См. также: 7782.

АНАЛИЗ (другие вопросы)

Редакторы В. В. Немыцкий, В. К. Захаров

7775. **Кубические графики. Накадзава** (Cubic graphs. Nakazawa T.), Math. Gaz., 1959, 43, № 345, 203—204 (англ.)

7776. **Пределы. Слессенгер** (Limits. Slessenger W. W. O.), Math. Gaz., 1959, 43, № 345, 203 (англ.)

7777. **Заметка о выражении $\sum x_k/(x_k+x_{k+1})$. Цулауф** (Note on the expression $\sum x_k/(x_k+x_{k+1})$. Zulauf A.), Math. Gaz., 1959, 43, № 343, 42 (англ.)

Доказано, что выражение

$$Q=\frac{x_1}{x_1+x_2}+\frac{x_2}{x_2+x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n}{x_n+x_1},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неотрицательные числа, а знаменатели отличны от нуля, удовлетворяет неравенству $1<Q<n-1$, причем границы этого неравенства нельзя сузить. А. Н. Хованский

7778. **Замечание по поводу некоторых неравенств. Маллин** (Concerning some inequalities. Mullin Albert A.), Amer. Math. Monthly, 1959, 66, № 6, 498—500 (англ.)

На основе свойств выпуклых функций доказываются некоторые известные элементарные неравенства, например:

$$\frac{\alpha}{a}[a+(a-1)^2]+\frac{\beta}{b}[b+(b-1)^2]\geqslant \alpha a+\beta b-1+$$

$$+(\alpha a+\beta b)^{-1}\geqslant 1,$$

$$a>0,\ b>0,\ \alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0,\ \alpha+\beta=1.$$

Приведенные доказательства также известны.

В. И. Левин

7779. **Заметка о второй основной теореме П. Турана. Утияма** (A note on the second main theorem of P. Turán. Uchiyama S.), Acta math. Acad. scient. hung., 1958, 9, № 3—4, 379—380 (англ.)

Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — n комплексных чисел, удовлетворяющих условию $1=z_1\geqslant|z_2|\geqslant\ldots\geqslant|z_n|$ и пусть $s_\nu=b_1z_1^\nu+b_2z_2^\nu+\ldots+b_nz_n^\nu$, где b_j — произвольные комплексные числа. Вторая основная теорема Турана утверждает, что существует произвольная постоянная $A>0$ такая, что

$$\max_{m+1\leqslant\nu\leqslant m+n}|s_\nu|\geqslant\left(\frac{n}{A(m+n)}\right)^n\min_{1\leqslant j\leqslant n}|b_1+\ldots+b_j|,$$

где m — неотрицательное целое. Постоянная A удовлетворяет неравенствам

$$2e^{1+4/e}\geqslant A\geqslant e^{\theta_0}, \qquad (1)$$

где θ_0 — положительный (единственный) корень уравнения $\theta e^{\theta+1}=1$ и, следовательно, $e^{\theta_0}\sim 1{,}321$.

Цель статьи показать, что постоянная A не может быть меньше e. Двойное неравенство (1) может быть заменено следующим: $8e\geqslant A\geqslant 1{,}473$. Е. П. Ожигова

7780. **Несимметрические средние. Хоссу** (в подл. Hossu M.) (Hosszú M.), Colloq. math., 1957, 5, № 1, 32—42 (русск.)

Несимметрическим (квазилинейным) средним x и y называется

$$x\cdot y=\varphi[pf(x)+qf(y)], \qquad (1)$$

где $t\to f(t)$ — взаимнооднозначное отображение, $t\to\varphi(t)$ — отображение, обратное к нему, и $p+q=1$. При $p>0$, $q>0$ среднее $x\cdot y$ называется внутренним, в противном случае — внешним. Среднее называется строго монотонно возрастающим, если для $x>y$ $x\cdot u>y\cdot u$ и $u\cdot x>u\cdot y$, сократимым — если для $x\neq y$ $x\cdot u\neq y\cdot u$ и $u\cdot x\neq u\cdot y$. Правосторонняя и левосторонняя автодистрибутивность определяется соотношениями $(x\cdot y)\cdot z=(x\cdot z)\cdot(y\cdot z)$, соответственно $z\cdot(x\cdot y)=(x\cdot z)(z\cdot y)$.

Доказывается (теорема 1), что всякая непрерывная, двусторонне автодистрибутивная и сократимая операция $x\cdot y$, определенная на некотором интервале, является несимметричным средним, т. е. представима в виде (1). Если дано множество $A=\{x, y, \ldots\}$, в котором определена операция $x\cdot y$, и квазигруппа $G=\{a, b, \ldots\}$, т. е. множество, в котором определена некоторая операция ab, имеющая две обратные операции, то A называется изотопом G, если существуют три взаимно однозначных отображения f, g, h A на G, для которых $h(x\cdot y)=f(x)g(y)$ и $\chi(ab)=\varphi(a)\cdot\psi(b)$, где $\varphi=f^{-1}$, $\psi=g^{-1}$, $\chi=h^{-1}$. Доказываются теоремы существования изотопов групп и полугрупп, обладающие свойством автодистрибутивности:

Теорема 2. Для существования правосторонне автодистрибутивного изотопа группы G необходимо и достаточно существование в ней автоморфизма ω с одной неподвижной точкой (единицей группы), т. е. удовлетворяющего условиям $\omega(ab)=\omega(a)\omega(b)$, $\omega c\neq c$ для $c\neq e$, $\sigma G=G$, где $\sigma a=(\omega a)^{-1}a$.

Аналогичное утверждение имеет место для левосторонней автодистрибутивности.

Теорема 3. Для существования двусторонне автодистрибутивного изотопа группы достаточно и необходимо, чтобы она была коммутативна и чтобы в ней существовал автоморфизм с одной неподвижной точкой.

Теорема 4. Для того, чтобы существовал изотоп G двусторонне автодистрибутивной квазигруппы A, являющийся группой, необходимо и достаточно существование в A элемента u, для которого при любых x, y, z из A имеет место соотношение $(x\cdot y)\cdot(u\cdot z)=(x\cdot u)\cdot(y\cdot z)$.

В. И. Левин

7781. **О несимметрических средних. Хоссу** (Nemszimmetrikus középértékek. Hosszú Miklós), Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1957, 7, № 2, 207—218 (венг.)

В статье содержатся результаты работы автора (реф. 7780), а также некоторые дальнейшие замечания. В частности, приведен пример регулярной структуры, в котором действует только с одной стороны автодистрибутивный бинарный оператор. Тогда, если этот оператор с другой стороны не является автодистрибутивным, то он также и не бисимметричен. J. Aczél

7782. **Задача дифференциального исчисления с изменениями в смежных областях. Огилви** (A calculus problem with overtones in related fields. Ogilvy C. S.), Amer. Math. Monthly, 1958, 65, № 10, 765—767 (англ.)

Рассматриваются следующие экстремальные задачи: I. Два корабля стоят на якоре на известных расстояниях от берега. Шлюпка с одного из них высаживает пассажира на берег и следует ко второму. а) Каков кратчайший путь шлюпки? б) Каков наиболее выгодный для экипажа путь, если пассажир уплачивает каждому члену экипажа доллар за милю пути, а каждый член экипажа платит доллар за милю пути от берега до второго корабля? II. Человек гребет со скоростью 4 мили в час и идет пешком со скоростью 5 миль в час. а) Где он должен высадиться, чтобы достигнуть заданной

точки в кратчайшее время? Приводится решение этих задач, основанное на законах оптики (принцип Ферма, закон Снеллиуса), и решение средствами дифференциального исчисления. В связи с последним указывается, что если две различные задачи приводят к одному и тому же уравнению, то это уравнение должно иметь по крайней мере два различных корня, один из которых для каждой из этих задач является посторонним. Так связаны задачи I а) и I б). Задачей, „сопряженной" задаче II а), является следующая. Каков наиболее выгодный путь для лица, упоминаемого выше, если он уплачивает владельцу шлюпки доллар за час и получает доллар за каждый час ходьбы? А. Г. Школьник

7783. Приближенное значение $(a^2+b)^{1/3}$. **Хомер** (An approximation to $(a^2+b)^{1/3}$. Homer J. B.), Math. Gaz., 1959, **43**, № 345, 189—190 (англ.)

7784. О единственности элементарных векторных операторов. **Сантало** (Sobre la unicidad de los operadores vectoriales elementales. Santaló L. A.), Math. notae, 1955, **14**, № 3-4, 120—132 (исп.)

Доказывается, что из всех векторов, координаты которых являются линейными комбинациями частных производных φ_x, φ_y, φ_z некоторого скаляра φ, свойством инвариантности относительно выбора прямоугольной системы координат обладают лишь те, которые пропорциональны вектору grad φ. Также доказывается, что и ротор векторного поля является, с точностью до постоянного, единственным вектором, обладающим указанным свойством среди всех векторов, координаты которых являются линейными комбинациями частных производных от координат исходного вектора. Э. Апарисио

7785. Сравнение значений выражений

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\int_a^b |f_k(x)|^{\lambda_k}dx\right)^{1/\lambda_k} \text{ и } \prod_{k=1}^{m}\left(\int_a^b |g_k(x)|^{\mu_k}dx\right)^{1/\mu_k}$$

при условии

$$\prod_{k=1}^{n} f_k(x) = \prod_{k=1}^{m} g_k(x).$$

Ю Чжао-юн, Кэсюэ юй цзишу (ликэ), 1958, № 3, 243—253 (кит.)

Рассматривается ряд случаев, при которых неравенство, аналогичное неравенству Гёльдера—Буняковского для интегралов, не имеет места. Например: 1) неравенство

$$\int_a^b \left|\prod_{k=1}^{n} f_k(x)\right| dx < \prod_{k=1}^{n}\left(\int_a^b |f_k(x)|^{\lambda_k}dx\right)^{1/\lambda_k}$$

не всегда справедливо, когда $\sum_{k=1}^{n} 1/\lambda_k < 1$; $\lambda_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$ и при этом $b - a > 1$; 2) при условии $n, m > 1$ и $\mu_k > 0$, $k = 1, \ldots, m$, $\lambda_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$, значения выражений $\prod_{k=1}^{n}\left(\int_a^b |f_k(x)|^{\lambda_k}dx\right)^{1/\lambda_k}$ и $\prod_{k=1}^{m}\left(\int_a^b |g_k(x)|^{\mu_k}dx\right)^{1/\mu_k}$ $\left(\prod_{k=1}^{n} f_k(x) = \prod_{k=1}^{m} g_k(x)\right)$ не сравнимы, т. е. первое выражение может быть и больше, и меньше, и равным второму. Ши Чжун-цы

7786. О представлении векторных функций интегралами Лапласа — Стилтьеса. **Зайдман** (Sur la représentation des fonctions vectorielles par des intégrales de Laplace—Stieltjes. Zaidman Samuel), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 13, 905—907 (франц.)

Вторая статья по этому вопросу (РЖМат, 1959, 2841). Здесь отмечается, что условие (A_1') представимости векторной функции $f(s)$ в виде $\int_0^\infty e^{-st}\,da(t)$ в произвольных банаховых пространствах уже не необходимо, и формулируется несколько модифицированное условие (A_1''), которое является необходимым, а в слабо полном банаховом пространстве и достаточным. Функция $f(s)$, определенная для $s > 0$ и принимающая значения из X, удовлетворяет условию (A_1''), если для каждого $x' \in X'$ (пространства, сильно двойственного X) скалярная функция $(x', f(s)) = f_{x'}(s)$ удовлетворяет условию (A) Уиддера (т. е. имеет производные всех порядков для $s > 0$ и удовлетворяет неравенствам

$$\int_0^\infty |f_{x'}^{(k)}(s)|\,\frac{s^{k-1}}{(k-1)!}\,ds < M,\ k = 1, 2, \ldots,$$

где M — не зависящая от k постоянная). Изучаются представления функций, удовлетворяющих условию (A_1''). В. И. Левин

7787. Некоторые достаточные условия для существования асимптотической формулы или асимптотического разложения. **Россер** (Some sufficient conditions for the existence of an asymptotic formula or an asymptotic expansion. Rosser J. Barkley), On Numerical Approximat. Madison, Univ. Wisconsin Press, 1959, 371—387 (англ.)

Исследуется асимптотическое поведение интегралов вида

$$\int_A^B f(x, z)\, e^{zg(x,z)}\,dx,$$

при $|z| \to \infty$. Автор называет функцию $f(x, z)$ слабо сходящейся к функции $k(z)$ в области $a < \arg z < b$ при $x \to A + 0$, если существует положительная монотонно возрастающая неограниченная функция $h(|z|)$ такая, что для каждого положительного ε можно указать такое положительное число Z, что

$$|f(x, z) - k(z)| < \frac{\varepsilon}{h(|z|)}$$

при $|z| \geqslant Z$, $a \leqslant \arg z \leqslant b$, $A < x < A + |z|^{-1/3}h(|z|)$. Для слабой сходимости вводится следующее обозначение:

$$\operatorname{W\,lim}_{x \to A+0} f(x, z) = k(z).$$

Пусть функции $f(x, z)$ и $g(x, z)$ в области $a \leqslant \arg z \leqslant b$ удовлетворяют условиям

$$|e^{zg(x,z)}| \leqslant e^{-d|z|(x-A)^2},\ d > 0,\ |z| \geqslant R,$$

$$|f(x, z)\, e^{zg(x,z)}| < Ce^{-c|z|(x-A)^2},\ c > 0,\ |z| \geqslant R;$$

$$\operatorname{W\,lim}_{x \to A+0} f(x, z) = k = \text{const},$$

$$\operatorname{W\,lim}_{x \to A+0} \frac{g(x, z)}{(x-A)^2} = -a = \text{const}.$$

Доказывается, что в этом случае

$$\lim_{|z| \to \infty} \sqrt{z}\int_A^B f(x, z)\, e^{zg(x,z)}\,dx = \frac{k\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}.$$

Рассматривается, в частности, случай, когда f и g не зависят от z. Д. П. Костомаров

7788. Криволинейный интеграл в функциональном пространстве. **Свидзинский А. В.,** Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 1, 199—203

Исходя из определения функциональной производной от функционала $F(\varphi)$

$$\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(x)} = \lim_{\delta\varphi\to 0} \frac{F[\varphi+\delta\varphi]-F[\varphi]}{\int \delta\varphi(y)\,dy} \qquad (1)$$

(предполагается, что функция $\delta\varphi(y)$ отлична от нуля лишь в окрестности точки x и что диаметр этой окрестности, а также $\max\delta\varphi(y)$ стремятся к нулю), автор ставит задачу о восстановлении функционала по его функциональной производной

$$\frac{\delta F[\varphi]}{\delta\varphi(x)} = \Phi[\varphi \mid x]. \qquad (2)$$

С этой целью x-пространство аппроксимируется дискретным и конечным пространством. При этом уравнение (2) заменяется системой

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi_k} = \omega\Phi_k[\varphi_1,\ldots,\varphi_n], \quad k=1,2,\ldots,n, \qquad (3)$$

где ω — объем элементарного куба. Система (3) позволяет записать F в форме криволинейного интеграла (условия полной интегрируемости предполагаются выполненными). Предельный переход приводит автора к формуле для определения $F[\varphi]$:

$$F[\varphi] = \int dx \int_{\alpha(x)}^{\varphi(x)} \Phi[\varphi \mid x]\,d\varphi(x) + C. \qquad (4)$$

„Криволинейный интеграл" в формуле (4) может быть вычислен по отрезку, соединяющему $\alpha(x)$ и $\varphi(x)$, что превращает его в обычный интеграл по произведению x-пространства на отрезок $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Точные формулировки в статье отсутствуют, так же как и доказательства допустимости осуществляемых предельных переходов. Автор указывает, что с помощью указанного аппарата можно без труда получить некоторые важные формулы квантовой теории поля, причем его применение делает выкладки простыми и прозрачными. Приводятся два примера, связанных с работами Н. Н. Боголюбова (Докл. АН СССР, 1954, 99, 25) и И. М. Гельфанда и Р. А. Минлоса (РЖМат, 1955, 2707).

М. К. Гавурин

7789. Решение одного функционального уравнения. Фрейдкин С. А., Уч. зап. Кишиневск. ун-т, 1959, 39, 239—242

Решается функциональное уравнение $f(x) - \lambda f(x+\omega) = \sin x$ в случае, когда $\lambda = e^{\pm i\omega}$. Сначала рассмотрен случай $\omega \neq \pi k$. Решение получено в виде

$$f(x) = \frac{xe^{-ix}}{2i\omega} + \frac{e^{ix}}{2i\left(1-e^{-2i\omega}\right)} + e^{-ix}\gamma(x)$$

при $\lambda = e^{i\omega}$, и $f(x) = \frac{e^{-ix}}{2i\left(1-e^{-2i\omega}\right)} - \frac{xe^{ix}}{2i\omega} + e^{ix}\gamma(x)$

при $\lambda = e^{-i\omega}$. Для $\omega = \pi k = 2n\pi$, $f(x) = \frac{x}{4\pi ni}(e^{-ix}-e^{ix}) + \gamma(x)$ и для $\omega = (2n-1)\pi$, $f(x) = \frac{x(e^{-ix}-e^{ix})}{(2n-1)\pi i} + \gamma(x)$ ($\lambda = e^{i\omega}$).

Э. А. Чернышенко

7790. Функциональное уравнение трансляции. Ангелуцэ (Ecuaţia funcţională a translaţiei. Angheluţă Th.), Lucrări ştiinţ. Inst. politehn. Cluj. Cluj, 1959, 29—31 (рум.; рез. русск., франц.)

Дается решение функционального уравнения

$$z[z(x,y),t] = z(x,y+t)$$

методом Абеля в предположении, что решение представляет строго монотонную функцию.

Э. А. Чернышенко

7791. О выпуклых решениях функционального уравнения $g[\alpha(x)]-g(x)=\varphi(x)$. Кучма (On convex solutions of the functional equation $g[\alpha(x)]-g(x)=\varphi(x)$. Kuczma Marek. Publs math., 1959, **6**, № 1-2, pp. 40—47) (англ.)

Обобщаются результаты о существовании выпуклого решения уравнения

$$g[\alpha(x)] - g(x) = \varphi(x), \qquad (1)$$

где $g(x)$ — искомая функция, известные для конкретных значений функций $\alpha(x)$ и $\varphi(x)$.

Доказана теорема: Если функция $\alpha(x)$ вогнута и непрерывна в интервале $[a,\infty)$ и $\alpha(x) > x$ в $[a,\infty)$, если функция $\varphi(x)$ непрерывна в $[a,\infty]$, положительна (а также возрастающая) для достаточно больших x и выполняется условие $\lim_{n\to\infty}[\varphi(a_n) - \varphi(a_{n-1})] = 0$ ($a_n = \alpha^n(a)$), тогда в большинстве случаев существует выпуклая функция $g(x)$, удовлетворяющая уравнению (1) в интервале $[a,\infty)$, принимающая заданное значение при $x = a$. Необходимым условием для существования такого решения является соотношение $\lim_{x\to\infty}\alpha(x)/x = 1$.

Э. А. Чернышенко

7792. О функциональном уравнении $f[x+yf(x)] = f(x)f(y)$. Голомб, Шинцель (Sur l'équation fonctionelle $f[x+yf(x)]=f(x)f(y)$. Gołąb S., Schinzel A.), Publs math., 1959, **6**, № 1-2, p. 113—125) (франц.)

Решается вопрос о классах решений уравнения

$$f[x+yf(x)] = f(x)f(y) \qquad (1)$$

в области действительных функций.

Первый из авторов установил, что в классе дифференцируемых функций имеются следующие решения уравнения (1): $f(x) \equiv 0$ или $f(x) = 1+mx$, где m — любая постоянная величина. В области непрерывных функций существуют также и другие решения:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant x_2 \ (x_2<0) \\ 1-x/x_2 & \text{при } x \geqslant x_2, \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1-x/x_1 & \text{при } x \leqslant x_1 \ (x_1>0) \\ 0 & \text{при } x \geqslant x_1. \end{cases}$$

Далее рассматривается класс микропериодических функций — функций, имеющих сколь угодно малые периоды. Установлено, что уравнение (1) имеет нетривиальные микропериодические решения.

Э. А. Чернышенко

7793 К. Функции, производные, интегралы. Кравинкелс (Functies, afgeleiden, integralen. 2-e voll. herw. druk van Differentiaalen integraalrekening. Kravewinkels J. E. Antwerpen—Brussel—Gent—Leuven, Standaard-Boekh., 1959, 179 blz, ill., 225 Bfr.), Bibliogr. Belg., 1959, 85, № 6, 173 (флам.)

7794 К. Асимптотические методы в анализе. Брёйн (Asymptotic methods in analysis. Bruijn Nicolaas Govert de. Amsterdam, North-Holland Publ. Co.; Groningen, Noordhoff, 1958, xii, 200 pp., 40 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 466, 9 (англ.)

7795 К. Курс математического анализа. I. II. Бермант (Matematikai analizis. Bermant A. F.), Budapest, Tankönyvkiadó, 1958, I. 472 l, 18 Ft; II. 368 l, 14 Ft. (венг.)

Перевод с русского (РЖМат, 1953, 791).

7796 К. Введение в дифференциальное и интегральное исчисление. Васкес-Гарсия, Баррос-Сьерра (Introducción al cálculo diferencial e integral. Vázquez García Roberto, Barros Sierra Javier. México, Univ. nac. autonoma México, 1958, 343 p., 40 pesos), Bol. bibliogr. mexic., 1958, 18, № 217, 31 (исп.)

7797 К. Курс дифференциального и интегрального исчисления. [Для ун-тов и пед. ин-тов]. Т. 2. Изд. 4-е, испр. и доп. Фихтенгольц Г. М. М., Физматгиз, 1959, 807 стр., илл., 16 р. 70 к.

7798 К. Упражнения по математическому анализу. Т. I. Изд. 2-е. Финци, Морра (Esercizi di analisi matematica. Vol. 1. 2a ed. Finzi Bruno, Morra Francesco. Milano, C. Tamburini, 1958, 327 p. 3300 L.), Bibliogr. naz. ital., 1958, **1**, № 7, 262 (итал.)

7799 К. Упражнения и дополнения математического анализа. Ч. I. Изд. 5. Трикоми (Esercizi e complementi di analisi matematica. Parte I. 5a ed. Tricomi Francesco Giacomo. Padova, C. E. D. A. M. 1958, XII, 367 p., ill., 3900 L.), Bibliogr. naz. ital., 1958, 1, № 1, 15 (итал.)

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

7800. Геометрическая прогрессия. Кукьерт (Progressões geometricas. Cukiert José), Matemática, 1959, **4**, № 11, 41—44 (порт.)

7801. Новое доказательство формулы Бинета. Чэн Цзи-пэй (Cheng Ji-pei), Шусюэ тунбао, Mathematics (Monthly), 1958, № 7, 12 (кит.)

Дается простое доказательство для выражения общего члена последовательности Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...

$$\mu_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]. \qquad (1)$$

Пусть $k=(1+\sqrt{5})/2$ или $(1-\sqrt{5})/2$ (применяется метод индукции); легко видеть, что справедливы уравнения $k^n = \mu_n k + \mu_{n-1}$, $n \geqslant 1$, $k^{-n} = (-1)^{n+1}\mu_n k + (-1)^n \mu_{n+1}$, $n \geqslant 1$. Отсюда и выводится формула (1).

7802. К теореме конденсации Коши. Алексевич (On Cauchy's condensation theorem. Alexiewicz A.), Studia math., 1957, **16**, № 1, 80—85 (англ.)

Используя методы функционального анализа, автор устанавливает две теоремы, которые можно рассматривать как обобщение признака сходимости (теоремы конденсации) Коши: Если ε_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$—неотрицательная, невозрастающая последовательность, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \varepsilon_{2^k}$ сходится (расходится) одновременно со сходимостью (расходимостью) ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n$.

Теорема 1. Ряд $\sum a_n \varepsilon_n$ сходится для каждого сходящегося ряда $\sum \varepsilon_n$ с невозрастающими членами ε_n тогда и только тогда, когда

$$\overline{\lim}\, \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} < \infty.$$

Теорема 2. Пусть $a_n \geqslant 0$. Для любой неотрицательной, невозрастающей последовательности ε_n из сходимости $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon_n$ вытекает сходимость $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n$ тогда и только тогда, когда

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} > 0.$$

И. И. Огиевецкий

7803. Заметка о теоремах суммирования Мазура и Орлича. Парамесваран (Note on a theorem of Mazur and Orlicz in summability. Parameswaran M. R.), J. Indian Math. Soc., 1958 (1959), **22**, № 2, 65—75 (англ.)

Рассматриваются матричные преобразования $y_i \equiv \equiv A_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{in} x_n$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Изучаются матрицы следующих типов: сохраняющие сходимость, сохраняющие сходимость для нуль-последовательностей, реверсивные, типа M. Основой исследования автора служит теория линейных преобразований, разработанная Мазуром и Орличем (РЖМат, 1956, 4607); даются приложения теории, обобщаются некоторые результаты. Приняты обозначения: (m), (c) и (c_0) — соответственно множества ограниченных, сходящихся и сходящихся к нулю последовательностей; (A) — множество A-суммируемых последовательностей, (A) (m) — множество ограниченных A-суммируемых последовательностей. Берется норма $\| x \| = \sup_n | x_n |$, $x \in (m)$.

Отметим основные результаты, полученные автором.

1. Матрицы A, сохраняющие сходимость, обладают свойствами: а) (A) (m) сепарабельно в (m) тогда и только тогда, когда (A) $(m) = (c)$, б) если матрица A имеет левую обратную матрицу B и $\| B \| < \infty$, тогда (A) $(m) = (c)$, в) если матрица A имеет обратную B и $| B | < \infty$, тогда матрица B также сохраняет сходимость;

2. Аналогичные свойства имеют матрицы, сохраняющие сходимость для нуль-последовательностей;

3. Пусть матрица A сохраняет сходимость, реверсивна, типа M и $(A) \neq (c)$, тогда (A) $(m) \neq (c)$. С помощью последней теоремы уточняется один результат Хилла (Hill J. D., Bull. Amer. Math. Soc., 1944, **50**, 227—230).

Замечена опечатка: на стр. 65, в последней строке напечатано $i \to \infty$, должно быть $n \to \infty$. М. П. Щеглов

7804. Общий метод суммирования типа Бореля. Влодарский (General method of limitation of the Borel type. Włodarski L.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron et phys., 1959, **7**, № 4, 199—200 (англ.; рез. русск.)

Формула

$$B_\alpha(t, x) = \alpha e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + 1)} \xi_n$$

определяет преобразование последовательности комплексных чисел $x = \{\xi_n\}$. Эта последовательность суммируема методом B_α к числу ξ, если $\lim_{t\to\infty} B_\alpha(t, x) = \xi$.

В прежних работах автора (РЖМат, 1957, 2454; 1959, 1635) были получены результаты для методов B_α, когда $\alpha = k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. В настоящей заметке сообщается, что большая часть этих результатов остается в силе и для произвольных α.

Ф. И. Харшиладзе

7805. Бинарные и тернарные преобразования последовательностей. Боруэйн, Бойд (Binary and ternary transformations of sequences. Borwein D., Boyd A. V.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1959, **11**, № 3, 175—181 (англ.)

Бинарным преобразованием $T(\alpha)$, α — действительно, называется преобразование, преобразующее последовательность $\{s_i\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, в $\{s_i(1, \alpha)\}$, где

$$s_i(1, \alpha) = \begin{cases} \alpha s_0, & i = 0, \\ \alpha s_i + (1-\alpha)\, s_{i-1}, & i = 1, 2, 3; \end{cases}$$

r-кратная итерация $T(\alpha)$ приводит к $T^{(r)}(\alpha)$, преобразующему $\{s_i\}$ в $\{s_i(r, \alpha)\}$, где $s_n(0, \alpha) = s_n$, $s_n(r, \alpha) = 0$ для n целых отрицательных, и для всех n и $l \geqslant 0$

$$s_n(l+1, \alpha) = \alpha s_n(l, \alpha) + (1-\alpha)\, s_{n-1}(l, \alpha).$$

Если $\lim_{n\to\infty} s_n(r,\alpha)=s$, то $s_n-T^{(r)}(\alpha)$ суммируемо к s, если $\lim_{n\to\infty} s_n(n,\alpha)=s$, то $s_n-T^{\infty}(\alpha)$ суммируемо к s. $T^{\infty}(\alpha)$ совпадает с преобразованием Эйлера $\left(E,\frac{1}{\alpha}-1\right)$.

В работе исследуются свойства метода суммирования $T^{(r)}(\alpha)$.

1. Для $r\geqslant 0$: 1) из $T^{(r)}(\alpha)$ вытекает $T^{(r+1)}(\alpha)$, α произвольно, 2) из $T^{(r)}(\alpha)$ вытекает $T^{\infty}(\alpha)$, тогда и только тогда, если $0<\alpha\leqslant 1$.

2. Из (C,s)-суммируемости не вытекает $T^{(r)}(\alpha)$- суммируемости, $(C,0)$ эквивалентно $T^{(r)}(\alpha)$ для $\alpha>\frac{1}{2}$; $T^{(r)}\left(\frac{1}{2}\right)$ эквивалентно (C,r) и для каждого целого r существует последовательность, суммируемая $T^{(r)}\left(\frac{1}{2}\right)$, но не суммируемая $(C,r-\delta)$ для любого $\delta>0$; при $\alpha<\frac{1}{2}$ из суммируемости $T^{(r)}(\alpha)$ не вытекает абелева суммируемость.

Определим s_n' следующим образом:

$$s_0'=\alpha s_0,\quad s_1'=\alpha s_1+\beta s_0,$$

$$s_n'=\alpha s_n+\beta s_{n-1}+(1-\alpha-\beta)\,s_{n-2},\quad n=2,3,4,\ldots;$$

$T(\alpha,1-\alpha)$ эквивалентно $T(\alpha)$. Последовательность s_n' автор называет тернарным преобразованием ($T(\alpha,\beta)$-преобразованием) последовательности s_n. Если $\lim_{n\to\infty} s_n'=s$, то s_n $T(\alpha,\beta)$-суммируемо к s. Исследуется связь $T(\alpha,\beta)$-суммируемости с суммируемостью методом Чезаро и Абеля. Полученные результаты носят специальный характер. И. И. Огиевецкий

7806. Некоторые обобщения второй теоремы тауберова типа. Флетт (Some generalizations of Tauber's second theorem. Flett T. M.), Quart. J. Math., 1959, 10, № 37, 70—80 (англ.)

В основном статья посвящена обобщению известных теорем тауберова типа, полученных ранее различными авторами, в том числе и автором статьи. Пусть σ_n^{α} и τ_n^{α} — средние Чезаро ряда

$$\sum_1^{\infty} a_k \qquad (1)$$

и последовательности na_n, а $\Phi(x)=\sum_1^{\infty} a_n x^n$.

Теорема 1. Если $k\geqslant 1$, $\alpha>0$, $p=\gamma-1\geqslant 0$, то из

$$\left\{(1-x)^{-p}\int_x^1 \frac{|\Phi(y)-s|^k}{(1-y)^{2-\gamma}}\,dy\right\}^{1/k}=o(1)$$

и

$$\left\{m^p\sum_{n=m}^{\infty}|\tau_n^{\alpha}|^k/n^{\gamma}\right\}^{1/k}=o(1)$$

следует

$$\left\{m^p\sum_{n=m}^{\infty}|\sigma_n^{\alpha-1}-s|^k/(n+1)^{\gamma}\right\}^{1/k}=o(1).$$

Теорема 2. Пусть $k\geqslant 1$, $\alpha>0$. Тогда для любого s

$$\left\{\sum_0^{\infty}\frac{|\sigma_n^{\alpha-1}-s|^k}{n+1}\right\}^{1/k}\leqslant A(k,\alpha)\left\{\sum_1^{\infty}\frac{|\tau_n^{\alpha}|^k}{n}\right\}^{1/k}+$$

$$+\left\{\int_0^1\frac{|\Phi(x)-s|^k}{1-x}\,dx\right\}^{1/k}.$$

Ряд (1) суммируем $|C,\alpha|_k$, $k\geqslant 1$, $\alpha>-1$, если

$$\sum_1^{\infty} n^{k-1}|\sigma_n^{\alpha}-\sigma_{n-1}^{\alpha}|^k<\infty.$$

Ряд (1) суммируем $|A|_k$, если

$$\int_0^1(1-x)^{k-1}|\Phi'(x)|^k\,dx<\infty.$$

Теорема 3. Пусть $k\geqslant 1$, $\alpha>-1$. Если ряд (1) суммируем $|A|_k$, а ряд $\sum_1^{\infty}\Delta(na_k)$ суммируем $|C,\alpha+1|_k$, то ряд (1) суммируем $|G,\alpha|_k$. Ряд (1) суммируем $[C,\alpha]_k$ к s, где $k\geqslant 1$, $\alpha>0$, если $\sum_1^m|\sigma_n^{\alpha}-s|^k=o(m)$, $m\to\infty$. Ряд (1) суммируем $[A]_k$ к s, если

$$\int_0^R\frac{|\Phi(x)-s|^k}{(1-x)^2}\,dx=o\left(\frac{1}{1-R}\right),\quad R\to 1.$$

Теорема 4. Пусть $k\geqslant 1$, $\alpha>0$. Если $\sum_1^{\infty}a_k=s[A]_k$ и $\sum_1^{\infty}|\tau_n^{\alpha}|^k=o(m)$, то $\sum_1^{\infty}a_k=s[C,\alpha]_k$.

Теорема 5. Если $k\geqslant 1$, $\alpha>0$, то

$$\sup_m\left\{\frac{1}{m+1}\sum_0^m|\sigma_n^{\alpha-1}|^k\right\}^{1/k}\leqslant A(k,\alpha)\cdot\sup\left\{\frac{1}{m+1}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_1^m|\tau_n^{\alpha}|^k\right\}^{1/k}+A(k)\cdot\sup_{0<R<1}\left\{(1-R)\int_0^R\frac{|\Phi(x)|^k}{(1-x)^2}\,dx\right\}^{1/k}.$$

К. М. Слепенчук

7807. Разложение в ряд arcsin x. Барсотти (Series expansion of the arc sine function. Barsotti Leo), Soc. Parana. Mat. Anuário, 1955, 2, 1—2 (порт.)

Автор выводит разложение в ряд Маклорена для $\arcsin x$ из разложения $\operatorname{arc\,tg} x$, не пользуясь разложением в степенной ряд $\arcsin x$. R. P. Boas, Jr

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 3, 205.

7808. Цепные дроби с абсолютно сходящейся четной или нечетной частью. Досон (Continued fractions with absolutely convergent even or odd part. Dawson David F.), Canad. J. Math., 1959, 11, № 1, 131—140 (англ.)

Рассмотрены условия, при которых абсолютная сходимость подпоследовательности подходящих дробей с четными или нечетными индексами данной цепной дроби влечет за собой сходимость последней. Обозначив через f_p подходящую дробь p-го порядка цепной дроби

$f(a)=\cfrac{1}{1+\cfrac{a_1}{1+\cfrac{a_2}{1+\cfrac{a_3}{1}}}}+\ldots$ и через g_p подходящую дробь p-го порядка цепной дроби $g(b)=\cfrac{1}{b_1+\cfrac{1}{b_2+\cfrac{1}{b_3}}}+\ldots$ автор, в частности, доказывает теорему: Если $\{g_{2p-1}\}$ абсолютно сходится, $\{g_{2p}\}$ сходится и ряд $\sum|b_{2p-1}|$ расходится, то $g(b)$ сходится. Существует такая последовательность $\{a_p\}$, что нечетная часть $f(a)$ сходится абсолютно, четная часть сходится, ряд $\sum|b_p$ расходится, а $f(a)$ расходится. С помощью этой теоремы дается новое доказательство теоремы Ван Влекка (Van Vleck, Trans. Amer. Math. Soc., 1901, 2, 215—233): Если существует такое положительное число k, что $|\operatorname{Im} b_p|\leqslant k\operatorname{Re} b_p$ $(p=1, 2, 3,\ldots)$, $b_1\neq 0$ и $\sum|b_p|$ расходится, то $g(b)$ сходится.

Доказаны три теоремы, связанные с системами неравенств Скотта и Уолла (Scott, Wall, Trans. Amer. Math. Soc., 1940, 47, 155—172). Приведем для примера третью из этих теорем: Если 1) имеют место неравенства $r_{2p}|1+a_{2p-1}+a_{2p}|\geqslant r_{2p}r_{2p-2}|a_{2p-1}|+|a_{2p}|$ $(p=1, 2, 3, \ldots)$, где r_{2p} — неотрицательные числа $(p=0, 1, 2,\ldots)$, 2) существует такое число r, что $0<r_{2p-2}\leqslant r<1$ $(p=1, 2, 3,\ldots)$ и 3) одна из последовательностей $\{a_{2p-1}\}$ и $\{a_{2p}\}$ не содержит нулевых членов, то $f(a)$ абсолютно сходится. Приведен пример расходящейся цепной дроби, удовлетворяющей условиям 1) и 2), но не удовлетворяющей условию 3) этой теоремы: $r_2=1/3$, $r_{2p}=1/2$ $(p=0, 2, 3, 4,\ldots)$, $a_1=a_4=0$, $a_2=-1/4$, $a_3=-3/4$, $a_p=1$ $(p=5, 6, 7,\ldots)$.

А. Н. Хованский

7809 Д. **Множители суммируемости для двойных рядов. Барон С. А.** Автореф. дисс. канд. физ-матем. н., Тартуск. ун—т, Тарту, 1959

7810 Д. **О некоторых свойствах обобщенных методов суммирования. Юримяэ Э. И.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Тартуск. ун-т, Тарту, 1959

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

7811. **Эллиптические функции и интегралы. Лензе** (Elliptische Funktionen und Integrale. Lense J. Handb. Physik. Bd. I. Math. Methoden I. Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1956, 120—146) (нем.)

Это сжатое и очень ясное описание эллиптических функций и интегралов. Содержание статьи видно из оглавления разделов: Двоякопериодические функции: γ-функция; ζ-функция; σ-функция; Эллиптические функции; Эллиптические интегралы; Риманова поверхность для квадратного корня полинома четвертой степени; Конформное отображение, описываемое γ-функцией; Перемещение периодической решетки; Вращение и растяжения периодических решеток; Нормальная форма Вейерштрасса; Конформное отображение двух римановых поверхностей в нормальную форму Вейерштрасса; Простые периоды; Модулярные подстановки (замены); Модулярные функции; Умножение; Комплексное умножение; Редукция эллиптических интегралов; Нормальная форма Лежандра; Тета-функции; Якобиан функций; Преобразование тета-функций.

A. Erdelyi

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 9, 966.

7812. **Об асимптотическом поведении интегралов, содержащих бесселевы функции. Тихонов А. Н.,** Докл. АН СССР, 1959, 125, № 5, 982—985

Рассматриваются интегралы $I_n(\rho)=\int_0^\infty J_n(\lambda\rho)F(\lambda)d\lambda$, где J_n — бесселева функция n-го порядка. Доказывается, что если $F(\lambda)$ — ограниченная функция, имеющая ограниченную вариацию в промежутке (λ_0, ∞), то интеграл $I_n(\rho)$ сходится и стремится к нулю при $\rho\to\infty$. Если $F(\lambda)$ непрерывна, $F(0)=0$, а $F'(\lambda)$ ограничена и имеет ограниченную вариацию, то $\lim\limits_{\rho\to\infty}[\rho I_0(\rho)]=0$; если $F(\lambda)$ имеет в промежутке (λ_0, ∞) ограниченную вариацию, а в промежутке $0\leqslant\lambda<\infty$ существуют n производных $F^{(k)}(\lambda)$, причем $F^{(k)}(\lambda)$ имеет ограниченную вариацию в (λ_k, ∞), непрерывна при $k<n$ и ограничена при $k=n$, и если $F^{(2h)}(0)=0$ для $h=0, 1,\ldots, m$, где $m=\left[\frac{n-1}{2}\right]$, то $\lim\limits_{\rho\to\infty}[\rho^n I_0(\rho)]=0$. Асимптотическое представление для $I_0(\rho)$ дает следующая теорема: Если $F(\lambda)$ имеет в промежутке $0<\lambda<\infty$ n производных $F^{(k)}(\lambda)$ и если $F^{(k)}(\lambda)$ имеет ограниченную вариацию в (λ_k, ∞), непрерывна при $k<n$ и ограничена при $k=n$, то

$$I_0(\rho)=\sum_{k=0}^{m}C_{2k}\frac{F^{(2k)}(0)}{\rho^{2k+1}}+\frac{1}{\rho^n}\varepsilon(\rho),$$

где

$$C_0=1,\ C_{2k}=\frac{(-1)^k 1.3\ldots(2k-1)}{2^k\cdot k!};\quad m=\left[\frac{n-1}{2}\right],$$

$$\lim_{\rho\to\infty}\varepsilon(\rho)=0.$$

Ю. Л. Рабинович

7813. **Соотношения между смежными обобщенными присоединенными лежандровыми функциями (рекуррентные формулы). Кёйперс** (Relations between contiguous generalized Legendre associated functions (recurrence formulas). Kuipers L.), Math. scand., 1958, 6, № 2, 200—206 (англ.)

Речь идет о линейно независимых решениях $P_k^{m,n}(z)$ и $Q_k^{m,n}(z)$ уравнения (РЖМат, 1959, 5971, 9216)

$$(1-z^2)w''-2zw'+\left\{k(k+1)-\frac{m^2}{2(1-z)}-\frac{n^2}{2(1+z)}\right\}=0.$$

Случай $m=n$ соответствует классическим функциям. Устанавливается целый ряд рекуррентных соотношений для различных смежных значений параметров m, n, k. Для примера приведем здесь формулу

$$2(k+1)\left[k+\frac{1}{2}(m+n)\right](z^2-1)^{1/2}P_k^{m-1,n-1}(z)+$$
$$+[2(k+1)z-(m-n)]P_k^{m,n}(z)-$$
$$-2\left[k-\frac{1}{2}(m-n)+1\right]P_{k+1}^{m,n}(z)=0.$$

Далее выводятся рекуррентные формулы, включающие производную $\frac{dP_k^{m,n}(z)}{dz}$. Наконец, дается вывод рекуррентного соотношения неоднородного типа, в котором свободный член выражается через гипергеометрическую функцию $F(a, b; c; z)$ с соответствующими значениями параметров a, b, c.

А. К. Харадзе

7814. Числа Эйлера. Салие (Eulersche Zahlen. Salié Hans), Leonhard Euler 250. Geburtstag. Berlin, Akad. Verl., 1959, 293—310 (нем.; рез. русск.)

Сообщается об эйлеровых числах и эйлеровых полиномах, а также об их значении для исчисления конечных разностей и различных вопросов теории чисел. Рассматривается обобщение чисел Эйлера (коэффициенты рядов Блазиуса из теории дифференциальных уравнений пограничного слоя). Из резюме автора

7815. О некотором классе полиномов и о распределении их нулей. Ральевич (О извјесним класама полинома и о распореду њихових нула. Ральевић Шефкија), Зб. радова. Српска АН, 1956, 50, 1—60 (сербо-хорв.; рез. франц.)

Изучается класс полиномов

$$P_n(z) = U_n(z) + q =$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} (-p^2)^k z^{n-2k} + q,\ \nu = \left[\frac{n}{2}\right],$$

к которым, в частности, принадлежат полиномы Чебышева. В гл. III изучается распределение нулей полиномов

$$U_k(U_m(z) + q) + q,\ \sum_{k=0}^{n-1} A_k U_{n-k}(z) + A_n.$$

Показано, как можно определять число нулей, лежащих на заданной окружности, эллипсе или гиперболе, у полиномов

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k},\ a_0 \neq 0,$$

$$Q_n(z, r, \alpha, \beta) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\lambda=0}^{s} \frac{n-k+2\lambda}{n-k+\lambda} \binom{n-k+\lambda}{\lambda} (-\alpha\beta r^2)^{\lambda} A_{k-2\lambda} z^{n-k} +$$

$$+ 2 \sum_{\lambda=1}^{t} (-\alpha\beta r^2)^{\lambda} A_{n-2\lambda} + A_n,$$

$$s = \left[\frac{k}{2}\right],\ t = \left[\frac{n}{2}\right],\ r > 0,$$

$$A_k = \sum_{\nu=0}^{k} \alpha^{k-\nu} (\beta r^2)^{\nu} a_{k-\nu} a_{n-\nu},\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

$$R_{2n}(z, r, \alpha, \beta) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\lambda=0}^{s} \binom{n-k+2\lambda}{\lambda} (\alpha\beta r^2)^{\lambda} a_{k-2\lambda} [\alpha^{n-k} z^{2n-k} +$$

$$+ (\beta r^2)^{n-k} z^k] + \sum_{\lambda=0}^{t} \binom{2\lambda}{\lambda} (\alpha\beta r^2)^{\lambda} a_{n-2\lambda} z^n,$$

$$s = \left[\frac{k}{2}\right],\ t = \left[\frac{n}{2}\right].$$

В гл. IV рассматриваются полиномы, нули которых, имея определенное регулярное распределение в комплексной плоскости, принадлежат кривым второго порядка, бициркулярным уникурсальным кривым четвертого порядка или циркулярным уникурсальным кривым третьего порядка.

В гл. V нули некоторых полиномов ($P_{m^2}(z)$ и $P_{2m^2}(z)$) выражаются алгебраически через коэффициенты этих полиномов. Из резюме автора

7816. Волновые функции кулонова поля. Ульссон (On Coulomb wave functions. Olsson Per O. M.), Arkiv fys., 1959, 15, № 2, 131—143 (англ.)

Рассматриваются радиальные волновые функции $f(r)$ и $g(r)$ кулонова поля с параметрами αZ, $\varkappa = \pm\left(j + \frac{1}{2}\right)$, где j — квантовое число полного углового момента, и энергией E. Положив $f(r) = \frac{1}{r}\chi_1(r)$, $g(r) = \frac{1}{r}\chi_2(r)$, $r = \frac{t}{2\alpha Z}$, мы получим

$$\frac{d\chi_1}{dt} - \frac{\varkappa}{t}\chi_1 + \left(\frac{E-1}{2\alpha Z} + \frac{\alpha Z}{t}\right)\chi_2 = 0,$$

$$\frac{d\chi_2}{dt} - \left(\frac{E+1}{2\alpha Z} + \frac{\alpha Z}{t}\right)\chi_1 + \frac{\varkappa}{t}\chi_2 = 0. \quad (1)$$

Система (1) имеет решения вида

$$\chi_1(t) = \frac{\alpha Z}{\varkappa - \gamma} t^{\gamma}\left[\frac{E-1}{2}\Phi + (\gamma - \varkappa)\frac{d\Phi}{dt}\right],$$

$$\chi_2(t) = -t^{\gamma}\left[\frac{E+1}{2}\Phi + (\gamma + \varkappa)\frac{d\Phi}{dt}\right],$$

где $\gamma = \pm\sqrt{\varkappa^2 - \alpha^2 Z^2}$, а $\Phi = \Phi(\gamma, E, t)$ — регулярное при $t = 0$ решение уравнения

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{2\gamma}{t}\frac{d\Phi}{dt} + \left(\frac{E}{t} + \frac{E^2-1}{4\alpha^2 Z^2}\right)\Phi = 0,$$

удовлетворяющее условию $\Phi(\gamma, E, 0) = 1$. Введя обобщенные гипергеометрические функции

$${}_pF_q(\alpha_1, \ldots, \alpha_p;\ \beta_1, \ldots, \beta_q;\ x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \ldots (\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n \ldots (\beta_q)_n} \frac{x^n}{n!},$$

где $(\beta)_m = \beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)$, и положив $\eta = E\alpha Z/p$, $p = \sqrt{E^2 - 1}$, мы получим

$$\Phi(\gamma, E, t) = e^{-tpr}\,{}_1F_1(\gamma + i\eta;\ 2\gamma;\ 2ipr).$$

Рассматриваются также функции Аппеля

$$F_1(\alpha, \beta, \beta';\ 2\gamma;\ x, y) = \sum_{\substack{m=0 \\ n=0}}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{(2\gamma)_{m+n}\, m!\, n!} x^m y^n,$$

из которых путем процесса конфлюэнции образуются конфлюэнтные функции Аппеля:

$$\Phi_1(\alpha, \beta;\ 2\gamma;\ x, y) = \lim_{\varepsilon \to 0} F_1(\alpha, \beta, 1/\varepsilon;\ 2\gamma;\ x, \varepsilon y) =$$

$$= \sum_{\substack{m=0 \\ n=0}}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m}{(2\beta)_{m+n}\, m!\, n!} x^m y^n,$$

$$\Phi_2(\beta, \beta';\ 2\gamma;\ x, y) = \lim_{\varepsilon \to 0} F_1(1/\varepsilon, \beta, \beta';\ \varepsilon x, \varepsilon y) =$$

$$= \sum_{\substack{m=0 \\ n=0}}^{\infty} \frac{(\beta)_m(\beta')_n}{(2\gamma)_{m+n}\, m!\, n!} x^m y^n.$$

Имеют место интегральное представление

$$\Phi_2(\beta, \beta';\ \beta + \beta';\ x, y) =$$

$$= \frac{\Gamma(\beta + \beta')}{\Gamma(\beta)\Gamma'(\beta')} e^{y} \int_0^1 e^{(x-y)u} u^{\beta-1}(1-u)^{\beta'-1}\, du$$

и разложение в ряд

$$\Phi(\gamma, E, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(2\gamma)_n} t^n\, {}_0F_1(2\gamma + n;\ -zt),$$

где z — произвольный параметр, причем

$$a_n = \frac{(\beta)_n}{n!}\left(\frac{ip}{2\alpha Z}\right)^n \Phi_1\left(-n, \beta'; 1-\beta-n; -1, z/\frac{ip}{2\alpha Z}\right).$$

${}_0F_1$-функция связана с бесселевой функцией простым соотношением

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\,{}_0F_1\left(\nu+1; -\frac{z^2}{4}\right),$$

где

$${}_0F_1(\beta; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(\beta)_n\, n!}.$$

Ю. Л. Рабинович

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

7817. Об абсциссе сходимости интеграла Лапласа. Вёйтс (On the convergence-abscissa of a Laplace integral. Wuyts P.), Nieuw Arch. Wiskunde, 1954, **2**, № 1, 1—27 (англ.)

Для абсциссы сходимости β интеграла $\int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt$ выводятся представления типа

$$\beta = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \log\left|e^{-g(t)} \int_{+\infty}^{t} e^{g(u)} F(u)\,du\right|,$$

если для некоторой положительной константы C $g(t) > -Ct$. В. И. Левин

7818. Одно действительное обращение обобщенного преобразования Стилтьеса. Ария (A real inversion theorem for a generalised Stieltjes transform. Arya Suresh Chandra), Collect. math., 1958, **10**, № 2, 69—80 (англ.)

Основным содержанием статьи является доказательство теоремы: Пусть

$$f(s) = \int_0^\infty (st)^{m-1/2}\, v^{-1/2 st}\, W_{k,m}(st)\,\psi(t)\,dt,$$

где $W_{k,m}$ — функция Уиттекера, и $\psi(s) = \int_0^\infty e^{-st}\varphi(t)dt$.

Вводится оператор $V^\nu_{n,u}[H(s)]$, определенный для положительных s и положительных n

$$V^\nu_{n,u}[H(s)] = \frac{(2n)^{2/2-\nu}}{(2n)!}\left[s^{2n+2\nu}\left(\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\right)^n s^{2n-2\nu} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\right)^n s^{\nu-1/2} H(s)\right]\Big|_{s=2nu^{1/2}}.$$

Если $H(y) = \int_0^\infty A(s, y) f(s)\,ds$,

$$A(s, y) = \frac{2^{m+k-2}}{\sqrt{\pi}}\, y^{-m-k+1}\, s^{\frac{1}{2}(k-m)-\frac{5}{4}}\, J_{m-k+1/2}\left(\frac{y}{\sqrt{s}}\right),$$

$$0 < \operatorname{Re}(m-k+3/2) < 2\max\{\operatorname{Re}(2m+1), 1\} - 1/2,$$
$$\operatorname{Re}(2m+1) > 0,$$

$\int_0^A t^{-\delta_1}\varphi(t)\,dt$ и $\int_A^\infty t^{\delta_2}\varphi(t)\,dt$ сходятся при $0 \leqslant \delta_1, \delta_2 <$ $< \{\min \operatorname{Re}(m+1), 1\}$, $y^{2m-3/2}\varphi(y^{-2}) \in L$ в $0 \leqslant y \leqslant R$ для каждого положительного R, $H(y)$ бесконечно дифференцируема, то при $n\to\infty$

$$V^{2m}_{n,u}[H(y)] \sim \varphi(u).$$

Л. Я. Цлаф

7819. Теорема Абеля для обобщенного преобразования Стилтьеса. Ария (Abelian theorem for a generalised Stieltjes transform. Arya Suresh Chandra), Boll. Unione mat. ital., 1958, **13**, № 4, 497—504 (итал.)

Показывается, что если преобразование

$$f(s) = \frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(m-k+3/2)} \times$$
$$\times \frac{1}{s}\int_0^\infty F\left[\begin{matrix}2m+1, & 1\\ m-k+3/2 & ;\end{matrix} -\frac{t}{s}\right] d\alpha(t),$$

которое является обобщением преобразования Стилтьеса сходится, то при некоторых условиях для любой константы A

$$\overline{\lim_{\substack{s\to 0+\\ s\to\infty}}} \left|\frac{\Gamma(m-k+3/2)}{\Gamma(2m+1)} \cdot s^{\gamma-m-k+1/2} f(s) - A\right| \leqslant$$
$$\leqslant \overline{\lim_{t\to 0+}} \left|\frac{\alpha(t)}{ct^{m+k+1/2-\gamma}} - A\right|,$$

где c — некоторая постоянная. Резюме автора

7820. Интегральные преобразования, оставляющие инвариантными каждый полином. Штейнберг (Transformations intégrales qui laissent invariant tout polynôme. Steinberg Jacob), Bull. Res. Council Israel, 1958, **F7**, № 2, 69—76 (франц.)

Определяется множество функций вещественной переменной x, $I(x)$, таким образом, что $\int_{-\infty}^{\infty} I(s-t)p(t)dt =$ $= p(s)$, где $p(t)$ — какой-либо многочлен. Автор в своих прежних работах (РЖМат, 1953, 6324; 1960, 46) рассматривал функцию $K(x)$ от вещественной переменной x, удовлетворяющей следующим условиям:

$$1)\ |K(x)| < ce^{-q|x|} \quad (c>0,\ q>0),$$
$$2)\ \int_{-\infty}^{\infty} K(x)\,dx = 1,$$

и преобразование $Kf = \int_{-\infty}^{\infty} K(bs-t) f(t)\,dt$, где b — вещественный параметр, отличный от ± 1. Он показал, что это преобразование имеет собственные значения $\lambda_n = b^{-n}$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Каждому λ_n соответствует только один многочлен степени n (с точностью до произвольного постоянного), который является собственной функцией. Причем, если в многочлене $p_n(t)$ коэффициент при t^n есть $\frac{1}{n!}$, то $p'_{n+1} = p_n$ (последовательность Аппеля). В статье приводятся два свойства ядра $K(s,t) = K(bs-t)$.

1. Если $K^{(m)}(s,t)$ является m-й итерацией ядра $K(s,t)$, то $K^{(m)}(s,t) = K_m(b^m s - t)$, где $K_1(x) = K(x)$, $K_m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{m-1}(u) K(x-bu)\,du$ $(m = 2, 3, \ldots)$.

2. Для каждого вещественного x

$$|K_m(x)| < cB^{m-1} e^{-qb^{1-m}|x|};\ (m = 1, 2, \ldots)$$
$$B = 2c/q(b-1) \quad (b>1)$$

Затем определяется ядро

$$I(s,t)=\sum_{m=1}^{\infty} i_m K_m(b^m s-t),$$

где ряд сходится равномерно для любых вещественных t и s, причем

$$i_m=(-1)^{m-1}\frac{b^m}{(b^m-1)\ldots(b-1)};\quad (b>1).$$

Далее доказывается, что преобразование $If=\int_{-\infty}^{\infty} I(s,t)f(t)dt$ обладает свойством $Ip(t)=p(s)$, где $p(t)$ — любой полином. Наконец, положив $I(0,-x)=I(x)$, т. е. $I(x)=\sum_{m=1}^{\infty} i_m K_m(x)$, устанавливаются формулы: $\int_{-\infty}^{\infty} I(s-t)\,t^n\,dt=s^n$ $(n=0,1,\ldots)$.

С. А. Акопян

7821. Об умножающих преобразованиях. Хершман (On multiplier transformations. Hirschman I. I., Jr), Duke Math. J., 1959, 26, № 2, 221—242 (англ.)

Пусть $L^p(\mathfrak{Z})$ обозначает пространство комплексных функций $F(n)$, определенных для $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ и обладающих конечным $\|F\|_p$, где

$$\|F\|_p=\left\{\sum_{-\infty}^{\infty}|F(n)|^p\right\}^{1/p}\quad 1\leqslant p<\infty.$$

Обозначим

$$\hat{F}(\theta)=\sum_{-\infty}^{\infty}F(n)\,e^{2\pi i n\theta},$$

причем сходимость рассматривается в среднем.

Пусть, далее, $T^{\wedge}(\theta)$ — ограниченная измеримая функция, определенная на множестве $\mathfrak{T}$ действительных чисел, модуль которых не превосходит 1. При $F(n)\in L^2(\mathfrak{Z})\cap L^p(\mathfrak{Z})$ $(1<p<\infty)$ положим

$$(TF)(n)=\int_{\mathfrak{T}} T\hat{}(\theta)\,F\hat{}(\theta)\,e^{-2\pi i n\theta}\,d\theta.$$

Такое преобразование T, определенное посредством $T\hat{}(\theta)$, называется умножающим преобразованием.

Доказываются теоремы, выражающие достаточные условия ограниченности преобразования T в $L^p(\mathfrak{Z})$ в себя. В частности, доказывается свойство:

Если: 1) $|T\hat{}(\theta)|\leqslant A$, $\theta\in\mathfrak{T}$, 2) $|T\hat{}(\theta+h)-T\hat{}(\theta)|\leqslant A|h|^{\alpha}$, $0<\alpha<1/2$, то T — ограниченное линейное преобразование в $L^p(\mathfrak{Z})$ в себя при $\frac{2}{1+2\alpha}<p<\frac{2}{1-2\alpha}$.

Далее рассматривается пространство $L^p(\mathfrak{T})$ комплексных измеримых функций $f(\theta)$, определенных на $\mathfrak{T}$ и обладающих конечным $\|f\|_p$, где

$$\|f\|_p=\left[\int_{\mathfrak{T}}|f(\theta)|^p\,d\theta\right]^{1/p}.$$

Обозначим

$$\hat{f}(n)=\int_{\mathfrak{T}} f(\theta)\,e^{-2\pi i n\theta}\,d\theta.$$

Пусть, далее, $T\hat{}(n)$ — ограниченная функция на $\mathfrak{Z}$. Положим

$$Tf(\theta)=\sum_{-\infty}^{\infty} T\hat{}(n)\,f\hat{}(n)\,e^{2\pi i n\theta}.$$

Доказываются теоремы, выражающие достаточные условия ограниченности преобразования T в $L^p(\mathfrak{Z})$ в себя. Приводятся обобщения на кратные интегралы.

Н. А. Бразма

7822. Обращение интегральных преобразований. Рибарич (On the inversion of integral transforms. Ribarič M.), Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1959, 3, № 1, 45—50 (англ.)

В настоящей работе даются два метода нахождения обращения $F(x)$ интегрального преобразования

$$G(y)=\int_a^b K(y,x)\,F(x)\,dx,\qquad (1)$$

где $G(y)$ — регулярная аналитическая функция, определенная в открытой области $\mathfrak{S}$ комплексной плоскости y. Определяется гильбертово пространство $L_q^2(a,b)$, как пространство всех измеримых комплекснозначных функций $f(x)$ с конечной нормой $\|f\|$, где

$$\|f\|^2=\int_a^b|f(x)|^2\,q^{-1}(x)dx$$

и весовая функция $q(x)$ измеримая и положительная почти всюду. Скалярное произведение двух функций $f(x)$, $g(x)\in L_q^2(a,b)$ определяется формулой

$$(f(x),g(x))=\int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\,q^{-1}(x)\,dx.$$

Первый метод состоит в том, что $F(x)$, удовлетворяющую соотношению (1), можно построить с помощью производных $G^{(l)}(y_0)$ функции $G(y)$, если бы можно было найти весовую функцию $q(x)$ так, чтобы пространство $L_q^2(a,b)$ удовлетворяло следующим условиям:

1) по крайней мере одно решение (1) — $F_1(x)$ принадлежит $L_q^2(a,b)$;

2) для некоторой $y_0\in\mathfrak{S}$, $q(x)K_y^{(l)}(y_0,x)\in L_q^2(a,b)$ $(l=0,1,2,\ldots)$

3) для каждой $f(x)\in L_q^2(a,b)$ функция $g(y)=\int_a^b K(y,x)f(x)\,dx$ регулярно аналитична в области $\mathfrak{S}$;

4) для каждой $f(x)\in L_q^2(a,b)$,

$$g^{(l)}(y_0)=\int_a^b K^{(l)}(y_0,x)f(x)\,dx,\quad l=0,1,\ldots$$

Вторым методом $F(x)$ строится с помощью значений $G(y)$ на системе бесконечных точек $\{y_l\}$ $(l=0,1,\ldots)$ имеющих точку накопления на $\mathfrak{S}$, если пространство $L_q^2(a,b)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) по крайней мере одно решение (1) — $F_1(x)$ принадлежит $L_q^2(a,b)$;

2) возможно выбрать бесконечное множество точек $\{y_j\}\subset\mathfrak{S}$, имеющих точку накопления в $\mathfrak{S}$, так что $\{q(x)\overline{K(y_j,x)}\}\in L_q^2(a,b)$, $(j=0,1,\ldots)$;

3) для каждой функции $(fx)\in L_q^2(a,b)$ функция $g(y)=\int_a^b K(y,x)f(x)\,dx$ регулярно аналитическая в $\mathfrak{S}$.

В качестве применения этих методов приводятся о примера.

С. А. Акопян

7823. Разложения в ряды и общие преобразования. Миллер (Series expansions and general transforms. Miller J. B.), Proc. Combridge Philos. Soc., 1958, 54, № 3, 358—367 (англ.)

В развитие результатов Гинана (Guinand A. P., J. London Math. Soc., 1947, 22, 14—18) и других авторов устанавливаются классы пар рядов, являющихся интегральными преобразованиями друг друга с ядром определенного типа (преобразование Уотсона (Ватсона)). Под G_{λ}^{μ} понимается класс функций $\varphi(x)$, представимых в виде

$$\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_x^{\infty}(t-x)^{\lambda-1}\varphi^{(\lambda)}(t)\,dt,$$

причем $t^{\lambda}\varphi^{(\lambda)}(t) \in L^2(0, \infty)$. Пусть $(s = \sigma + it)$ $\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, где a_n — действительные числа, абсолютно сходится для $\sigma \geqslant c$ и может быть аналитически продолжена на полуплоскость $\sigma \geqslant 1/2$; пусть, далее, $\alpha(s)$ в любой конечной части полосы $1/2 < \sigma < c$ не имеет других особенностей, кроме полюсов, и не имеет никаких особенностей на прямой $\sigma = 1/2$, причем

$$\alpha\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(|t|^{\lambda}).$$

A-трансформированной функцией $h(x)$ называется функция $k(x)$, интеграл которой $k_1(x)$ с нижним пределом 0 определяется соотношением

$$\int_0^x \frac{k_1(t)}{t}\,dt = \int_0^{\infty} \frac{A_1(xt)}{t}\,dt \int_t^{\infty} \frac{h(u)}{u}\,du,$$

где

$$\frac{A_1(x)}{x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{\alpha(1-s)}{\alpha(s)}\,\frac{x^{-s}}{1-s}\,ds.$$

Основной результат состоит в следующем (теорема 1): Если $\varphi(x)$, $\psi(x) \in G_{\lambda}^2$ с $\lambda > \frac{1}{2}$ и ядро $h(x) \in D_{\lambda}$ (класс D_{λ} не определяется: приводится ссылка на неопубликованную работу) и если $\psi(x)$ является h-трансформированной $\varphi(x)$: $\psi(x) = \int_0^{\infty} h(xt)\varphi(t)\,dt$, то функции

$$f(x) = \frac{1}{x}\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{N} a_n \varphi\left(\frac{n}{x}\right) - \int_0^N \varphi\left(\frac{t}{x}\right) dR(t)\right],$$

$$g(x) = \frac{1}{x}\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{N} a_n \psi\left(\frac{n}{x}\right) - \int_0^N \psi\left(\frac{t}{x}\right) dR(t)\right],$$

определенные для почти всех $x > 0$, являются k-трансформированными друг в друга, где k есть A-трансформированная h. Здесь $R(x)$ означает сумму вычетов функции $\alpha(s)\,x^s/s$ в полюсах $\alpha(s)$, расположенных в полосе $1/2 < \sigma < c$.

В. И. Левин

7824. Об операторном умножении по Микусинскому. **Максудов Ш. Т.**, УзССР Фанлар Акад. докладлари, Докл. АН УзССР, 1959, № 3, 3—6 (рез. узб.)

Исследуется операторное умножение в классе функций, аналитических на положительной полуоси. Исходя из элементарных определений, автор показывает, что произведение функций-операторов сводится к свертке

$$\{f(t)\}\cdot\{g(t)\} = \left\{\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau\right\}.$$

С. И. Осипов

7825 К. Преобразования типа свертки. **Хиршман И. И., Уиддер Д. В.** Перев. с англ. М., Изд-во ин. лит., 1958, 312 стр., 14 р. 20 к.

Свертки последовательностей $c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n-k}\,b_k$ и функций $c(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a(x-t)\,b(t)\,dt$ играют важную роль во многих вопросах анализа и, в частности, в теории интегральных преобразований. В настоящей книге излагается общая теория преобразований с ядрами, зависящими от разности переменных, и устанавливается связь таких преобразований, как интегральных операторов с линейными дифференциальными операторами бесконечного порядка, инвариантными относительно сдвига. Основную наводящую роль здесь играет преобразование Лапласа или Фурье, которое также может рассматриваться как преобразование типа свертки с ядром $G(x) = e^{-e^x}e^x$; действительно, полагая $F(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt}\Phi(t)\,dt$ и $f(x) = F(e^x)\,e^x$, $\varphi(x)\,\Phi(e^{-x})$, будем иметь

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-t)\,\varphi(t)\,dt. \qquad (1)$$

Интегральное преобразование (1) излагается для весьма широких классов ядер $G(x)$: 1) конечных ядер, т. е. таких, для которых функция $E(s)$, определяемая равенством

$$\frac{1}{E(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\,G(t)\,dt,$$

является полиномом степени m с вещественными корнями и 2) неконечных ядер, т. е. таких, для которых функция $E(s)$ является целой функцией не выше второго порядка нормального типа с вещественными корнями. Функция $E(D)$, рассматриваемая как оператор $\left(D = \frac{d}{dx}\right)$, является оператором обращения интегрального преобразования (1): для конечного ядра это вытекает из элементарной теории оператора D по Коши, а для неконечных ядер $E(D)$ образуется как равномерный предел полиномиальных операторов.

Книга изобилует конкретными примерами интегральных преобразований; она содержит также свертки с интегралами Стилтьеса (подчиняя свертку последовательностей общей теории интегральных преобразований).

Содержание книги: Гл. I — Введение (свертки; операционное исчисление; функции Грина; образование ядер; свертки, уменьшающие осцилляцию; обзор содержания книги); Гл. II — Конечные ядра (функции распределения; функции плотности; характеристические функции; конечные ядра; экспоненциальные полиномы); гл. III — Неконечные ядра (пределы функций распределения; класс целых функций Пойа; замыкание класса функций распределения; неконечные ядра; свойства неконечных ядер; ассоциированные ядра); Гл. IV — Преобразования, уменьшающие осцилляцию (образование функций плотности; уменьшающих осцилляцию; логарифмическая выпуклость; характеристика функций, уменьшающих осцилляцию; перемены знака производных ядра; образование вполне положительных функций; матричные преобразования; вполне положительные функции плотности). Гл. V — Асимптотическое поведение ядер; Гл. VI — Теория вещественного обращения (теорема обращения; интегралы Стилтьеса; факторизация); Гл. VII — Теория представления; Гл. VIII — Преобразование Вейерштрасса (и Вейерштрасса — Стилтьеса); Гл. IX — Теория комплексного обращения; Гл. XI — Разные вопросы (полиномы Бернштейна; аналитический характер ядер; квазианалитичность).

Книга снабжена предметным указателем и библиографией. Английский оригинал вышел в 1955 г. в Принстонской математической серии (№ 20).

В. И. Левин

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

7826. Изучение скорости движения на перекрестке шоссейной и железной дорог. **Андерссон** (En studie av hastighetsanpassning vid korsning mellan väg och

järnväg. Andersson B. J.), Nord. mat. tidskr., 1959, 7, № 3, 117—120 (шведск.)

7827. Возбуждение волн пространственного заряда в сплошных цилиндрических электронных пучках с бриллюэновским потоком. Ригрод, Пирс (Space-charge wave excitation in solid-cylindrical Brillouin beams. Rigrod W. W., Pierce J. R.), Bell System Techn. J., 1959, 38, № 1, 99—118 (англ.)

Различные типы волн пространственного заряда в цилиндрическом электронном пучке, частично заполняющем металлическую трубку, не ортогональны друг другу. Это затрудняет расчет амплитуд волн пространственного заряда, возбуждаемых в пучке начальным возмущением, а следовательно, и расчет шумов в электронном пучке. В реферируемой работе эта задача решается с помощью преобразования Лапласа.

7828. Об одной частной задаче распределения. Хайм, Эскудер (Sobre un problema particular de distribución. Haim Isi, Escuder Pedro), Rev. ingeniería, 1958, 52, № 608, 383—395 (исп.)

Пусть даны положительные числа C_1, C_2, C_n и точки $P_1, P_2, \ldots, P_n$, лежащие в общей плоскости. Ставится следующая задача: в той же плоскости найти такую точку P, чтобы $\sum_{k=1}^{n} C_k d_k^m (P, P_k)$ была минимальной. Автор называет эту точку центром заряда порядка m. В случае $m = 2$ она совпадает с центром тяжести. В работе исследуется случай $m = 1$. Дается необходимое и достаточное условие для того, чтобы одна из данных точек являлась искомой. В общем случае для решения задачи предлагается механическая модель. Рассматриваются частные случаи, когда все C_k одинаковые или же все точки находятся на одной прямой. Приведены задачи практического характера, приводящие к настоящей задаче. Э. Я. Риекстыньш

7829. Метод исследования систем автоматического регулирования, содержащих линейные звенья с переменными параметрами. Кузовков Н. Т., Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., химии, 1958, № 6, 19—30

Рассматривается задача отыскания импульсных и передаточных функций системы автоматического регулирования, содержащей звено с переменными параметрами. Импульсная функция $y^*(t, \tau)$ линейного звена с переменными параметрами находится в классе линейных систем с параметрами, изменяющимися скачком в моменты времени $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$. Решается задача определения изображения функции $y(t)$ по заданному графику оригинала, если $y(t) = k[1 - e^{-\alpha t} z(t)]$, используя аппроксимацию функции $z(t)$, заданной графически $z(t) = [k - y(t)]/ke^{-\alpha t}$ полиномом n-й степени по t.

Приводятся примеры численного анализа систем с переменными параметрами и указываются дальнейшие перспективы развития указанного метода расчета.

Г. М. Уланов

7830 Некоторые оценки качества регулирования. Блох З. Ш., Научн. тр. Моск. лесотехн. ин-та, 1958, № 8, 107—128

Получены оценки перерегулирования и времени регулирования при любом классе распределения корней характеристического уравнения и любых начальных условиях, а также наибольших по модулю значений скоростей и ускорений переходных процессов. Найденные оценки получены в результате вычисления накопленных отклонений при редуцировании исходной нелинейной системы на два и более порядков ниже. Приводятся частотные оценки для скоростей и ускорений системы в переходном процессе. Дан числовой пример расчета качества регулирования турбины. Г. М. Уланов

7831. Об условиях эквивалентной замены передаточной функции операторным $K(D)$ изображением. Чинаев П. И., Докл. АН СССР, 1959, 126, № 3, 565—567

Устанавливается эквивалентность решения дифференциального уравнения с наличием правой части в виде единичного возмущения $f(t) = [1]$ решению однородного уравнения с определенными начальными условиями. Последние вычисляются с помощью $K(D)$-изображения.

Г. М. Уланов

7832. Вычисление процессов включения в линейных цепях посредством «усеченных» функций. Алгебра функций. Раевский (Berechnung der Einschaltvorgänge in linearen Schaltungen mittels «abgeschnittener» Funktionen.—Funktionen-Algebra. Rajewski M.), Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau, 1958, 4, № 2, 143—165 (нем.)

Под „усеченной" функцией $[F]$ подразумевается функция переменной t, которая равна нулю при $-\infty < t \leqslant 0$ и равна данному аналитическому выражению $F(t)$ при $t > 0$. Функциональное произведение двух „усеченных" функций $[A]$ и $[F]$ определяется посредством интеграла Дюамеля этих функций:

$$[A]\cdot[F] = \left[\frac{d}{dt}\int_0^t A(t-\tau)\,F(\tau)\,d\tau\right]. \qquad (1)$$

Рассматривается метод для исследования переходных процессов, который заключается в систематическом использовании действия (1) и обратного ему действия — функционального деления двух „усеченных" функций, определяемого равенством

$$[F]/[A] = [B], \qquad (2)$$

где $[B][A] = [F]$. Изучаются свойства и следствия действий (1) и (2). Отметим некоторые из них. Из (1) следует $[t]\cdot[F] = \left[\int_0^t F(\tau)\,d\tau\right]$.

Примером функциональной степени является

$$[t]^2 = [t]\cdot[t] = \left[\int_0^t t\,dt\right] = \left[\frac{t^2}{2!}\right],$$

что дает возможность рассматривать разложения в степенные ряды, в частности, $[e^{at}] = [1] + [at] + [at]^2 + \ldots$ Примеры соотношений, полученных посредством функционального деления:

$$[e^{at}] = [1]/[1 - at] = 1/[1 - at], \qquad (3а)$$

$$[\cos \omega t] = \frac{1}{[1] + [\omega t]^2}. \qquad (3б)$$

Импульсная δ-функция представляется в виде $[1]/[t] = 1/[t]$. Производная „усеченной" функции представляется равенством $\frac{d}{dt}[F] = \frac{[F]}{[t]}$. Рассматриваются применения вышеуказанных свойств к теории электрических цепей.

Далее рассматривается переходное сопротивление $[X]$ двухполюсника при произвольно изменяющемся токе. Для него получается равенство $[X] = [Z]\cdot[I]/I = T_I[Z]$, которое является некоторым функциональным преобразованием от $[Z]$. Обобщая это, вводится функциональное преобразование $T_F[A] = [A]\cdot[F]/F$ и его частный случай

$$T_p[A] = [A]\,[e^{pt}]/e^{pt}. \qquad (4)$$

Изучаются свойства преобразования (4).

Примечание референта. Референт согласен с редактором статьи в том, что содержание статьи требует уточнения. В частности, в рассмотренном методе несущественно „усечение" функций. По мнению референта, обозначение функционального деления недостаточно четко, например в (3б). Н. А. Бразма

7833. **Новый метод анализа испытываемых систем. Папулис** (A new method of analysis of sampleddata systems. Papoulis A.), IRE Nat. Convent. Rec., 1959, 7, № 4, 69—75 (англ.)

7834 Д. **Приложение функций Матье и дельтафункции к исследованию пластин и оболочек. Ван Фо Фы. Г. А.** Автореф. дисс. канд. техн. н., Ин-т строит. механ. АН УССР, Киев, 1959

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Редактор *М. А. Наймарк*

7835. **Векторные подпространства A пространства C^E с сопряженными интегрального типа. Морс, Трансью** (Vector subspaces A of C^E with duals of integral type. Morse Marston, Transue William), J. math. pures et appl., 1958, 37, № 4, 343—363 (англ.)

C^E обозначает пространство всех комплексных функций на локально компактном множестве E. Авторы продолжают исследование выделенного ими класса MT-пространств A, являющихся полунормированными подпространствами C^E, отличительной чертой которых является совпадение функционалов из A' с соответствующими мерами на E (точное определение см. в РЖМат, 1959, 2875). Действительное максимальное MT-пространство B называется пространством типа Коши, если каждое ограниченное по полунорме множество его положительных элементов, направленное отношением $\leqslant$, определяет фильтр Коши в B, MT-пространства типа Коши обладают многими свойствами пространств суммируемых функций. Показывается, что пространство A типа Коши совпадает с пересечением $\bigcap_{\alpha} L^1(\alpha)$, где $\{\alpha\}$ — совокупность мер, определенных элементами A'. А. С. Дынин

7836. **Обобщенные метрические пространства. Сарымсаков Т. А., Антоновский М. Я., Дектярев И. М.**, УзССР Фанлар Акад. докладлари, Докл. АН УзССР, 1959, № 5, 3—7 (рез. узб.)

Пусть E — линейное топологическое пространство с выделенным воспроизводящим и миниэдральным конусом K_E положительных элементов. Множество X называется обобщенным метрическим пространством, метризованным при помощи (E, K_E), если задано отображение $X \times X \to E$ вида $d_E(x, y) = \sup(x, y) - \inf(x, y)$. В X вводится топология: U-окрестностью точки $x \in X$ называется множество $V(x, U) = \{y : d_E(x, y) \in U\}$, где U — любая окрестность нуля в E. Доказывается, что для того чтобы топологическое пространство было обобщенно метризуемым, необходимо и достаточно, чтобы оно было вполне регулярным. В заключение указывается пример пространства, топология которого отлична от топологии, порожденной K_E и d_E. А. С. Дынин

7837. **Некоторые применения линейных пространств в анализе. Фиккен** (Some uses of linear spaces in analysis. Ficken F. A.), Amer. Math. Monthly, 1959, 66, № 4, 259—275 (англ.)

Доклад, прочитанный на собрании Американской математической ассоциации и посвященный обзору приложений алгебраических идей к различным классам функций. Автор начинает с теоремы Пикара для уравнения $y' = f(x, y)$ и на ее примере разъясняет идею отыскания неподвижной точки, вводит классы функций C, C^n, а затем знакомит с общей идеей линейных пространств. Далее рассматриваются линейные метрические пространства, нормированные пространства и, в частности, банахово и гильбертово пространства. Приводятся примеры различных операторов в этих пространствах. Новых результатов статья не содержит. И. С. Иохвидов

7838. **Некоторые свойства нормы в F-пространствах. Бессага, Пелчинский, Ролевич** (Some properties of the norm in F-spaces. Bessaga C., Pełczyński A., Rolewicz S.), Studia math., 1957, 16, № 2, 183—192 (англ.)

Пусть X — F-пространство.

Теорема 1. В X существует эквивалентная норма $|| \; ||$ такая, что функция $\varphi(t) = \| tx \|$ монотонна, вогнута и бесконечно дифференцируема для каждого $x \in X$.

Теорема 2. Следующее условие необходимо и достаточно для существования эквивалентной нормы $|| \; ||$, для которой множество $\{\| x \|, x \in X\}$ неограниченно: существует окрестность U нуля такая, что $\underbrace{U + \ldots + U}_{n} \neq X$ для любого n.

Теорема 3. Для X существует эквивалентная норма $|| \; ||$, обладающая скоростью роста, т. е. такая, что $\overline{\lim_{n \to \infty}} \theta_n \| n^{-1} x \| < \infty$ для некоторой фиксированной последовательности θ_n ($\theta_n \neq 0$) тогда и только тогда, когда существует ограниченная окрестность нуля.

A. Alexiewicz

7839. **Полная характеристика экстремальных функционалов. Бак** (A complete characterization for extreme functionals. Buck R. C.), Bull. Amer. Math. Soc., 1959, 65, № 3, 130—133 (англ.)

Рассматривается следующее свойство экстремальных точек единичного шара, сопряженного к полунормированному пространству E: для того чтобы функционал L был экстремальным, необходимо и достаточно, чтобы множество нулей максимальной полунормы p^* в E, мажорируемой функцией $\| x \| - | L(x) |$ совпадало со всем пространством E. Эффективным образом проводится изящное построение p^*, из которого следует критерий: необходимым и достаточным условием экстремальности L является равенство $E = F_k - F_k$ при любом k, где $F_k = \left\{x : \| x \| - L(x) \leqslant \frac{1}{k}\right\}$. В заключение указывается на применимость этого критерия в вопросах приближения функций решениями однородного дифференциального уравнения. А. С. Дынин

7840. **О пространстве (S') и преобразовании Фурье. Иосинага** (On the space (S') and the Fourier transformation. Yoshinaga Kyôichi), Bull. Kyushu Inst. Technol. (Math., Natur. Sci.), 1959, № 5, 1—11 (англ.)

Методическая работа, примыкающая к работе Себаштьян-и-Сильва (РЖМат, 1957, 57 5) по прямому построению пространств распределений Л. Шварца. Автор строит пространство (S') и преобразование Фурье в нем, не прибегая к соображениям двойственности, и исследует их, исходя из своей конструкции. А. С. Дынин

7841. **Обращение линейных операторов, действующих над обобщенными функциями. I, II. Гал** (The inversion of linear operators acting on distributions. I, II. Gál István S.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1959, A62, № 2, 79—94; 95—109; Indagationes math., 1959, 21, № 2, 79—94; 95—109 (англ.)

Совокупность X финитных основных функций в n-мерном пространстве превращается в пространство $\bar{X}$ обобщенных функций при помощи пополнения относительно той или иной равномерной структуры (определяемой системой полунорм). Как правило, рассматривается структура, приводящая к пространству Шварца, или структура „слабых обобщенных функций", определяемая системой полунорм $\|x\|_U = \max_{u \in U} |(x, u)|$, где U — произвольное конечное подмножество X (при обычном скалярном произведении). Изучаются свойства линейных операторов A, действующих из $\bar{X}$ в $\bar{X}$ или из $\bar{X}$ в аналогичное пространство $\bar{Y}$ (непрерывные, ограниченные, локальные операторы, свойства сопряженных операторов и т. п.). В частности, доказаны две теоремы об условиях возможности однозначного обращения таких операторов. Первая из этих теорем применяется к конкретным операторам: именно, доказывается возможность обращения (при $n=1$) операторов $A = a_0 I + a_1 D + \ldots + a_{n-1} D^{n-1} + D^n$ ($D = d/dx$) с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и $A = a_0 I + a_1 T_1 + \ldots + a_{n-1} T_{n-1} + T_n$ ($T_s x(\sigma) = x(s+\sigma)$; $a_0 \neq 0$) с аналитическими коэффициентами (при этом многозначность обращения устраняется с помощью естественного проектирования). Проблема обращения оператора $A = a_1 T_{s_1} + \ldots + a_m T_{s_m}$ решается только для слабых обобщенных функций. Далее доказывается возможность обращения оператора умножения на бесконечно дифференцируемую функцию a, причем для $n = 1$ — если все нули a имеют конечную кратность, а для $n > 1$ — если $|a| + |\operatorname{grad} a| \neq 0$. Отсюда, в частности, вытекает возможность деления обобщенных функций на такие функции a. А. Д. Мышкис

7842. Совершенное пространство и совершенное матричное кольцо. I. Ограниченность и сходимость совершенного матричного кольца. II. Теорема о произведении в совершенном матричном кольце. У Цу-синь. Sci. Rec., 1959, 3, № 3, 95—102; 103—106

Обе заметки посвящены изучению кольца матриц операторов, непрерывно переводящих совершенное пространство последовательностей в себя. Впервые детальным анализом таких пространств занимался Кете, ему же принадлежат основные определения, используемые в заметках. В первой работе изучаются соотношения между различными видами ограниченности и сходимости в кольце операторов над совершенным пространством. Доказываются теоремы следующего типа:

Теорема 9. Для совпадения сильной и слабой сходимости в кольце операторов необходимо и достаточно, чтобы ограниченные множества в пространстве, где действуют операторы, и его сопряженном были сильно компактны.

Вторая заметка обобщает теорему Кете о сильной сходимости произведения последовательностей сильно сходящихся операторов на случай, когда сильная сходимость заменяется равномерной сходимостью на слабокомпактных множествах. Доказывается также, что для слабой сходимости операторов теорема о произведении имеет место тогда и только тогда, когда слабая сходимость совпадает с сильной.

Обе работы изобилуют языковыми ошибками и неправильностями, подчас затрудняющими понимание текста. А. М. Вершик

7843. Мультипликативные методы суммирования и расширение Стоуна-Чеха. Хенриксен (Multiplicative summability methods and the Stone-Čech compactification. Henriksen Melvin), Math. Z., 1959, 71, № 4, 427—435 (англ.)

Метод суммирования φ называется мультипликативным (b-мультипликативным), если соотношение $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$ справедливо для всех (ограниченных) последовательностей f и g, суммируемых методом φ. Матричный метод суммирования, матрица которого получается из матрицы метода φ вычеркиванием бесконечного множества строк, называется субметодом метода φ. Мазур и Орлич (РЖМат, 1956, 4607) показали, что каждый регулярный мультипликативный матричный метод суммирования является субметодом метода φ_1, определяемого единичной матрицей I. Брауэр (РЖМат, 1957, 2447) высказал мнение, что регулярный b-мультипликативный метод суммирования для ограниченных последовательностей равносилен некоторому субметоду метода φ_1. Автор, устанавливая взаимно однозначное соответствие между семейством всех регулярных b-мультипликативных методов суммирования и семейством всех замкнутых подмножеств „нароста" $N' = \beta N - N$, где N пространство натуральных чисел, а βN — компактное расширение Стоуна — Чеха пространства N (РЖМат, 1.53, 3602), доказывает несправедливость высказания Брауэра. Сверх того, на основе континуум-гипотезы автор построил для произвольного регулярного матричного метода семейство совместных в совокупности субметодов этого метода со свойством, что каждая ограниченная последовательность суммируется некоторым методом построенного семейства. Г. Ф. Кангро

7844. О неравенствах для дифференциальных операторов. Беллман (On inequalities for differential operators. Bellman Richard), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, № 4, 589—597 (англ.)

При помощи простых соображений из теории линейных дифференциальных уравнений доказано несколько неравенств относительно функций и их производных. Типичным является следующий результат: Если $u \in L^p(0, \infty)$, $u^{(n)} \in L^r(0, \infty)$, $p, r \geqslant 1$, то $u^{(k)} \in L^m(0, \infty)$ при $m \geqslant \max[p, r]$ и $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Аналогичными методами доказываются некоторые близкие результаты Гальперина (Halperin I., Ann. Math. 1937, 38, 830—919) и референта (Acta Sci. Math., 1941, 10, 64—74). B. Sz.-Nagy

7845. Линейные функционалы в двунормовых пространствах. Алексевич, Семадени (Linear functionals on two-norm spaces. Alexiewicz A., Semadeni Z.), Studia math., 1958, 17, № 2, 121—140 (англ.)

Изучается следующий случай двунормовой сходимости. В линейном пространстве X определены две нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|^*$ так, что $(X, \|\cdot\|)$ становится линейным нормированным пространством (не обязательно полным), а $(X, \|\cdot\|^*)$ — B_0^*-пространством, причем $\|\cdot\|^*$ слабее $\|\cdot\|$. Последовательность $\{x_n\} \in X$ γ-сходится (или двунормово сходится) к $x_0 \in X$, если $\{x_n\}$ ограничена относительно нормы $\|\cdot\|$ и $\|x_n - x_0\|^* \to 0$, при $n \to \infty$. Предполагается, кроме того, что если $x_n \xrightarrow{\gamma} x_0$, то $\|x_0\| \leqslant \varliminf \|x_n\|$ при $n \to \infty$. Основной результат работы состоит в установлении общей формы γ-линейных функционалов. Оказывается, что множество Ξ_γ γ-линейных функционалов равно замыканию множества Ξ^* в пространстве $(\Xi, \|\cdot\|)$ (где через Ξ^* и Ξ обозначены пространства, сопряженные к $(X, \|\cdot\|^*)$ и $(X, \|\cdot\|)$ соответственно). Построен пример, показывающий, что в двунормовых пространствах теорема Хана — Банаха о распространении линейных функционалов неверна. Приведено исправление неверной теоремы 3. 1 из более ранней работы первого автора (РЖМат, 1954, 4842) и сделаны соответствующие выводы. Л. В. Флоринская

7846. О теореме Уэстона. Зингер (On a theorem of J. D. Weston. Singer I.), J. London Math. Soc., 1959, 34, № 3, 320—324 (англ.)

Пусть X — нормированное линейное пространство, Y — подпространство сопряженного пространства X^*, S_X и S_{Y^*} — замкнутые единичные сферы в X и Y^*, Ф—

каноническое отображение пространства X в Y^* (т. е. линейное ограниченное отображение X в Y^*, определенное равенством $[\Phi(x)](y) = y(x)$ для любых $x \in X$ и $y \in Y$). Доказываются следующие две теоремы:

1) Образ $\Phi(S_X)$ сферы S_X плотен в S_{Y^*} для слабой топологии $\sigma(Y^*, Y)$.

2) Необходимым и достаточным условием Y-рефлексивности пространства X является компактность сферы S_X для слабой топологии $\sigma(X, Y)$.

Отмечается следующая эквивалентная формулировка первой теоремы: каждому ограниченному линейному функционалу z на Y соответствует сеть $\{x_\alpha\}$ элементов из X такая, что: 1) $\|x_\alpha\| \leqslant \|z\|$, 2) $z(y) = \lim_\alpha y(x_\alpha)$. Это предложение распространяет теорему Уэстона (РЖМат, 1959, 573) на случай несепарабельного Y.

С. Н. Крачковский

7847. К теории сингулярного уравнения в пространстве Банаха. Агаев Г. Н., Физ. вә ријазијјат инст. әсәрләри. АзәрбССР Елмләр Акад.; Тр. Ин-та физ. и матем. АН АзербССР, 1959, 8, 23—37 (рез. азерб.)

Содержание гл. IX книги З. И. Халилова „Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах" (Баку, 1949) обобщается на случай линейного ограниченного оператора, действующего в банаховом пространстве. Пусть Φ — множество регулярных операторов (т. е. $T \in \Phi$, если $I+T$ есть оператор типа Рисса—Шаудера), F — подмножество множества Φ такое, что для любого ограниченного линейного оператора A из $T, T_1 \in F$ следует $AT \in F$, $TA \in F$, $T+T_1 \in F$, $TT_1 \in F$. Оператор S называется сингулярным, если 1) $S^2 = I+T$, $T \in F$; 2) $SA - AS \in \Phi$ для любого A. Оператор $K = A+BS+T$ называется общим сингулярным оператором, если $T \in F$, S — сингулярный оператор, A, B произвольны; если, кроме того, $A+B$ и $A-B$ непрерывно обратимы, то K называется нормальным сингулярным оператором; сопряженный с ним оператор $\overline{K}$ тоже является нормальным сингулярным. Доказывается, что для нормальных сингулярных операторов имеют место теоремы Нетера; метод аналогичен методу З. И. Халилова.

С. Н. Крачковский

7848. Дробные степени операторов, действующих в банаховых пространствах. Красносельский М. А., Соболевский П. Е., Докл. АН СССР, 1959, 129, № 3, 499—502

Теория дробных степеней строится для весьма широкого класса операторов. Оператор A, действующий в банаховом пространстве E, авторы называют нормально позитивным, если он удовлетворяет условию

$$\|(A+tI)^{-1}\| \leqslant \frac{C}{1+t} \quad (t \geqslant 0).$$

Нормально позитивным являются, в частности, все производящие операторы сильно непрерывных полугрупп. Дробные отрицательные степени нормально позитивного оператора определяются формулой

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\alpha} \frac{n!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(n-\alpha)} \times$$

$$\times \int_0^\infty t^{n-\alpha} (A+tI)^{-n-1}\, dt \quad (n+1 > \alpha > 0);$$

если α — целое, то коэффициент перед интегралом следует заменить на $(-1)^{\alpha+1}\alpha C_n^\alpha$. Положительные степени определяются как $[A^{-\alpha}]^{-1}$. Естественные условия, которым должны удовлетворять степени, оказываются при этом выполненными.

Дальнейшая часть статьи посвящена перенесению на нормально позитивные операторы свойств, известных ранее для более узких классов операторов. По определению, оператор F, действующий в E, подчинен оператору A^α, если $D(F) \supset D(A^\alpha)$, и $\|Fx\| \leqslant K\|A^\alpha x\|$ $(x \in D(A^\alpha))$. F квазиподчинен степени α оператора A, если при любом $\beta > \alpha$

$$\|Fx\| \leqslant K(\beta)\|A^\beta x\|^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot \|x\|^{1-\frac{\alpha}{\beta}} \quad (x \in D(A^\beta)). \quad (1)$$

Теорема 6. Пусть A нормально позитивен. Если замкнутый оператор F удовлетворяет неравенству (1), то он подчинен любому оператору $A^{\alpha+\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$. Из остальных результатов отметим ослабленный аналог известной теоремы Хайнца.

Теорема 7. Пусть оператор A действует в E, B — в сопряженном пространстве E^*, причем A и B нормально позитивны. Пусть замкнутый оператор F, действующий в E, удовлетворяет условиям:

$$\|Fx\|_E < C_1\|A^{\gamma_1}x\|_E \quad (x \in D(A^{\gamma_1}) \supset D(F)),$$

$$\|F^*l\|_{E^*} < C_2\|B^{\gamma_2}l\|_{E^*} \quad (l \in D(B^{\gamma_2}) \supset D(F^*)) \quad (\gamma_1, \gamma_2 > 0).$$

Тогда

$$|(Fx, l)| < C(\rho_1, \rho_2) \cdot \|A^{\rho_1\gamma_1}x\|_E \|B^{\rho_2\gamma_2}l\|_{E^*},$$

где $x \in D(A^{\gamma_1})$, $l \in D(B^{\gamma_2})$, ρ_1, ρ_2 — любые числа из $[0, 1]$ такие, что $\rho_1 + \rho_2 > 1$.

М. З. Соломяк

7849. Линейные операторные уравнения. Лумер, Розенблум (Linear operator equations. Lumer Gunter, Rosenblum Marvin), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, 10, № 1, 32—41 (англ.)

Пусть A — комплексная банахова алгебра с единицей. Изучается оператор в A, определенный равенством

$$Sx = \sum_{j=1}^N u_j x v_j, \quad (1)$$

где $\{u_j\}$ и $\{v_j\}$ — два набора коммутирующих элементов A, в частности, оператор вида

$$Rx = \sum_{j=1}^N f_j(u)\, x\, g_j(v), \quad (2)$$

где $f_j(u)$ и $g_j(v)$ — определяемые как обычно, аналитические функции элементов кольца. Более простой оператор вида $ux+xv$ рассматривался одним из авторов ранее (РЖМат, 1958, 2192). Спектр оператора S принадлежит множеству $\sum_{j=1}^N \sigma(u_j)\sigma(v_j)$, где через $\sigma(u)$ обозначен спектр элемента u кольца A. Спектр оператора R принадлежит области значений функции $\sum_{j=1}^N f_j(\alpha) g_j(\beta)$, у которой аргумент α пробегает множество $\sigma(u)$, а аргумент β — $\sigma(v)$. В случае, когда A есть банахова алгебра ограниченных операторов в некотором банаховом пространстве, спектр оператора R совпадает с областью значений указанной функции. Для оператора $ux+xv$ последний результат по словам авторов принадлежит Клейнекке и не опубликован. Для аналитических функций оператора S дается формула

$$\varphi(S)x = \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{\partial D_1} \dots \int_{\partial D_N} \varphi\Big(\sum_{j=1}^N \lambda_j u_j\Big) x \prod_{j=1}^N (\lambda_j e - v_j)^{-1} d\lambda_j. \quad (3)$$

В заключение формулируются условия разрешимости систем уравнений вида $\sum_{j,k} u_{ij}(k) x v_{ij}(k) = y_j$ $(i = 1, \dots, n)$.

Примечание референта. Оператор вида (2) рассматривался референтом (РЖМат, 1955, 1759, реф. 7850). Полученные им результаты, по-видимому, остались не-

известными авторам. В частности, была получена формула

$$\varphi(R)\,x = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\partial D_u}\int_{\partial D_v}\varphi\left(\sum_{j=1}^{N} f_j(\lambda)g_j(\mu)\right)\times$$

$$\times\,(u-\lambda e)^{-1}\,x\,(v-\mu e)^{-1}\,d\lambda d\mu.$$

Обобщая ее можно для оператора $\varphi(s)$ получить эквивалентную формуле (3) формулу

$$\varphi(s)\,x = \frac{1}{(2\pi i)^{2N}}\int\cdots\int\varphi\left(\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\mu_j\right)\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{N}(u_j-\lambda_j e)^{-1}\,d\lambda_j\cdot x\prod_{j=1}^{N}(v_j-\mu_j e)^{-1}\,d\mu_j.$$

Ю. Л. Далецкий

7850. Об одном линейном уравнении относительно элементов нормированного кольца. Далецкий Ю. Л., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 1, 165—168

Если $\mathfrak{R}$ — нормированное кольцо, $a_l x = ax$; $a_r = xa$ (a, x — элементы из $\mathfrak{R}$) — ограниченные линейные операторы левого и правого умножения по a, а S_a — спектр элемента a, то спектры операторов a_l, a_r принадлежат S_a. Этот факт допускает обобщение. Пусть F_a — область, охватываемая гладким контуром Γ_a, состоящим из конечного числа простых замкнутых дуг, окружающих множество S_a (для $b\in\mathfrak{R}$ S_b, F_b, Γ_b имеют аналогичный смысл), и пусть $\varphi(\lambda, \beta)$ — функция однозначная, кусочно-аналитическая при $\lambda\in F_a, \mu\in F_b$. Оператор $\varphi(a, b)$ допускает представление вида

$$\varphi(a,b) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_a}\int_{\Gamma_b}\varphi(\lambda,\mu)\,(a-\lambda e)_l^{-1}(b-\mu e)_r^{-1}\,d\lambda d\mu.$$

Если $S_\varphi(a, b)$ — множество значений $\varphi(\lambda, \mu)$ при $\lambda\in S_a$, $\mu\in S_b$, то спектр $\varphi(a, b)$ принадлежит $S_{\varphi(a,b)}$.

Этот результат используется при рассмотрении операторного уравнения

$$P(a,b)\,x \equiv \sum_{i,k=0}^{n} c_{ik}a^i x b^k = y \qquad (y\in\mathfrak{R}),$$

порожденного оператором $P(a, b) = \sum_{i,k=0}^{n} c_{ik}\,a_l^i\,b_r^k$.

Оно имеет единственное решение вида

$$x = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_a}\int_{\Gamma_b}\frac{(a-\lambda e)^{-1}y\,(b-\mu e)^{-1}}{P(\lambda,\mu)}\,d\lambda d\mu, \qquad (1)$$

если полином $P(\lambda, \mu) \equiv \sum_{i,k=0}^{n} c_{ik}\lambda^i\mu^k \neq 0$, при $\lambda\in S_a$, $\mu\in S_b$. Этот факт содержится в сформулированной автором ранее теореме (РЖМат, 1955, 1739). Если a, b, y — ограниченные операторы не банахова, а гильбертова пространства, и a и b — операторы Эрмита, то (1) принимает вид $x = \int_{S_a}\int_{S_b}\frac{dE_s\,y\,dE_\sigma}{P(s,\sigma)}$. Имеются и другие результаты.

Г. Л. Мизернюк

7851. Об открытых отображениях в банаховых алгебрах. Мак-Карти (On open mappings in Banach algebras. McCarthy Charles A.), J. Math. and Mech., 1959, 8, № 3, 415—418 (англ.)

Пусть $\mathfrak{A}$ (вообще говоря, не коммутативная) — банахова алгебра (нормированное кольцо) с единицей e, $f(\lambda)$ — комплекснозначная функция, голоморфная на открытом множестве U комплексной плоскости. Пусть $f(\mathfrak{A})$ — совокупность всех элементов вида $f(a)$, где $\sigma(a)\subseteq U$ ($\sigma(a)$ · спектр a, так что $f(a)$ имеет смысл). Исследуется следующая проблема. Пусть $f(a)\subseteq f(\mathfrak{A})$. Каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы некоторая окрестность $f(a)$ принадлежала $f(\mathfrak{A})$? Эта проблема не решена даже в случаях $f(\lambda) = e^\lambda$ и $f(\lambda) = \lambda^n (n > 1)$, хотя в этих случаях Хиллом (РЖМат, 1959, 2872) были получены естественные достаточные условия. Основные результаты:

Пусть $f(\lambda)$ голоморфна на открытом множестве U, содержащем $\sigma(a)$, и взаимнооднозначна на открытом множестве $V\supseteq U$, причем $f(\sigma(a))\supseteq f(V)$. Тогда некоторая окрестность $f(a)$ целиком состоит из точек вида $f(b)$, где $b\in\mathfrak{A}$; далее, если $\sigma(a_1)\subseteq V$ и $f(a) = f(a_1)$, то a и a_1 коммутируют. Полученные результаты применяются к частному случаю, когда $f(\lambda) = e^\lambda$.

Е. А. Горин

7852. Об открытых отображениях в банаховых алгебрах, II. Мак-Карти (On open mappings in Banach algebras, II. McCarthy Charles A.), Bull. Amer. Math. Soc., 1959, **65**, № 2, 66 (англ.)

Приводится совсем элементарное (и короткое) доказательство основных результатов, содержащихся в предыдущей работе автора (реф. 7851).

Е. А. Горин

7853. Пространство функций со значениями в банаховой алгебре. Джонсон (Spaces of functions with values in a Banach algebra. Johnson G. Philip), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **92**, № 3, 411—429 (англ.)

Пусть A — коммутативная банахова алгебра и G — коммутативная локально компактная группа. По аналогии с групповой алгеброй $L^1(G)$ изучается алгебра $B^1(G, A)$ определенных на G, интегрируемых по Бохнеру функций со значениями из A. $B^1(G, A)$ является коммутативной банаховой алгеброй, если сложение определить обычным образом, умножение — с помощью свертки, и норму по формуле $\|f\|_B = \int_G \|f(x)\|\,dx$. Доказывается, что замкнутые подпространства B^1, инвариантные относительно трансляции и умножения на элементы алгебры A, являются идеалами. Обратное утверждение справедливо для замкнутых регулярных идеалов. Пусть $\hat{G}$ — группа характеров группы G, $\mathfrak{M}_A$ — пространство максимальных идеалов алгебры A, и $\mathfrak{M}_B$ — пространство максимальных идеалов алгебры B. Пространство $\mathfrak{M}_B$ гомеоморфно в слабой топологии прямому произведению $\hat{G}\times\mathfrak{M}_A$, причем этот гомеоморфизм осуществляется с помощью формулы

$$\hat{f}(M_B^{(\alpha,M)}) = \int_G f(x)\,\widehat{(M)}\,\overline{\alpha}(x)\,dx \quad (f\in B)\widehat{\ },$$

где $\alpha\in\hat{G}$, $M\in\mathfrak{M}_A$, $M_B^{(\alpha,M)}$ — максимальный идеал алгебры B^1, порожденный парой (α, M), а символом $\widehat{\ }$ обозначается соответствующая элементу алгебры функция на множестве максимальных идеалов. Алгебра B^1 полупроста тогда и только тогда, когда этим свойством обладает алгебра A. В случае, когда алгебра $A = L^1(H)$ является групповой алгеброй коммутативной локально компактной группы H, алгебра $B^1(G, L^1(H))$ изометрична и изоморфна $L^1(G\times H)$. В заключение рассматриваются условия, при которых из изоморфизма алгебр $B^1(G, A)$ и $B^1(\widetilde{G}, \widetilde{A})$ следует изоморфизм групп G и $\widetilde{G}$ и алгебр A и $\widetilde{A}$.

Ю. Л. Далецкий

7854. Функции, действующие на преобразования Фурье. Хелсон, Кахан, Кацнельсон, Рудин (The functions which operate on Fourier transforms. Helson Henry, Kahane Jean-Pierre, Katznelson Yitzhak, Rudin Walter), Acta math., 1959, **102**, № 1-2, 135—157 (англ.)

Пусть A — нормированное кольцо. Согласно известной теореме И. М. Гельфанда, если $f \in A$ и $F(z)$ — регулярная функция в области, содержащей спектр f, то $F(f) \in A$. В реферируемой работе рассматривается обращение этого результата, т. е. изучаются функции $F(z)$ комплексного аргумента z, для которых из $f \in A$ следует, что $F(f) \in A$. Частные результаты без доказательств были опубликованы авторами ранее (РЖМат, 1953, 7923, 9263, 9264). Пусть G — коммутативная, локально компактная группа с аддитивной записью операции, и Γ — группа ее характеров. Через (x, y) обозначается значение характера $y \in \Gamma$ на элементе $x \in G$. Пусть $A(\Gamma)$ — совокупность всех функций на Γ, представимых в виде $f(y) = \int_G (-x, y)\, g(x)\, dx$, где $g(x) \in L_1(G)$, и $B(\Gamma)$ — совокупность всех функций на Γ, представимых в виде $f(y) = \int_G (-x, y)\, d\mu(x)$, где μ — принадлежит кольцу $M(G)$ комплекснозначных ограниченных борелевских мер на G со сверткой в качестве умножения. Множества $A(\Gamma)$ и $B(\Gamma)$ образуют нормированные кольца при обычных операциях сложения и умножения и нормах $\|f\|_A = \int_G |g(x)|\, dx$, $\|f\|_B = \operatorname{var} \mu$. Функция F, определенная в множестве E комплексной плоскости, называется действующей в функциональной алгебре R, если $F(f) \in R$ для всех $f \in R$ с областью значений в E. Пусть, в частности, $E = I = [-1, 1]$ и $F(0) = 0$. Устанавливаются следующие результаты: 1) если группа Γ дискретна, и F действует в $A(\Gamma)$, то F аналитична в некоторой окрестности нуля, 2) если группа Γ не дискретна, и F действует в $A(\Gamma)$, то F аналитична в I, 3) если Γ не компактна, и F действует в $B(\Gamma)$, то F продолжается как целая функция в комплексную плоскость. Аналогичные результаты имеют место, когда E — открытое плоское множество. В качестве следствия получаются некоторые результаты относительно кольца $M(G)$ для недискретной группы G. Например, если функция $F(z)$ определена на всей комплексной плоскости и действует в $M(G)$, рассматриваемом как кольцо функций на пространстве максимальных идеалов, то $F(z)$ — целая функция. Отсюда следует несимметричность $M(G)$.

Ю. Л. Далецкий

7855. Ограниченные непрерывные функции на локально компактном пространстве. Бак (Bounded continuous functions on a locally compact space. Buck R. Creighton), Michigan Math. J., 1958, 5, № 2, 95—104 (англ.)

Пусть X — локально компактное пространство, а E — вещественное линейное пространство с полной локально выпуклой топологией, заданной семейством полунорм ν. $C[X, E]$ — вещественное линейное пространство всех непрерывных отображений f пространства X в E, а $C^*[X; E]$ — подпространство тех из f, для которых $f(X)$ есть ограниченное множество в E. $C_0[X; E]$ — подпространство $C^*[X; E]$, состоящее из отображений f, „аннулирующихся на бесконечности“. $C_{00}[X; E]$ — подпространство $C_0[X; E]$, состоящее из „финитных“ функций (т. е. тождественно равных нулю вне некоторого компактного множества из X). В частном случае, когда E — поле действительных чисел, перечисленные пространства обозначаются соответственно $C[X]$, $C^*[X]$, $C_0[X]$ и $C_{00}[X]$. В $C^*[X; E]$ вводятся равномерная σ-топология с помощью полунорм $\|f\|_\nu = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_\nu$ и компактно-открытая k-топология с помощью полунорм $\|f\|_{K,\nu} = \max_{x \in K} \|f(x)\|_\nu$, где K — любое компактное множество в X (если само X компактно, то $k = \sigma$). Наконец, строгая β-топология есть локально выпуклая топология, определенная в $C^*[X; E]$ с помощью полунорм $\|f\|_{\varphi,\nu} = \|\varphi f\|_\nu = \sup_{x \in X} \|\varphi(x) f(x)\|_\nu$, где ν пробегает все индексы полунорм в E, а φ — все $C_0[X]$.

В теореме 1 доказывается, что: 1) $k \leqslant \beta \leqslant \sigma$, причем равенство имеет место только в случае компактности X; 2) пространство $C^*[X; E]$ топологически полно; 3) понятия ограниченного множества в β- и σ-топологиях совпадают; 4) на каждом β-ограниченном множестве из $C^*[X; E]$ β-топология согласуется с k-топологией; 5) последовательность $\{f_n\} \subset C^*[X; E]$ является β-сходящейся в том и только в том случае, если она σ-ограничена и k-сходится; 6) подпространство $C_{00}[X; E]$ β-плотно в $C^*[X; E]$; 7) β-топология метризуема только тогда, когда X компактно.

Основными результатами работы являются теоремы Стоуна—Вейерштрасса для пространств $C^*[X]$ и $C^*[X; E]$.

Теорема 3. Пусть X локально компактно. Если $\mathfrak{A}$ есть β-замкнутая подалгебра из $C^*[X]$, отделяющая точки в X и содержащая нигде не исчезающую функцию, то $\mathfrak{A} = C^*[X]$.

Теорема 5. Пусть X локально компактно и метризуемо, а E конечномерно. Пусть $\mathfrak{A}$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $\mathfrak{A}$ — β-замкнутое подпространство из $C^*[X; E]$; 2) если $f \in \mathfrak{A}$ и $\varphi f \in C^*[X]$, то $\varphi f \in \mathfrak{A}$; 3) для любых $x \in X$ и $p \in E$ найдется $f \in \mathfrak{A}$ такая, что $f(x) = p$. Тогда $\mathfrak{A} = C^*[X; E]$.

И. С. Иохвидов

7856. О вложении одного пространства непрерывных функций в другое. Гемба, Семадени (On the embedding of one space of continuous functions into another. Gęba K., Semadeni Z.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1959, 7, № 4, 187—189 (англ.; рез. русск.)

Пусть Ω и Ω_0 — компактные хаусдорфовы пространства; $C(\Omega)$ и $C(\Omega_0)$ — соответственно определенные банаховы структуры действительных непрерывных функций; $C(\Omega_0) \underset{B_+}{\subset} C(\Omega)$ обозначает, что существует линейное однозначное, изометрическое и изотоническое преобразование T пространства $C(\Omega_0)$ в подпространство X_0 пространства $C(\Omega)$. Если e и e_0 единицы соответственно в $C(\Omega)$ и $C(\Omega_0)$, то $T(e_0) \leqslant e$. Далее, $C(\Omega_0) \underset{M1}{\subset} C(\Omega)$ обозначает, что $C(\Omega_0) \underset{B_+}{\subset} C(\Omega)$, а T и X_0 можно выбрать так, что $T(e_0) = e$ и $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$ для всех $x, y \in C(\Omega_0)$. В этом случае $\Omega = \Omega_1$, где $\Omega_1 = \{t \in \Omega : Te_0(t) = e(t)\} \cap \bigcap_{x,y \in X_0} \{T(x \vee y)(t) = \max Tx(t)\, Ty(t)\}$.

Формулируются следующие утверждения:

1. Если $C(\Omega_0) \underset{B_+}{\subset} C(\Omega)$, то $\|x\| = \sup_{x \in X_0} \{|x(t)| : t \in \Omega_1\}$ и существует непрерывное отображение Ω_1 на Ω_0.

2. Если $\Omega = \Omega_1$, то $C(\Omega_0) \underset{M1}{\subset} C(\Omega)$ тогда и только тогда, когда существует непрерывное отображение Ω на Ω_0.

3. $\Omega_0 \underset{\text{top}}{\subset} \Omega$, если $C(\Omega_0) \underset{B_+}{\subset} C(\Omega)$ и существует неотрицательный проектор P с единичной нормой пространства $C(\Omega)$ на X_0. Более того, существует гомеоморфизм φ пространства Ω замкнутого множества $\Omega_P \subset \Omega$ такой, что $(T^{-1}Px)(\varphi^{-1}(t)) = x(t)$, $t \in \Omega_P$.

4. Ω_0 гомеоморфно ретракту из Ω тогда и только тогда, когда $C(\Omega_0) \subset_{M1} C(\Omega)$ и существует неотрицательный проектор $C(\Omega)$ на X_0.

Доказательства не приводятся.

Л. А. Ходакова

7857. Сильная теорема о максимуме модуля для максимальных функциональных алгебр. Бир (A strong maximum modulus theorem for maximal function algebras. Bear H. S.), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, 92, № 3, 465—469 (англ.)

Дальнейшее развитие работы, опубликованной автором ранее. Все обозначения и терминология такие же, как и в цитированном выше реферате. Пусть A — собственная замкнутая подалгебра алгебры $C(X)$ на компактном хаусдорфовом пространстве X, которое рассматривается как часть пространства $\Sigma(A)$ максимальных идеалов алгебры A. Если E — существенное множество алгебры A в X, то множество максимальных идеалов алгебры $A \mid E$ есть $\Sigma(A \mid E) = \Sigma(A) \sim (X \sim E)$ ($X \sim Y$ — дополнение множества Y в множестве X). Это же множество является существенным множеством алгебры A в $\Sigma(A)$. В частности, если A — существенная алгебра в X, то она является существенной и в $\Sigma(A)$ и наоборот. В цитированной выше работе автором было доказано, что для существенной максимальной алгебры A введенная Г. Е. Шиловым граница совпадает с X. Это свойство дополняется утверждением: если $|f(x)|$ достигает максимума в некоторой точке множества $\Sigma(A) \sim X$, то $f(x)$ постоянна. Если A максимальна, но не существенна, то $f(x)$ постоянна в $\Sigma(A) \sim (X \sim E)$. Ю. Л. Далецкий

7858. Проблема Дирихле для шиловской границы компактного пространства. Бауэр (Un problème de Dirichlet pour la frontière de Silov d'un espace compact. Bauer Heinz), C. r. Acad. sci., 1958, 247, № 12, 843—846 (франц.)

Автор обобщает понятие гармоничности функции и строит обобщенную теорию задачи Дирихле. Пусть X — компактное пространство, H_0 — множество функций, определенных в X, такое, что: 1) H_0 — векторное подпространство пространства $C(X)$ (ограниченных и непрерывных на X функций); 2) функция, тождественно равная 1, принадлежит H_0; 3) H_0 разделяет точки в X. Обозначим через $X^* = \partial_{H_0} X$ шиловскую границу пространства X по отношению к H_0, через f^* — сужение на X^* функции $f \in C(X)$. Точка $s \in X$ называется H_0-экстремальной, если мера ε_s массы $+1$, сосредоточенная в точке s, есть единственная мера $\mu \geqslant 0$ на X такая, что $h(s) = \int h\,d\mu$ для всех $h \in H_0$. Если X_e обозначает совокупность всех H_0-экстремальных точек пространства X, то всякая функция из H_0 достигает своего наименьшего значения на X_e. Мера $\mu^s \geqslant 0$ на X^* называется гармонической мерой, отвечающей точке $s \in X$, если $h(s) = \int h^* d\mu^s$ для всех $h \in H_0$. Пусть $\mathfrak{M}^s$ — множество всех гармонических мер, отвечающих точке $s \in X$.

Функция $h \in C(X)$, по определению, будет гармонической, если $h(s) = \int h^* d\mu^s$ для всех $s \in X$ и $\mu^s \in \mathfrak{M}^s$. Множество H всех гармонических функций замкнуто в топологии равномерной сходимости и $H_0 = H$, $\partial_H X = \partial_{H_0} X$.

Если функция $f \in C(X^*)$ может быть продолжена в функцию $h \in H$, то функция f называется резолютивной. Основным результатом работы является следующая теорема:

Для функции $f \in C(X)$ следующие условия эквивалентны: а) f резолютивна; б) для каждой точки $s \in X$ имеет место равенство $\sup\limits_{R^* \leqslant f} h(s) = \inf\limits_{R^* > f} h(s)$, в) для каждой точки $s \in X$ и каждой пары мер μ_1^s, $\mu_2^s \in \mathfrak{M}^s$ $\int f d\mu_1^s = \int f d\mu_2^s$.

Если Ω — открытое относительно компактное множество в пространстве R^n ($n \geqslant 2$), F — его евклидова граница, $X = \Omega \cup F$, H_0 — множество функций из $C(X)$, сужение которых в Ω гармонично (в обычном смысле), то получается классическая теория задачи Дирихле. Доказательства не приводятся. І. Ренуб

7859. О функциональном квазигильбертовом пространстве. Сасаяма (On the functional quasi Hilbert space. Sasayama Hiroyoshi), J. Spat. Math. Sasayama Res. Room, 1958, 1, № 2, 67—112 (англ.)

Вводится понятие функционального квазигильбертова пространства Ξ^ω по аналогии с введенным ранее автором понятием n-мерного квазиевклидова пространства Ξ^n (РЖМат, 1958, 4176), и строится его аналитическая и дифференциальная геометрия. В § 1 работы изучаются квазикруговые функционалы $c[\theta; \alpha]$, являющиеся аналогом тригонометрических функций. Они определяются следующим образом:

$$c[\theta; \alpha] = \frac{1}{\eta} \int_{\eta}^{1+\eta} \omega^{(1-\alpha)(\beta-1)} \exp \int_1^{\eta} \theta(\xi) \omega^{\xi(\beta-1)}\, d\xi\, d\beta$$

$\left(1 < \alpha < 1+\eta;\ \eta \geqslant 1;\ \omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{\eta}\right);\ \theta(\xi)\right.$ — непрерывная функция). Функционал $c[0; 1]$ называется квазикосинусным. Указывается ряд свойств квазикруговых функционалов. Например, имеет место теорема сложения: $c[\theta + \theta'; \alpha] = \int_1^{1+\eta} c[\theta; \beta]\, c[\theta'; \alpha - \beta + 1]\, d\beta$. В § 2 вводится понятие функционального квазигильбертова пространства Ξ^ω. Им называется множество, элементы которого находятся во взаимно однозначном соответствии с непрерывными функциями $x(\alpha)$, заданными на интервале $1 \leqslant \alpha \leqslant 1+\eta$. В Ξ^ω определяется функциональная квазинорма:

$$\| P(x(\alpha)) \| = \left[\exp \int_1^{1+\eta} \log \int_1^{1+\eta} \omega^{(\alpha-1)(\beta-1)} x(\alpha) d\alpha\, d\beta\right]^{1/\eta}.$$

Определенная по ней метрика инвариантна относительно преобразований: $x(\alpha) = \overset{\circ}{x}(\alpha) + \int_1^{1+\eta} c[\theta_0; \alpha - \beta + 1] \overline{x}(\beta) d\beta$. В § 3 даются определения функциональной квазипрямой, ее направляющих квазикосинусных функционалов, функциональных квазиосей координат, функционального квазиугла и т. д. В следующем разделе дается определение ортогональности направлений $c[\theta_1; \alpha]$ и $c[\theta_2; \alpha]$. Указанные направления ортогональны, если $c[\theta_1 - \theta_2; 1] = 0$. В частности, ортогональными оказываются введенные в § 3 оси координат (для них $c[\theta_\beta; \alpha] = \delta_{\beta\alpha}(-1)^{1-\alpha}$). Здесь же вводится и изучается ряд геометрических объектов, определение которых основывается на понятии ортогональности. § 5 посвящен изучению конечномерных квазиплоскостей и квазинормалей к ним. Далее рассматриваются функциональные гиперплоскости в Ξ^ω. Они задаются уравнениями вида $\int_1^{1+\eta} a(\alpha) x(\alpha) d\alpha + b = 0$. Это уравнение может быть приведено к квазинормальной форме: $\int_1^{1+\eta} x(\alpha) c[-\theta_0, 2-\alpha] d\alpha = \rho_0$. В § 7 изучаются функциональные квазигиперэллипсоиды в Ξ^ω, которые задаются уравнениями вида $\exp \int_1^{1+\eta} \log \int_1^{1+\eta} \omega^{(\alpha-1)(\beta-1)} \times \frac{x(\alpha)}{a(\alpha)} d\alpha\, d\beta = 1$. В частном случае, когда $a(\alpha)$ — константа, это уравнение определяет функциональную квазигиперсферу. При помощи последней в Ξ^ω определяется преобразование, аналогичное инверсии. Заключительный раздел посвящен векторной алгебре и дифференциальной геометрии. Здесь вводятся понятия функционального квазивектора, квазискалярного произведения,

функционального касательного квазивектора к кривой, функциональной нормальной квазигиперплоскости, функционального квазигиперсферического изображения, главных функциональных квазикривизн и другие понятия. С. Г. Гиндикин

7860. Нормальные операторы в банаховом пространстве $L^p(-\infty,\infty)$. Часть I. Ограниченные операторы. Краббе (Normal operators on the Banach space $L^p(-\infty,\infty)$. Part I. Bounded operators. Krabbe Gregers L.), Bull. Amer. Math. Soc., 1959, **65**, № 4, 270—272 (англ.)

Пусть L^+ — совокупность функций, принадлежащих к $L^p(-\infty,\infty)$ для всех $1<p<\infty$, $\mathfrak{E}$ — множество всех линейных операторов T, отображающих L^+ в себя, таких, что $\|T\|_p\neq\infty$ для всех $1<p<\infty$, $F=L^\infty(-\infty,\infty)$. Для всякой функции $f\in F$ обозначим через $t(f)$ множество всех операторов $T\in\mathfrak{E}$, для которых (преобразование Фурье $Tx)=f\times$ (преобразование Фурье x) для всех $x\in L^+$. Объединение (t) всех множеств $t(f)$ при $f\in\mathfrak{F}$ образует подалгебру в $\mathfrak{E}$. При $T\in(t)$ через $\vee T$ обозначается единственная, с точностью до эквивалентности, функция $f\in\mathfrak{F}$ такая, что $T\in t(f)$. Преобразование $T\to\vee T$ отображает изоморфно (t) на некоторую подалгебру $\mathfrak{F}_v$ алгебры $\mathfrak{F}$. Множество $\mathfrak{F}_v$ содержит все функции ограниченной вариации. При $g\in\mathfrak{F}_v$, $\wedge(g)$ — означает прообраз g при отображении $T\to\vee T$. Из определения $\mathfrak{E}$ вытекает, что всякий оператор T из $\mathfrak{E}$ имеет единственное продолжение T_p в $\mathfrak{E}_p$, где $\mathfrak{E}_p$ — алгебра всех линейных ограниченных преобразований $L^p(-\infty,\infty)$ в себя. Инволютивная алгебра $(t)_p$ определяется как образ (t) при образовании $T\to T_p$.

Основной результат: Если $T_p\in(t)_p$, а $\vee T$ — ограниченная функция, с кусочно-монотонной вещественной и мнимой частью, то существует такое гомоморфное отображение E_p^T булева кольца, порожденного полузамкнутыми интервалами плоскости в алгебру $\mathfrak{E}_p$, что

$$T_p=\int\lambda E_p^T(d\lambda), \qquad (1)$$

при $p\geqslant 2$ интеграл (1) существует в смысле сильной сходимости операторов, а при $p\geqslant 1$ — в смысле слабой сходимости операторов.

Если $g=\vee T$ и через $g*(\mathfrak{A})$ обозначить характеристическую функцию прообраза множества $\mathfrak{A}$ (при преобразовании g), то $E^T(\mathfrak{A})=\wedge(g*(\mathfrak{A}))$. Функция E_p^T не обязательно счетно-аддитивная. В. Э. Лянце

7861. Разложение последовательностей в гильбертовом пространстве на гетерогональные системы. Планс (Zerlegung von Folgen im Hilbertraum in Heterogonalsysteme. Plans Antonio), Arch. Math., 1959, **10**, № 4, 304—306 (нем.)

Последовательность $\{x_n\}_1^\infty$ векторов сепарабельного гильбертова пространства H автор называет гетерогональной системой, если линейный оператор L, определенный на векторах ортонормального базиса $\{e_n\}_1^\infty$ пространства H равенствами $Le_n=x_n\,(n=1,2,\ldots)$, осуществляет взаимно однозначное и непрерывное отображение пространства H на линейную замкнутую оболочку векторов $x_n\,(n=1,2,\ldots)$ (в советской литературе употребляется термин „базис Рисса“). Последовательность $\{x_n\}_1^\infty$ тогда и только тогда является гетерогональной системой, когда выполнены следующие два условия:

1) $0<m\leqslant\|x_n\|\leqslant M<\infty\quad(n=1,2,\ldots)$,

2) $\alpha([x_{p_1},\ldots,x_{p_n}],[x_{q_1},\ldots,x_{q_m}])\geqslant\lambda>0$

для любых двух конечных наборов натуральных чисел $p_1,\ldots,p_n$ и $q_1,\ldots,q_m$ $(p_i\neq q_j,\ i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,m)$. Здесь $[y_1,\ldots,y_n]$ означает подпространство, натянутое на векторы $y_1,\ldots,y_n$, а $\alpha(V_1,V_2)$ — угол между подпространствами V_1 и V_2, т. е. $\cos\alpha(V_1,V_2)=\sup_{\substack{x\in V_1,\ y\in V_2\\ \|x\|=\|y\|=1}}|(x,y)|$, $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. Наибольшее число λ, для которого имеет место условие 2), называется углом, соответствующим системе $\{x_n\}_1^\infty$.

Теорема. Пусть $S=\{x_n\}_1^\infty$ — слабо сходящаяся к нулю последовательность векторов пространства H, $\|x_n\|\geqslant m>0$. Тогда S можно представить в виде объединения конечного или счетного числа таких гетерогональных систем $S_k\,(k=1,2,\ldots)$, что соответствующие этим системам углы λ_k, если их бесконечное число, образуют неубывающую последовательность положительных чисел, сходящуюся к $\frac{\pi}{2}$. А. С. Маркус

7862. Диссипативные операторы и гиперболические системы дифференциальных уравнений в частных производных. Филлипс (Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations. Phillips R. S.), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **90**, № 2, 193—254 (англ.)

Диссипативным автор называет линейный оператор L, действующий в гильбертовом пространстве H с областью определения $D(L)$, удовлетворяющий условию $(Ly,y)+(y,Ly)\leqslant 0$, $y\in D(L)$. Оператор L называется максимально диссипативным, если L не является собственным сужением другого диссипативного оператора.

Гл. I главным образом посвящена абстрактной характеристике максимально диссипативных операторов L. Развитая теория в гл. II применяется к гиперболической системе

$$y_t=L_1y\equiv E^{-1}[(A^iy)_i+By],$$
$$x\in\Delta,\quad t>0,\quad y(x,0)=f(x),$$

где Δ — область в m-мерном евклидовом пространстве с точками $x=(x^1,x^2,\ldots,x^m)$, $y(x,t)$ — функция от (x,t) со значениями в k-мерном комплексном евклидовом пространстве. Нижний индекс i обозначает дифференцирование относительно x^i, а символы E, A^i и B представляют $K\times K$ матрицы-функции от одного лишь x, причем E — положительно определенная и A^i эрмитова (здесь употреблено тензорное обозначение для суммирования); при этом A^i и B вместе удовлетворяют условию „диссипативности“ $B+B^*+A^i\leqslant 0$. Б. Р. Мукминов

7863. О некоторых методах функционального анализа в теории операторных и дифференциальных уравнений в частных производных с параметрами. Маслов В. П., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 4, 179—185

Пусть в гильбертовом пространстве H дана последовательность линейных операторов T_n с общей областью определения D, всюду плотной в H. Пусть операторы T_n допускают замкнутые расширения, и для любого $g\in D$ существует $\lim T_ng=Tg$.

Теорема 1. Если существуют равномерно ограниченные операторы $\overline{T}_n^{-1}$, то существует и $\overline{T}^{-1}$, определенный на подпространстве H_0 — ортогональном дополнении множества решений уравнения $T^*x=0$. Для любого $x\in H_0$ $\lim\overline{T}_n^{-1}x=\overline{T}^{-1}x$. Если $Tx_0=0$ и существуют операторы $S_n=T_n$ с равномерно ограниченными S_n^{-1}, то найдется такая последовательность x_n, что $T_nx_n=0$ и $x_n\to x_0$.

Теорема 2. Если x_n — ограниченная последовательность решений уравнений $T_n^* x_n = f_n$ и f_n слабо сходится к f, то найдется последовательность y_n такая, что $T^* y_n = f$ и $x_n - y_n$ слабо сходится к нулю.

Эти две теоремы применяются, для примера, к исследованию уравнения гиперболического типа с „малым" параметром при u_{tt}'' и обыкновенного дифференциального уравнения с „малым" параметром при старшей производной. Далее рассмотрены последовательности операторов T_n и L_n:

$$T_n = \varepsilon(n)[A_1 + K_n A_2] + M_n, \quad L_n = \varepsilon(n) A_1 + M_n,$$

где $\varepsilon(n)$ — ограниченная числовая последовательность, M_n и K_n равномерно ограничены.

Теорема 3. Пусть $\lim \| K_n \| = 0$, а $D(A_2) \supset D(A_1)$:

1) Если L_n^{-1} равномерно ограничены, то

$$\left\| T_n^{-1} - L_n^{-1} \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \left[\varepsilon(n) K_n A_2 L_n^{-1} \right]^k \right\| \leqslant$$
$$\leqslant [\alpha \| K_n \|]^{N+1}.$$

2) Если $L_n x_n = 0$ и существуют операторы $S_n \subset L_n$ такие, что S_n^{-1} равномерно ограничены, то при достаточно больших n $T_n y_n = 0$, где

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\varepsilon(n) S_n^{-1} K_n A_2 \right]^k x_n$$

и

$$\left\| y_n - \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \left[\varepsilon(n) S_n^{-1} K_n A_2 \right]^k x_n \right\| \leqslant [\beta \| K_n \|]^{N+1}.$$

Здесь α и β не зависят от n и N. И. К. Даугавет

7864. О густоте спектра струны. Кац И. С., Докл. АН СССР, 1959, 126, № 6, 1180—1182

Даются критерии сходимости ряда $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-\alpha}$, $(0 < \alpha < 1)$, где λ_j — квадраты частот собственных колебаний струны, натянутой между точками $x = 0$ и $x = L$ $(0 < L \leqslant \infty)$. Если $M(x)$ есть масса полузамкнутого интервала $[0, x)$, то для дискретности спектра и сходимости указанного ряда при обычных краевых условиях достаточно выполнения неравенства

$$\int_{-0}^{L} dM(x) \int_{x}^{L} \left[\int_{x-0}^{s} (s - r)\, dM(r) \right]^{\alpha - 1} ds < \infty;$$

при добавочных предположениях на $M(x)$ даются уточнения этой теоремы. Приводится также условие сходимости ряда при целых положительных α. Результаты применяются к задаче Штурма — Лиувилля и к теории непрерывных дробей (критерий сходимости непрерывной дроби к мероморфной функции, полюсы которой расположены на положительной вещественной полуоси и для которой ряд сходится). Л. А. Дикий

7865. О теореме умножения характеристических функций линейных операторов. Штраус А. В., Докл. АН СССР, 1959, 126, № 4, 723—726

Пусть A — замкнутый линейный оператор в гильбертовом пространстве H с плотной в H областью определения, обладающий инвариантным подпространством H_1. Если A_1 — оператор, индуцированный оператором A в H_1, а A_2 — оператор в $H_2 = H \ominus H_1$, определенный равенством $A_2 P_2 f = P_2 A f$ $(f \in D_A)$, где P_2 — оператор проектирования на H_2, то оператор A называется сцеплением операторов A_1 и A_2. В реферируемой статье рассматривается структура сцеплений специального вида, называемых автором регулярными. Для них имеет место следующая теорема умножения:

Если оператор A является регулярным сцеплением операторов A_1 и A_2, то для любой его характеристической функции $X(\lambda)$ (РЖМат, 1960, 4754) имеет место формула $X(\lambda) = X_2(\lambda) X_1(\lambda)$, где $X_1(\lambda)$ и $X_2(\lambda)$ — некоторые характеристические функции операторов A_1 и A_2.

В случае, когда оператор A ограничен, а понятие характеристической функции введено в указанном ниже обобщенном смысле, теорема умножения справедлива для любого сцепления.

Пусть A — ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве H и $\widetilde{A}$ — ограниченный линейный оператор в некотором гильбертовом пространстве $\widetilde{H} \supset H$, удовлетворяющий условию $P\widetilde{A}f = Af$ $(f \in H)$, где P — оператор проектирования в $\widetilde{H}$ на H. Рассмотрим некоторое линейное пространство L со скалярным произведением $[\varphi, \psi]$ (вообще говоря, индефинитным и вырожденным) и некоторый линейный оператор Γ, отображающий $\widetilde{H}$ на L. Если L и Γ выбраны так, что $[\Gamma f, \Gamma g] = \frac{1}{i}((\widetilde{A} - \widetilde{A}^*) f, g)$, то отображение $X(\lambda)$ пространства L на себя, относящее каждому вектору $\varphi = \Gamma f$ вектор $\Gamma(P\widetilde{A}^* - \lambda E)^{-1}(P\widetilde{A} - \lambda E) f$, оказывается однозначно определенным и линейным. Операторная функция $X(\lambda)$ называется обобщенной характеристической функцией оператора A. М. С. Бродский

7866. Об интегральном представлении ограниченных несамосопряженных операторов с вещественным спектром. Бродский М. С., Докл. АН СССР, 1959, 126, № 6, 1166—1169

Линейный ограниченный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H, относится к классу Ω_R, если он обладает следующими свойствами: 1) спектр оператора A состоит только из вещественных чисел; 2) мнимая компонента $A_y = (A - A^*)/2i$ оператора A имеет абсолютно сходящийся след; 3) оператор A является простым (т. е. линейная замкнутая оболочка всех векторов $A^n f$ $(n = 1, 2 \ldots, f \in A_y H)$ совпадает с H).

Расширение $\widetilde{A}$ оператора A на гильбертово пространство $\widetilde{H}$ $(\widetilde{H} \supset H;\ H_0 = \widetilde{H} \ominus H)$ называется простым расширением, если подпространство H_0 является инвариантным относительно $\widetilde{A}$, и в нем оператор $\widetilde{A}$ порождает самосопряженный оператор.

Исходя из треугольной модели операторов класса Ω_R М. С. Лившица (РЖМат, 1954, 5660), доказывается следующая теорема, которая для операторов класса Ω_R является, в известном смысле, аналогом теоремы Шура о приведении матриц к треугольному виду.

Теорема. Для любого оператора $A \in \Omega_R$ найдется его простое расширение $\widetilde{A}$ такое, что

$$\widetilde{A} = \int_0^l \alpha(x)\, dE(x) + 2i \int_0^l E(x) \widetilde{A}_y\, dE(x), \qquad (1)$$

где l — сумма модулей всех собственных чисел оператора A_y, $\alpha(x)$ — ограниченная неубывающая функция; $E(x)$ — абсолютно непрерывное ортогональное разложение единицы, удовлетворяющее условию

$$\mathrm{Sp}\left\{ |\widetilde{A}_y|^{1/2} E(x) |\widetilde{A}_y|^{1/2} \right\} = \mathrm{Sp}\left\{ |A_y|^{1/2} E(x) |A_y|^{1/2} \right\} = x$$
$$\left(|A_y| = \left(A_y^2\right)^{1/2} \right).$$

Отмечается, что первый интеграл из правой части равенства (1) сходится сильно, а второй равномерно. Подпространство значений каждого из проекторов $E(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ является инвариантным подпространством оператора $\widetilde{A}$.

Если спектр оператора $\widetilde{A}$ состоит только из нуля, то $z(x) \equiv 0$ и оператор

$$\widetilde{A} = 2i \int_0^l E(x)\, \widetilde{A}_y dE(x) \qquad (2)$$

является линейным вполне непрерывным оператором с единственной нулевой точкой спектра.

Если спектр оператора A состоит только из нуля и $A_y \geqslant 0$, то сам оператор A допускает представление вида (2)

$$A = 2i \int_0^l E_0(x)\, A_y dE_0(x),$$

где $E_0(x) = PE(x)P$ — ортогональное разложение единицы в пространстве H, а P — ортогональный проектор пространства $\widetilde{H}$ на H.

Указывается, что перечисленные результаты могут быть получены и без привлечения треугольной модели операторов М. С. Лившица. И. Ц. Гохберг

7867. Соотношение между собственными векторами данного и сопряженного оператора в пространстве Гильберта. Надь, Фояш (Une relation parmi les vecteurs propres d'un opérateur de l'espace de Hilbert et de l'opérateur adjoint. Sz.-Nagy Béla, Foiaş Ciprian), Acta scient. math., 1959, **20**, № 1, 91—96 (франц.)

Пусть T — линейный ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H, $E_\zeta(T)$ — собственное подпространство оператора T, соответствующее собственному значению ζ. Если оператор T нормален, то известно, что

$$E_\zeta(T) = E_{\bar{\zeta}}(T^*). \qquad (1)$$

Авторы изучают другие случаи, когда выполняется соотношение (1). Они обобщают тот факт, что соотношение (1) верно, когда оператор T является сжатием, а точка ζ лежит на единичной окружности. Именно:

Предложение I. Если S — спектральное множество (в смысле фон Нёймана) оператора T, причем граница S есть замкнутая жорданова кривая C, то соотношение (1) верно для всех $\zeta \notin C$.

Предложение II. Пусть S — спектральное множество оператора T, а ζ — граничная точка S такая, что существует последовательность окружностей $\Gamma_n = \{\lambda : |\lambda - \lambda_n| < r_n\}$, лежащих в дополнении множества S и таких, что $r_n^{-1}|\lambda_n - \zeta| \to 1$. Тогда соотношение (1) выполняется.

Авторы доказывают также предложение III, являющееся обобщением предложений I и II. В. Э. Лянце

7868. Скрещенные произведения колец операторов. Судзуки (Crossed products of rings of operators. Suzuki Noboru), Tohoku Math. J., 1959, **11**, № 1, 113—124 (англ.)

Пусть H — гильбертово пространство, M — такой фактор конечного класса, что $C = 1$; G — некоторая дискретная группа его $*$-автоморфизмов: $a \to a^\sigma$, $a \in M$, $\sigma \in G$; $U(\sigma \to u_\sigma)$ — такое точное унитарное представление G в H, что $a^\sigma = u_\sigma^* \cdot a \cdot u_\sigma$, $a \in M$. Рассматривается пространство $l_2(G)$, базис в нем ε_σ и операторы $w_\sigma(\varepsilon_\tau) = \varepsilon_{\sigma\tau}$. Пусть $H = H \otimes l_2(G)$, $U_\sigma = u_\sigma \otimes w_\sigma$, (M, G, U) — кольцо операторов в H, порождаемое конечными суммами $\sum_{\alpha \in G} A_\alpha U_\alpha$, $A_\alpha \in M \otimes I$.

Доказывается что все кольца (M, G, U), полученные разными представлениями U, пространственно изоморфны (поэтому будем писать просто (M, G)), что они конечного класса и что $C = 1$; и, наконец, что каждый $A \in (M, G)$ обладает разложением $A = \sum_{\alpha \in G} A_\alpha U_\alpha$ в смысле метрики $[[A]] = \|A\varphi\|$, где φ — циклический след-вектор для (M, G) и $(M, G)'$ (теорема 1). Кроме того, если M класса II и если (M, G) — фактор, то (M, G) класса II (теорема 4). Доказывается, что (M, G) является фактором в двух следующих случаях: 1) G — коммутативна, и каждый инвариантный оператор в M является скалярным (лемма 6); 2) каждый автоморфизм из G, кроме единицы, является внешним (теорема 3).

Наконец указывается один случай, когда кольцо A конечного класса можно представить в виде $A = (B, \xi)$, где B — подфактор кольца A, а ξ — некоторая группа унитарных операторов $U_\alpha \in A$, сохраняющих B (теорема 5).

A. Guichardet

7869. Продолжения чистых состояний Кейдисон, Сингер (Extensions of pure states. Kadison Richard V., Singer I. M.), Amer. J. Math., 1959, **81**, № 2, 383—400 (англ.)

Пусть B — кольцо всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H, а a — его максимальное коммутативное, равномерно замкнутое, самосопряженное подкольцо. Известно, что каждый неразложимый положительный функционал (чистое состояние, в терминологии авторов) на a можно продолжить до неразложимого положительного функционала на B.

Ставится задача: является ли такое продолжение единственным? (Ответ положительный для неразложимых положительных функционалов, имеющих вид: $A \to (Ax, x)$, $x \in H$). Применяя операцию фон Нёймана перехода к диагональной части, авторы доказывают, что:

1) Если a непрерывно (т. е. не содержит минимальных операторов проектирования), то ответ отрицателен (теорема 2).

2) Если a дискретно (т. е. a — кольцо всех диагональных в некотором базисе операторов), то все продолжения любого неразложимого положительного функционала совпадают на каждом операторе перестановки базисных векторов (теорема 3). A. Guichardet

7870. Аналог теоремы Лиувилля для симметрических пространств с отрицательной кривизной. Березин Ф. А., Докл. АН СССР, 1959, **125**, № 6, 1187—1189

Рассматривается симметрическое пространство $E = G/K$ с полупростой группой движений (вещественной или комплексной). Стационарная подгруппа K — максимальная компактная подгруппа группы G. Пусть $\Delta_2, \ldots, \Delta_k$ — образующие в кольце операторов Лапласа на E, выбранные так, чтобы для $f = \text{const}$ выполнялось равенство $\Delta_i f = 0$. Автор называет гармонической функцию u, удовлетворяющую соотношению $\Delta_2 u = 0$. Если, кроме того, $\Delta_i u = 0$ для всех i, то функция называется полигармонической. Доказывается теорема: Всякая ограниченная гармоническая функция на E является полигармонической. Для доказательства используется ранее полученный автором и И. М. Гельфандом критерий полигармоничности (РЖМат, 1960, 67 6): функция является полигармонической тогда и только тогда, когда среднее этой функции по любой групповой сфере с центром в точке x равно значению функции в точке x. Отсюда вытекает, что достаточно доказать следующее утверждение: ограниченная гармоническая функция, инвариантная относительно стационарной подгруппы K, является константой. К искомой функции применяется преобразование Фурье (разложение по зональным сферическим функциям). Требуемый результат следует из того, что единственной ограниченной зональной функ-

цией, удовлетворяющей условию $\Delta_z f = 0$, является константа. Используются явные выражения для зональных сферических функций и собственных значений радиальной части оператора, найденные ранее автором (РЖМат, 1959, 1699). А. А. Кириллов

7871. **Аффинные полугруппы. Коэн, Коллинс** (Affine semigroups. Cohen Haskell, Collins H. S.), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **93**, № 1, 97—113 (англ.)

Пусть в хаусдорфовом топологическом векторном пространстве $\mathfrak{X}$ выделено выпуклое подмножество S, представляющее собой полугруппу относительно некоторой (определенной лишь в S) операции умножения. Если умножение в S обладает тем свойством, что

$$y\cdot\sum\alpha_i x_i = \sum \alpha_i (y\cdot x_i),\quad \Big(\sum\alpha_i x_i\Big)\cdot y = \sum\alpha_i (x_i\cdot y) \quad (1)$$

$$(\alpha_i > 0,\ \sum\alpha_i = 1,\ x_i, y\in S),$$

то S называется аффинной полугруппой (а. п.). Если к тому же в наведенной из $\mathfrak{X}$ топологии полугруппа S является топологической, то она называется топологической а. п. В статье исследуется структура а. п.; особое внимание уделено конечномерным полугруппам. В частности, установлено, что если S — n-мерная а. п., $M(S)$ — линейное многообразие, порожденное S (т. е. множество элементов вида $\sum\alpha_i x_i$, где $x_i\in S$, $\sum\alpha_i = 1$), то умножение может быть однозначно распространено с S на $M(S)$ с сохранением свойства (1). Каждая конечномерная а. п. S с левой или правой единицей эквивалентна некоторой полугруппе аффинных преобразований многообразия $M(S)$. Если, кроме того, S обладает левым или правым нулевым элементом, то S допускает матричное представление.

Для одно- и двумерного случая выяснен возможный характер операции умножения. Так, если S — одномерная а. п., то $M(S)$ эквивалентно вещественной оси с одной из следующих операций умножения: а) $x\cdot y = xy$; б) $x\cdot y \equiv 0$; в) $x\cdot y \equiv x+y$; г) $x\cdot y = x$; д) $x\cdot y = y$. Если S — компактная одномерная топологическая а. п., то S эквивалентна либо интервалу $[\alpha, \beta] = [-1, 1]$ с умножением а), либо интервалу $[0, 1]$ с умножением б), г) или д).

Далее исследуется структура ядра а. п., т. е. ее минимального двустороннего идеала. Установлено, что если $\dim S < \infty$, то ядро является выпуклым множеством. То же верно при $\dim S = 3$, если S обладает единичным элементом. Приведены примеры, показывающие, что оба результата не допускают распространения на случай бо́льших размерностей. М. З. Соломяк

7872. **Полугруппы мер относительно операции свертывания. Гликсберг** (Convolution semigroups of measures. Glicksberg Irving), Pacif. J. Math., 1959, **9**, № 1, 51—67 (англ.)

Пусть S — компактная топологическая полугруппа, $C(S)$ — банахово пространство непрерывных комплексно-значных функций на S, $\widetilde{S}$ — единичный шар сопряженного пространства $C(S)^*$, $\widetilde{S}$ — подмножество $C(S)^*$, элементами которого являются все нормированные неотрицательные регулярные борелевские меры на S. Произведением мер μ, $\nu\in C(S)^*$ называется мера $\mu\nu$, определяемая соотношением

$$\int f(x)\,\mu\nu(dx) = \iint f(xy)\,\mu(dx)\,\nu(dy).$$

При таком определении умножения в топологии слабой сходимости функционалов из $C(S)^*$ множества $\widetilde{S}$ и $\widetilde{\widetilde{S}}$ представляют собой компактные полугруппы. При некоторых предположениях относительно S исследуется структура подгрупп в $\widetilde{S}$ и $\widetilde{\widetilde{S}}$. Приведем результат, касающийся $\widetilde{S}$. Пусть S — группа или абелева полугруппа, Γ — подгруппа $\widetilde{S}$, η — единичный элемент группы Γ; G — носитель Γ, g — носитель η. Тогда G — подгруппа S, g — ее нормальный делитель и Γ — множество G-сдвигов меры Хара на g, т. е. множество мер вида μ_y:

$$\int_S f(x)\,\mu_y(dx) = \int_g f(xy)\,\eta(dx) \quad (y\in G).$$

При этом носителем множества $E\subseteq\widetilde{S}$ называется замыкание объединения носителей всех $\mu\in E$.

М. З. Соломяк

7873. **Полугруппы нормальных операторов в гильбертовом пространстве. Курепа** (Semigroups of normal transformations in Hilbert space. Kurepa Svetozar), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1958, **13**, № 4, 257—266 (англ.; рез. сербо-хорв.)

Пусть G_+ — множество всех двоично-рациональных чисел $r > 0$. Изучаются полугруппы $N(r)$ ($r\in G_+$) нормальных операторов в гильбертовом пространстве R. Предполагается, что пересечение областей определения всех операторов $N(r)$ плотно в R, а также, что 0 не является собственным значением ни одного из $N(r)$. Доказано, что при этих условиях полугруппа допускает представление

$$N(r) = U(r)\cdot\exp(rA),$$

где $U(r)$ — полугруппа унитарных операторов, а A — перестановочный с ней самосопряженный оператор. Если, кроме того,

$$\lim_{n\to\infty}\| N(2^{-n}) - E\| = 0, \quad (1)$$

то $N(r) = \exp(rN)$, где N — нормальный оператор.

Аналогичные результаты получены для полугрупп $N(t)$, где $t\in[0, \infty)$. При этом условие (1) заменяется требованием слабой непрерывности полугруппы $N(t)$.

М. З. Соломяк

7874. **Заметка о полугруппах операторов сжатия. Миядэра** (A note on contraction semi-groups of operators. Miyadera Isao), Tôhoku Math. J., 1959, **11**, № 1, 98—105 (англ.)

Результаты автора примыкают к результатам Рейтера (РЖМат, 1957, 4954). Семейство операторов сжатия (переноса) $T(\xi)$ ($\xi\geqslant 0$) в абстрактном (L)-пространстве X называется полугруппой сжатий (переносов), если $T(0) = I$, $T(\xi+\eta) = T(\xi)\,T(\eta)$ ($\xi\geqslant 0$, $\eta\geqslant 0$) и $\|T_t x - x\| \to 0$ при $t\to +0$ для любого $x\in X$. Полугруппа сжатий $\sum' = \{T'(\xi)\}$ называется доминирующей над полугруппой сжатий $\sum = \{T(\xi)\}$, если $T'(\xi)\,x \geqslant T(\xi)x$ при всех $x\geqslant 0$ и $\xi\geqslant 0$.

Основные результаты:

I. Пусть A — производящий оператор полугруппы сжатий Σ и B — линейный оператор с областью $D(B)\supseteq D(A)$. Тогда $A' = A + B$ будет производящим оператором полугруппы сжатий (переносов) Σ', доминирующей над Σ, тогда и только тогда, когда удовлетворяются условия: 1) $Bx\geqslant 0$ для $x\geqslant 0$ из $D(A)$; 2) $(e, Bx) \leqslant -(e, Ax)$ $(= -(e, Ax))$ для $x\geqslant 0$ из $D(A)$, где $(e, x) = \|x^+\| - \|x^-\|$; 3) любое одно из следующих условий: а) $(I - BR(\lambda; A))[X] = X$ для любого $\lambda > 0$, в) $\sum\|[BR(\lambda; A)]^n y\| < \infty$ для любого $\lambda > 0$ и $y > 0$.

II. Пусть A — производящий оператор полугруппы сжатий Σ. Тогда оператор A_c, определенный формулой $A_c x = Ax - (e, Ax)\,c$, $x\in D(A)$ ($c > 0$ и $\|c\| < 1$), яв-

ляется производящим полугруппы сжатий Σ_c, доминирующей над Σ. Также $\Sigma_{c_1} \neq \Sigma_{c_2}$, если $c_1 \neq c_2$; и Σ_c является полугруппой переносов тогда и только тогда, когда $\| c \| = 1$. В случае пространства (l) предполагается, что Σ равномерно непрерывна при $\xi = 0$, и доказывается следующее предложение.

III. Пусть A — производящий оператор полугруппы сжатий (но не переносов) и пусть $E^- \neq E^+ - E^+$. Тогда существует полугруппа сжатий, доминирующая над Σ и отличная от типа Σ_c предложения II.

Приводится пример полугруппы сжатий Σ такой, что $E = E^+ - E^+$. Т. А. Заманов

7875. Почти периодические компактификации. Леу, Гликсберг (Almost periodic compactifications. Leeuw Karel de, Glicksberg Irving), Bull. Amer. Math. Soc., 1959, 65, № 3, 134—139 (англ.)

Пусть S — полугруппа линейных операторов в банаховом пространстве B, $\| T \| \leqslant K$ при $T \in S$. Если каждая орбита $\{Tx\}$ условно компактна в B, то полугруппа S называется почти периодической (п. п.). Если условная компактность имеет место в слабой топологии, то S — слабо п. п. полугруппа. Пусть $C(S)$ — банахово пространство комплекснозначных ограниченных непрерывных функций, заданных на S; $C_B(S)$ — линейная подалгебра $C(S)$, замкнутая относительно комплексного сопряжения, содержащая функцию $\equiv 1$ и все функции вида $f(T) = (Tx, y)$ $(x \in B, y \in B^*)$. Получены условия, при которых $C_B(S)$ является правильным (в подлиннике amenable; см. РЖМат, 1960, 5526) подпространством. Эти условия выполнены, например, если $\| T \| \leqslant 1$ для $T \in S$ и пространства B и B^* строго выпуклы. Рассмотрены также некоторые смежные вопросы.

М. З. Соломяк

7876. Теорема Рунге об аппроксимации и теория аналитических функционалов. Тильман (Der Rungesche Approximationssatz und die Theorie der analytischen Funktionale. Tillmann Heinz Günther), Math. Ann., 1959. 137, № 1, 78—82 (нем.)

Бенке и Штейн (РЖМат, 1956, 374) доказали, что при некоторых условиях множество всех функций, голоморфных в области D', плотно в множестве всех функций, голоморфных в подобласти $D \subset D'$ (в смысле равномерной сходимости на каждом компакте, лежащем в D). Здесь D и D' — области в n-мерном комплексном пространстве или на римановой поверхности.

Автор показал (РЖМат, 1958, 8015), что из этого результата Бенке и Штейна, являющегося обобщением известной теоремы Рунге, следует теорема о единственности аналитического продолжения аналитических функционалов. Утверждается, что теорема единственности для аналитических функционалов справедлива для любого комплексного пространства X, метрика которого такова, что теорема Бенке — Штейна верна для любой голоморфно-выпуклой области (Определение комплексного пространства см. РЖМат, 1956, 7307). Это утверждение можно обратить: если в комплексном пространстве X с метрикой E справедлива теорема единственности для всех линейных аналитических функционалов, то теорема Бенке — Штейна справедлива для любой голоморфно-выпуклой области в X (с той же метрикой E). При доказательстве используется теорема Хана — Банаха. Отмечается, что теорема единственности для любых аналитических функционалов верна, если она верна для всех линейных аналитических функционалов.

В. П. Хавин

7877. О вычислении индекса неподвижной точки вполне непрерывного векторного поля. Меламед В. Б., Докл. АН СССР, 1959, 126, № 3, 501—504

Вычисление индекса неподвижной точки x_0 вполне непрерывного векторного поля

$$x - F(x), \qquad (1)$$

рассматриваемого в банаховом пространстве E, в случае, когда производная Фреше $F'(x_0)$ имеет 1 собственным числом, наталкивается на существенные трудности.

Предположим, что $x_0 = 0$. Каждый элемент $x \in E$ можно однозначно представить в виде $x = x_1 + x_2$, $x_i \in E_i$ $(i = 1, 2)$, где E_1 есть инвариантное подпространство оператора $F'(0)$, отвечающее собственному числу $=1$ (в дальнейшем предполагается, что E_1 состоит лишь из собственных векторов), а E_2 — инвариантное подпространство $F'(0)$, в котором 1 не является собственным числом. Через P обозначим оператор проектирования на E_1: $Px = x_1$.

Пусть вполне непрерывные операторы $A_k(x)$ и $o(x)$ удовлетворяют условиям: $A_k(tx) = t^k A_k(x)$ $(k \geqslant 2$ — целое) и $\| A_k(x) - A_k(y) \| \leqslant c_k \max(\| x \|^{k-1}, \| y \|^{k-1}) \times \| x - y \|$; $o(x) = o(\| x \|^m)$ при $\| x \| \to 0$.

Рассмотрим операторы

$$F(x) = F'(0)x + A_m(x) + o(x), \qquad (2)$$

$$F(x) = F'(0)x + A_m(x) + R(x) + o(x). \qquad (3)$$

М. А. Красносельским (РЖМат, 1957, 3310 К) доказана следующая теорема: Если $PA_m(x) \neq 0$ при $x \in E_1$, то точка $x_0 = 0$ является изолированной точкой векторного поля (1) — (2) и ее индекс равен $(-1)^\beta \gamma$, где β — сумма кратностей собственных чисел оператора $F'(0)$, бо́льших 1, а γ — вращение векторного поля $-PA_m(x)$ на единичной сфере E_1.

Автор показывает (теорема 1), что этот результат справедлив и для возмущенного векторного поля (1) — (3), если $R(x) = A_n(x) + \ldots + A_{m-1}(x)$, $PR(x) = 0$ для $x \in E_1$ и $n > (m+1)/2$.

Теорема 1 находит применение при изучении, например, точек бифуркации оператора $F(x)$ (теорема 2). Метод, примененный автором в теореме 1, позволяет также вычислять вращение векторных полей, асимптотически линейных на бесконечности (теорема 3), что приводит к достаточным условиям существования неподвижной точки у оператора $F(x)$ (теорема 1), а также и того, что 1 является асимптотической точкой бифуркации оператора $F(x)$ (теорема 5). А. И. Перов

7878. Оператор Немыцкого из C в L^M. Шрагин И. В., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1959, 77, 161—168

Пусть F — ограниченное замкнутое множество n-мерного евклидова пространства, C — пространство непрерывных на F функций, $L^M = L^M(F)$ — обобщенное по Занену пространство Орлича и L^χ_M — подпространство пространства L^M (реф. 7879). Пусть $g(u, x)$ — функция, порождающая оператор Немыцкого h, $hu = g(u(x), x)$, и $a_\alpha(x) = \sup_{|u| < \alpha} |g(u, x)|$, $x \in F$.

Доказываются следующие предложения: 1. Для того чтобы h действовал из C в L^M (из C в L^χ_M), необходимо и достаточно, чтобы $a_\alpha(x) \in L^M$ $(a_\alpha(x) \in L^\chi_M)$ при любом $\alpha \geqslant 0$. 2. Если h действует из C в L^M, то он действует из L^∞ в L^M и ограничен из C в L^M. 3. Пусть $P(u)$ — неотрицательная неубывающая функция, определенная на $[0, \infty]$, и L_P — класс всех вещественных функций $u(x)$, для которых $\int_F P(|u(x)|)\,dx < \infty$. Тогда, для того чтобы h действовал из C в L_P, необходимо и достаточно, чтобы $a_\alpha(x) \in L_P$ при любом $\alpha \geqslant 0$.

4. Если h действует из C в L^{χ}_{M}, то он непрерывен и слабо непрерывен. 5. Для того чтобы h отображал C в себя, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (1): $g(u, x)$ непрерывна по совокупности аргументов в каждой точке топологического произведения $(-\infty, +\infty) \times F'$, где F' — производное множество множества F. 6. Для того чтобы h был ограничен из C в C, необходимо и достаточно, чтобы $g(u, x)$ была ограничена на $[-\alpha, +\alpha] \times (F \setminus F')$ при любом $\alpha \geqslant 0$ и чтобы выполнялось условие (1). 7. Для того чтобы h был непрерывен или слабо непрерывен из C в C, необходимо и достаточно, чтобы $g(u, x)$ была непрерывна на $-\infty, +\infty) \times F$. М. М. Вайнберг

7879. О слабой непрерывности оператора Немыцкого в обобщенных пространствах Орлича. Шрагин И. В., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1959, 77, 169—179

Пусть B — множество конечной или бесконечной меры в конечномерном евклидовом пространстве, а $L^{M} = L^{M}(B)$ и $L^{M_1} = L^{M_1}(B)$ — обобщенные по Занену пространства Орлича. Предполагается, что функция Юнга $M(u)$ конечна при всяком конечном u. Пусть L_M — класс вещественных функций $u(x)$, для которых $\int_B M(|u(x)|)dx$ конечен, и L^{χ}_{M} — подпространство пространства L^{M_1}, состоящее из функций $u(x)$, для которых

$$\int_B M(k|u(x)|)\,dx < \infty$$

при любом $k > 0$. Изучается линейный оператор H, $Hu = b(x)u$, где $b(x)$ — вещественная функция, измеримая на B, и оператор Немыцкого h, $hu = g(u(x), x)$.

Лемма. Для того чтобы H действовал из L^{χ}_{M} в LM_1 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие (1): при некоторых положительных c и λ $f_c(\lambda|b(x)|) \in L_M$, где

$$f_c(v) = \sup\{u : 0 \leqslant u < \infty,\ M_1(uv) \geqslant cM(u)\},$$
$$0 \leqslant v \leqslant \infty.$$

Доказательство использует специальную конструкцию. Из данной леммы вытекает, что если H действует из L^{χ}_{M} в L^{M_1}, то он действует и ограничен из L^{M} в L^{M_1}.

Теорема. Для слабой непрерывности оператора h из L^{χ}_{M} в L^{M_1}, необходимо и достаточно, чтобы почти при всех $x \in B$ $g(u, x) = a(x) + b(x)u$, $-\infty < u < +\infty$, где $a(x) \in L^{M_1}$ и $b(x)$ удовлетворяет условию (1).

Отмечается, что данный критерий слабой непрерывности оператора Немыцкого сохраняется и в более общих функциональных пространствах. М. М. Вайнберг

7880. Об одном нелинейном операторе в пространствах Орлича. Шрагин И. В., Успехи матем. наук, 1959, 14, № 4, 233

Изучается оператор Немыцкого h, $hu = g(u(x), x)$, в обобщенных по Занену пространствах Орлича L^{M} (реф. 7879). Пусть $d_M = \sup\{u : M(u) < \infty\}$ и L^{α}_{M} — класс измеримых функций $u(x)$, для которых

$$\int_B M(\alpha|u(x)|)\,dx < \infty, \quad \alpha > 0.$$

Множество $\bigcup_{\alpha>0} L^{\alpha}_{M} = L^{f}_{M}$ является сепарабельным подпространством пространства L^{M}. Сформулированы необходимые и достаточные условия действия h из L^{α}_{M} в L^{β}_{M} и следующие предложения: 1. Если h действует из L^{α}_{M} в L^{M_1}, то он действует из L^{α}_{M} в некоторый класс $L^{\beta}_{M_1}$. 2. Если $d_M = \infty$ и h действует из L^{f}_{M} в $L^{\beta}_{M_1}$, то он действует и из некоторого класса L^{α}_{M} в $L^{\beta}_{M_1}$. 3. Если $d_M = \infty$ и h действует из L^{f}_{M} в L^{M}_{1}, то он действует из некоторого класса L^{α}_{M} в некоторый класс $L^{\beta}_{M_1}$. 4. Если h действует из L^{α}_{M} в L^{M_1}, то он ограничен на любом шаре $\{u(x) : \|u - u_0\| \leqslant a\}$, где $u_0(x) \in L^{f}_{M}$ и $a < \frac{1}{\alpha}$. При этом, если $u_0(x) = 0$, то можно положить $a = \frac{1}{\alpha}$. 5. Если h действует из L^{α}_{M} в L^{M_1}, то он слабо непрерывен на любом множестве $D = \left\{u(x) : \|u\|_M \leqslant \frac{1}{\alpha}\right\}$, компактном в смысле сходимости почти всюду. 6. Если h действует из L^{M} в L^{M_1} и слабо непрерывен на L^{M}, то почти при каждом $x \in B$ $g(u, x) = a(x) + b(x)u$, $-\infty < u < \infty$, где $a(x) \in L^{M_1}$, а функция $b(x)$ такова, что оператор H, $Hu = b(x)u(x)$ действует из $L^{f}_{N_1}$ в L^{f}_{N}. В предложениях 5 и 6 предполагается, что $d_N = d_{N_1} = \infty$, где N и M (соответственно N_1 и M_1) — взаимно дополнительные функции в смысле Юнга, причем слабая сходимость в L^{M} понимается в смысле слабой сходимости функционалов, определенных на L^{f}_{N}. Сформулирован принцип существования неподвижной точки преобразования, применяющийся в работе к доказательству существования решений уравнения Гаммерштейна в L^{M} без предположения о полной непрерывности оператора Гаммерштейна. М. М. Вайнберг

7881. Теорема Коши в банаховых пространствах. Мибу (Cauchy's theorem in Banach spaces. Mibu Yoshimichi), J. Math. Soc. Japan, 1959, **11**, № 1, 76—82 (англ.)

Пусть X, Y, Z — три комплексных пространства Банаха. Прдположим, что каждой паре (x, y) $(x \in X, y \in Y)$ соответствует элемент $x \circ y \in Z$ так, что отображение $(x, y) \to x \circ y$ из $X \times Y$ в Z билинейно, и $\|x \circ y\| \leqslant \|x\| \|y\|$ при любых $x \in X$ и $y \in Y$. Пусть Γ — спрямляемая кривая в X, а f — непрерывная функция со значениями в Y, заданная на Γ. Естественным образом определяется интеграл $\int_\Gamma f(x) \circ dx$.

Теорема. Пусть f — функция со значениями в Y, заданная в открытом выпуклом множестве $D \subset X$. Пусть f дифференцируема по Фреше в D, причем $\delta f(x, h) \circ k = \delta f(x, k) \circ h$ при любых $x \in D$ и $h, k \in X$ (здесь $\delta f(x, h) = \lim_{\lambda \to 0} [f(x + \lambda h) - f(x)]/\lambda$, λ — скаляр). Тогда $\int_\Gamma f(x) \circ dx = 0$ для любой спрямляемой замкнутой кривой $\Gamma \subset D$.

Из этой теоремы следует аналог интегральной теоремы Коши в банаховых алгебрах, найденный Лорхом (Lorch E. R., Trans. Amer. Math. Soc., 1943, **54**, 414—425). В. П. Хавин

7882. Об интегральном операторе Урысона. Пахале (Über den Urysohnschen Integraloperator. Pachale Helmut), Arch. Math., 1959, **10**, № 2-3, 134—136 (нем.)

Пусть B — компактное множество n-мерного евклидова пространства. На B рассматривается семейство функций $\varphi(s)$, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем λ $(0 < \lambda < 1)$, и вводится банахово пространство E, в котором $\|\varphi\| = \max_{s \in B} |\varphi(s)| + \sup_{s_1 \neq s_2} |\varphi(s_2) - \varphi(s_1)|/\rho^{\lambda}(s_1, s_2)$, где ρ — евклидово расстояние в B. В пространстве E

рассматривается $A\varphi=\int_B K(s,t,\varphi(t))\,dt$ и устанавливаются достаточные условия того, чтобы A был вполне непрерывным оператором из E в E. М. М. Вайнберг

7883. Нелинейные операторы и уравнения Гаммерштейна в пространствах Орлича. Вайнберг М. М., Шрагин И. В., Докл. АН СССР, 1959, 128, № 1, 9—12

Устанавливаются теоремы существования и единственности решений нелинейного уравнения

$$u(x)=\int_B K(x,y)\,g(u(y),y)\,dy, \qquad (1)$$

а также теоремы существования собственных функций оператора Гаммерштейна в пространствах Орлича, причем не предполагается полной непрерывности линейного оператора $Av=\int_B K(x,y)\,v(y)\,dy$. Пространства Орлича рассматриваются в более общей трактовке, принадлежащей Занену. Пусть $M(u)=\int_0^u \varphi(\xi)d\xi$ и $N(v)=\int_0^v \psi(\eta)d\eta$ — взаимно дополнительные функции Юнга. Пусть L^M есть совокупность всех измеримых на множестве B конечномерного пространства функций $u(x)$, для которых

$$\int_B M[k|u(x)|]\,dx<\infty \qquad (2)$$

при каком-либо $k>0$, своем для каждой $u(x)\in L^M$. Функции $u(x)$, для которых (2) выполняется при любом $k>0$, образуют подпространство $L_M^f\subset L^M$. Предполагается, что $M(u)$ конечна при всех u, $N(v)$ удовлетворяет Δ_2-условию, $L^M\subset L^2$, оператор A действует из L^N в L_M^f и вещественная функция $g(u,x)$, $u\in(-\infty,\infty)$, $x\in B$, непрерывная по u почти при каждом x и измеримая по x при каждом u, порождает оператор Немыцкого $hu=g(u(x),x)$, действующий из L_M^f в L^N. Пусть A_0 есть сужение оператора A в пространстве L^2.

Теорема 1. Пусть A_0 — самосопряженный положительный оператор, а функция $g(u,x)$ — не возрастающая по u почти при каждом фиксированном $x\in B$, причем $2\int_0^u g(v,x)\,dv\leqslant au^2+b(x)|u|^\alpha+c(x)$, где $0\leqslant a\|A_0\|<1$, $0<\alpha<2$, $0\leqslant b(x)\in L^\gamma$, $\gamma=2(2-\alpha)^{-1}$, $0\leqslant c(x)\in L$. Тогда уравнение (1) имеет в L_M^f единственное решение $u_0(x)$, представимое в виде $u_0=A_0^{1/2}v_0$, где $v_0\in H=\overline{A^{1/2}(L^N)}$.

Пусть оператор A_0 квазиотрицателен и m обозначает наименьшее положительное собственное значение оператора A_0.

Теорема 2. Если функция $g(u,x)$ является неубывающей по u почти при каждом фиксированном $x\in B$, причем $\int_0^u g(v,x)\,dv\geqslant\frac{1}{m}u^2+b(x)|u|^\alpha+c(x)$, где $0<\alpha<2$, $0\geqslant b(x)\in L^\gamma$, $\gamma=2(2-\alpha)^{-1}$, $0\geqslant c(x)\in L$, то уравнение (1) имеет решение, принадлежащее пространству L_M^f.

Теорема 3. Если почти при каждом $x\in B$ и произвольных $u,v\in(-\infty,\infty)$

$$[g(u+v,x)-g(u,x)]\,v\geqslant\frac{2}{m}v^2,$$

то уравнение (1) имеет в L_M^f единственное решение $u_0(x)$, представимое в виде $u_0=A_0^{1/2}v_0$ или $u_0=|A_0|^{1/2}\tilde{v}_0$, где $v,\tilde{v}_0\in H=\overline{A^{1/2}(L^N)}$.

Указана схема доказательства этих теорем вариационным методом. Приведены также три теоремы о собственных функциях оператора Гаммерштейна. Э. С. Цитлянадзе

7884. Об объеме понятия u_0-вогнутого оператора. Красносельский М. А., Ладыженский Л. А., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 5, 112—121

В ряде работ М. А. Красносельского и его учеников (см., например, РЖМат, 1955, 3839; 1956, 8859; 1957, 3310; 1958, 7924) была построена теория абстрактных операторных уравнений с положительными операторами специального типа, из которой, в частности, вытекали предложения П. С. Урысона о существовании ненулевых положительных решений у нелинейного интегрального уравнения с оператором

$$A\varphi(x)=\int_F G[x,y,\varphi(y)]\,dy, \qquad (1)$$

где F — ограниченное, замкнутое множество конечномерного евклидова пространства, $G(x,y,0)\equiv 0$.

В реферируемой статье устанавливаются новые предложения об операторе (1). В первой части статьи доказываются две теоремы об условиях u_0-вогнутости оператора (1) в пространстве C непрерывных на F функций, или пространстве $L_p(F)$, относительно конуса неотрицательных функций. Эти условия являются менее ограничительными, чем условия П. С. Урысона. Во второй части статьи рассматриваются новые условия дифференцируемости оператора (1). Абстрактный оператор $A(A\theta=\theta)$, действующий в банаховом пространстве E с конусом K, называется дифференцируемым в точке θ по конусу K, если существует такой линейный оператор P, что

$$\lim_{\|\varphi\|\to 0}\frac{\|A\varphi-P\varphi\|}{\|\varphi\|}=0\quad(\varphi\in K).$$

Оператор A называется асимптотически линейным по конусу K, если существует такой линейный оператор Q, что

$$\lim_{\|\varphi\|\to\infty}\frac{\|A\varphi-Q\varphi\|}{\|\varphi\|}=0\quad(\varphi\in K).$$

Доказываются теоремы об условиях дифференцируемости в нуле и асимптотической линейности оператора (1) по конусу неотрицательных функций в пространствах C и L_p. Доказанные утверждения позволяют сформулировать новые теоремы о позитивном спектре оператора (1). Например,

Теорема 8. Пусть функция $G(x,y,u)$ непрерывна по u почти при всех $\{x,y\}\in F\times F$ и удовлетворяет условиям: а) функция $H(x,y,u)=\frac{1}{u}G(x,y,u)$ равномерно убывает при возрастании u; б) производная $G'_u(x,y,u)$ удовлетворяет неравенству $\int_F|G'_u(x,y,0)|^s\,dy\leqslant m<\infty$, где $s=\max\left\{p,\frac{p}{p-1}\right\}$; в) справедливо неравенство $H(x,y,u)\geqslant a>0$ $(x,y\in F,\ u>0)$. Тогда позитивный спектр оператора (1) образует интервал (α,β), где α и β — положительные собственные числа линейных интегральных операторов

$$P\varphi(x)=\int_F G'_u(x,y,0)\,\varphi(y)\,dy \quad\text{и}$$

$$Q\varphi(x)=\int_F \lim_{n\to\infty} H(x,y,n)\,\varphi(y)\,dy,$$

которым соответствуют положительные собственные функции. Каждой точке интервала (α, β) соответствует единственное положительное решение уравнения

$$\int_F G[x, y, \varphi(y)]\, dy = \lambda\varphi(x)$$

из L_p. Ненулевые решения убывают при возрастании λ.

Имеются опечатки. Я. Б. Рутицкий

7885. Задача о минимаксе функционала, зависящего от вещественного параметра. Буров В. Н., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И Герцена, 1958, 183, 129—141

Через $f(x, \lambda)$ обозначается непрерывный функционал точки $x \in Q$, Q — компакт, $\lambda \in (\alpha, \beta)$ — вещественный параметр. Предполагается, что непрерывная производная $\frac{df}{d\lambda}$ существует для любого $x \in Q$ и сохраняет знак или обращается в нуль тождественно на (α, β). Ставится задача отыскания

$$\min_{\lambda} \max_{x} |f(x, \lambda)|. \qquad (1)$$

Вводятся множества

$$Q^0 = E\left(x; \frac{df}{d\lambda} \equiv 0\right), \quad Q^-(\lambda) = E\left(x; \frac{d}{d\lambda}|f(x, \lambda)| < 0\right),$$

$$Q^+(\lambda) = (Q \setminus Q^0) \setminus Q^-(\lambda)$$

и величины

$$r_0 = \sup_{x \in Q^0} |f(x, \lambda)|, \quad r^{\pm}(\lambda) = \sup_{x \in Q^{\pm}(\lambda)} |f(x, \lambda)|.$$

Доказаны 6 теорем об условиях разрешимости и единственности решения задачи (1), например:

Теорема 1. Если $r^+(\lambda^*) = r^-(\lambda^*)$, то λ^* — решение задачи (1).

Теорема 4. $\lambda^* = \inf_{x_2 \in Q \setminus Q^0} \sup_{x_1 \in Q \setminus Q^0} \lambda(x_1, x_2)$,

если существует решение $\lambda(x_1, x_2)$ задачи (1) для любого $\{x_1, x_2\} \subset Q \setminus Q^0$.

Отмечается, что случай линейной зависимости $f(x, \lambda)$ от λ был рассмотрен в работах Е. Я. Ремеза.

В. Н. Никольский

7886. Асимптотическое значение приближения дифференцируемых функций линейными положительными операторами. Мамедов Р. Г., Докл. АН СССР, 1959, 128, № 3, 471—474

Пусть $L_n(f; x)$ — последовательность линейных положительных операторов и пусть

$$L_n(t^k; x) = x^k + \alpha_{n,k}(x), \quad k = 0, 1, 2.$$

Известно (РЖМат, 1953, 1148), что если $\alpha_{n,k}(x) \to 0$ при $n \to \infty$, $k = 0, 1, 2$, равномерно на $[a, b]$, то $\lim_{n\to\infty} \Delta_n(f; x) = \lim_{n\to\infty} \{L_n(f; x) - f(x)\} = 0$ равномерно для любой функции $f \in C[a, b]$.

В работе изучается скорость стремления величины Δ_n к нулю в зависимости от порядка малости величин $\alpha_{n,k}(x)$. Приведены без доказательства три теоремы аналогичного содержания, например:

Теорема 2. Пусть $f(x)$ ограничена и имеет в точке $t = x$ конечную вторую производную $f''(x)$. Если

$$L_n(1; x) = 1 + o\left(\frac{1}{\varphi_2(n)}\right), \quad L_n(t^k; x) = x^k + \frac{\psi_k(x)}{\varphi_k(n)} + o\left(\frac{1}{\varphi_2(n)}\right), \quad k = 1, 2,$$

где $\varphi_k(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, $\lim_{n\to\infty} [\varphi_2(n) : \varphi_1(n)] = 0$ и для некоторого $m > 1$ $\lim_{n\to\infty} \varphi_2(n) L_n\{(t - x)^{2m}; x\} = 0$, то $L_n(f; x) - f(x) = \frac{f''(x)\psi_2(x)}{2\varphi_2(n)} + o\left(\frac{1}{\varphi_2(n)}\right)$.

Автор показывает, что из этих теорем вытекают как частные случаи некоторые известные теоремы о порядке приближения функций линейными положительными операторами (например, теорема Е. В. Вороновской).

В. Н. Никольский

7887. О порядке приближения функций линейными положительными операторами. Мамедов Р. Г., Докл. АН СССР, 1959, 128, № 4, 674—676

Пусть $W_n(f; x)$ — последовательность линейных положительных операторов в $C[a, b]$. Положим

$$\Delta_n(f; x) = W_n(f; x) - f(x); \quad \lambda_n = \max_{a \le x \le b} W_n(|t - x|; x);$$

$\omega(\delta)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$.

Теорема 1. $|\Delta_n(f; x)| < 2\omega(\lambda_n)$ равномерно на $[a, b]$.

Теорема 2. Если $f(x) \in \mathrm{Lip}_M 1$, то $|\Delta_n(f; x)| < M\lambda_n$.

Аналогичные теоремы справедливы для операторов в $L_p(-u, u)$ вида $W_n(f; x) = \int_{-u}^{u} f(t) K_n(t - x)\, dt$. Здесь $L_p(-u, u)$ — пространство функций $2u$-периодических и интегрируемых в p-й степени $(p \ge 1)$, $0 < K_n(t) \in L_q(-u, u)$.

Теорема 5. Для любой функции $f(x, y) \in C(\sigma)$ (σ — область изменения переменных x, y) справедливо неравенство $|\Delta_n(f; x, y)| < 2\omega(\lambda_n)$, где

$$\omega(\delta) = \sup |f(M_1) - f(M_2)|, \quad \rho(M_1, M_2) < \delta,$$

$$\lambda_n = \max_{(\sigma)} W_n(\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}; x, y).$$

Эти теоремы применяются к некоторым конкретным линейным положительным операторам, причем получаются результаты А. О. Гельфонда, И. П. Натансона и др. об оценке порядка приближения через модуль непрерывности приближаемой функции.

В. Н. Никольский

7888. Полугруппа ограниченных голоморфных функций. Шмульян (Півгрупа обмежених голоморфних функцій. Шмульян Ю. Л.), Наук. зап. Житомирськ. держ. пед. ін-т, 1959, 9, 103—114 (укр.)

Работа состоит из трех параграфов, причем первые два содержат вспомогательный алгебраический аппарат. Абелеву полугруппу S назовем конусом, если S содержит нуль, из $x + y = 0$ $(x, y \in S)$ следует, что $x = y = 0$ и из $x + z = y + z$ $(x, y, z \in S)$ следует, что $x = y$. Полупорядочим конус S, положив $x \ge y$ для $x, y \in S$, если $x = y + z$ $(z \in S)$. Конус S назовем l-конусом, если для каждого множества, состоящего из двух точек $x, y \in S$, существует точная верхняя грань $x \vee y$. l-конус назовем полным, если в нем каждое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань. Естественным образом определяются подконусы данного конуса и понятие о распадении конуса S в прямую сумму подконусов S_1 и S_2.

Основные результаты содержатся в § 3. Пусть $R = \{\varphi(z)\}$ — совокупность функций ($\not\equiv 0$), голоморфных в единичном круге и удовлетворяющих условию $|\varphi(z)| < 1$. R превращается в конус относительно операции обычного умножения, если отождествить между собой функции, отличающиеся постоянным множителем, равным по модулю единице. Нулем конуса является функция $\varepsilon = \varepsilon(z) \equiv 1$. Частичное упорядочение $\varphi \ge \psi$ $(\varphi, \psi \in R)$, упомянутое выше, теперь означает, что $\varphi = \psi\chi$ $(\chi \in R)$. ψ называется в этом случае делителем φ. Через R_1 обозначим подмножество R, состоящее из функций ε и всевозможных функций Бляшке, а через R_2 — подмно-

жество R, состоящее из функций, не имеющих нулей в единичном круге. Конус R есть прямая сумма своих подконусов R_1 и R_2. Конусы R_1 и R_2 (а с ними и R) являются полными l-конусами (теоремы 5 и 6 и следствие). Делитель ψ функции $\varphi \in R$ назовем φ-допустимым, если почти в каждой точке e^{it} единичной окружности $|\psi(e^{it})|$ равен либо 1, либо $|\varphi(e^{it})|$. Важным для теории операторов является вопрос о том, когда совокупность $D[\varphi]$ φ-допустимых делителей образует цепь, т. е. упорядоченное множество. Ответ на него дает

Теорема 8. Для того чтобы $D[\varphi]$ было цепью, необходимо и достаточно, чтобы φ представлялась в одном из следующих видов: 1) $\varphi(z) = \exp\left(-k\dfrac{e^{ic}+z}{e^{ic}-z}\right)$ $(0 \leqslant c < 2\pi, k \geqslant 0)$; 2) $\varphi(z) = [b_\xi(z)]^n$ $(n \geqslant 0;\ |\xi| < 1)$, где $b_0(z) = z$, а $b_\xi(z) = \dfrac{\xi - z}{1 - \bar{\xi} z}\dfrac{|\xi|}{\xi}$ $(0 < |\xi| < 1)$ — элементарный множитель Бляшке. И. С. Иохвидов

7889. Размерность в некоторых общих структурах. Маэда (Dimension functions on certain general lattices. Maeda Shûichirô), J. Sci. Hiroshima Univ., 1955, A19, № 2, 211—237 (англ.)

В полной структуре, удовлетворяющей некоторым дополнительным условиям, вводится понятие размерности, являющееся обобщением неймановской относительной размерности подпространств гильбертова пространства (см., например, Наймарк М. А., РЖМат, 1957, 7189К).

Пусть L — полная структура, в которой постулируется существование отношения „$\perp$" такого, что:

$(1, \alpha)$ из $a \perp a$ следует $a = 0$;

$(1, \beta)$ из $a \perp b$ следует $b \perp a$;

$(1, \gamma)$ из $a \perp b$, $a_1 \leqslant a$ следует $a_1 \perp b$;

$(1, \delta)$ из $a \perp b$, $a' \mid b \perp c$ следует $a \perp b' \mid c$;

$(1, \varepsilon)$ если $a_\delta \uparrow a$, $a_\delta \perp b$ для всех δ, то $a \perp b$.

Подмножество $S \subset L$ называется независимой системой, что обозначается $(a;\ a \in S)\perp$, если

$$\vee(a;\ a \in S_1) \perp \vee(a;\ a \in S_2)$$

для любой пары дизъюнктных множеств $S_1, S_2 \subset S$. Если S — независимая система, то $\vee(a;\ a \in S)$ обозначается $\oplus(a,\ a \in S)$. Предполагается далее, что

$(1, \zeta)$ если $a \leqslant b$, то существует $c \in L$ такое, что $a \perp c$ и $b = a \oplus c$.

Пусть, кроме того, в L существует соотношение „$\sim$" такое, что:

$(2, \alpha)$ $\sim$ есть соотношение эквивалентности;

$(2, \beta)$ $a \sim 0$ означает, что $a = 0$;

$(2, \gamma)$ если $a \sim b_1 \oplus b_2$, то существует разложение $a = a_1 \oplus a_2$, где $a_1 \sim b_1$, $a_2 \sim b_2$;

$(2, \delta)$ если для $(a_\alpha;\ \alpha \in I)\perp$ и $(b_\alpha;\ \alpha \in I)\perp$ имеем $a_\alpha \sim b_\alpha$ при всех $\alpha \in I$, то $\oplus(a_\alpha;\ \alpha \in I) \sim \oplus(b_\alpha;\ \alpha \in I)$.

Пусть Z — центр L. Через Z_0 обозначается множество всех $z \in Z$ таких, что $a \sim b \leqslant z$ влечет $a \leqslant z$. Z_0 есть булева алгебра с 0 и 1, являющаяся замкнутой подструктурой L. Z_0 называется относительным центром L. В силу замкнутости Z_0 для любого $a \in L$ существует наименьший $z \in Z_0$ такой, что $a \leqslant z$. Этот элемент обозначается $e(a)$. Постулируется дополнительно:

$(2, \varepsilon)$ если $e(a) \mid e(b) \neq 0$, то существуют a_1 и b_1 такие, что $0 \neq a_1 \leqslant a$, $0 \neq b_1 \leqslant b$ и $a_1 \sim b_1$;

$(2, \zeta)$ если $a_1 \oplus a_2 = b_1 \oplus b_2$, $a_1 \sim a_2$, $b_1 \sim b_2$, то $a_1 \sim b_1$.

Пишется $a \succsim b$, если существует элемент $b_1 < b$ и такой, что $a \sim b_1$; и $a \succsim\succsim b$, если для любого $z \in Z_0$ имеем $z_1 a \succsim z_1 b$ или $z_1 a = z_1 b = 0$. Элемент a называется бесконечным, если $a \succsim a$, в противном случае конечным, и чисто бесконечным, если $a \neq 0$ и $a \succsim\succsim a$.

Теорема 2.1. Для любого $a \in L$ существуют $e^f(a)$, $e^l(a)$ со следующими свойствами: 1) $e^l(a) \oplus e^l(a) = e(a)$; 2) $e^f(a) \mid a$ конечно; 3) если $e^l(a) \neq 0$, то $e^l(a) \mid a$ чисто бесконечно. $e^f(a)$ и $e^l(a)$ определяются однозначно.

Элемент a называется минимальным, если $a \neq 0$ и из $x \succsim\succsim a$ следует $x = 0$. L называется структурой типа I, если она имеет минимальный элемент a такой, что $e(a) = 1$, — типа II, если она не имеет минимальных элементов, но имеет конечный элемент b такой, что $e(b) = 1$, — типа III, если все ненулевые элементы бесконечны. L называется типа $\mathrm{I}_{(1)}$ (соответственно $\mathrm{II}_{(1)}$), если она типа I (соответственно II) и конечна, т. е. 1 — конечный элемент, — типа $\mathrm{I}_{(\infty)}$ (соответственно $\mathrm{II}_{(\infty)}$), если она типа I (соответственно II) и чисто бесконечна.

Теорема 2.2. Имеет место однозначное разложение $1 = z_{\mathrm{I}} \oplus z_{\mathrm{II}} + z_{\mathrm{III}}$, где $z_{\mathrm{I}}, z_{\mathrm{II}}, z_{\mathrm{III}} \in Z_0$, и подструктуры $L(0, z_{\mathrm{I}})$, $L(0, z_{\mathrm{II}})$ и $L(0, z_{\mathrm{III}})$ соответственно типов I, II и III.

Из теорем 2.1. и 2.2 вытекает, что $1 = z_{\mathrm{I}}^{(1)} \oplus z_{\mathrm{I}}^{(\infty)} \oplus z_{\mathrm{II}}^{(1)} \oplus z_{\mathrm{II}}^{(\infty)} \oplus z_{\mathrm{III}}$, где $z_{\mathrm{I}}^{(1)} = z_{\mathrm{I}} \mid e^f(1)$ $z_{\mathrm{I}}^{(\infty)} = z_{\mathrm{I}} \mid e^l(1)$ и т. д. и, следовательно, L однозначно разложима на подструктуры типов $\mathrm{I}_{(1)}$, $\mathrm{I}_{(\infty)}$, $\mathrm{II}_{(1)}$, $\mathrm{II}_{(\infty)}$ и III.

Пусть Ω — вполне несвязный бикомпакт, базе которого изоморфна булева алгебра Z_0. Обозначим через Z множество всех неотрицательных непрерывных на Ω функций с естественным полуупорядочением.

Определение 5.1. Функция d, определенная на L со значениями в Z, называется размерностью на L, если она обладает следующими свойствами: 1) из $a \sim b$ следует $d(a) = d(b)$; 2) из $a \perp b$ следует $d(a \oplus b) = d(a) + d(b)$; 3) из $z \in Z_0$ следует $d(z\,a) = \varphi(z)\,d(a)$, где $\varphi(z)$ — характеристическая функция множества $E(z)$, являющегося образом элемента z в базе Ω; 4) из $a > 0$ следует $d(a) > 0$; 5) если a — конечный элемент, то $d(a)$ имеет конечные значения, исключая, может быть, множество первой категории.

Теорема 5.1 (существования). В L существует размерность d такая, что $d(h) = \varphi(z_1)$ и $d(z_{\mathrm{II}}^{(1)}) = \varphi(z_{\mathrm{II}}^{(1)})$, где h — минимальный элемент со свойством $e(h) = z_{\mathrm{I}}$.

Теорема 5.3 (единственности). Если d_1 и d_2 — две размерности на L, то существует функция $f \in Z$, $0 < f(\omega) < \infty$, за исключением, может быть, точек $\omega \in \Omega$, составляющих множество первой категории, такая, что $d_1(a) = f \cdot d_2(a)$ для всех $a \in L$. В. И. Соболев

7890. О фактор-линеалах в векторных структурах. Векслер А. И., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, 183, 107—127

Доказываются опубликованные ранее результаты автора (РЖМат, 195 , 4 17). Отмечается ряд простейших свойств факторов, которые затем используются при доказательстве. В заключение доказывается теорема 7, относящаяся к исследованию вопроса, когда фактор X/N K-пространства X по его нормальному подпространству N является тоже K-пространством.

Теорема. Пусть X есть K-пространство, N — его нормальное подпространство. Тогда для того, чтобы фактор X/N был K-пространством, необходимо и достаточно, чтобы он был архимедовым K-линеалом, в котором существует проекция любого элемента на любую компоненту (множество $X_0 \subset X$ автор называет компонентой K-линеала X, если существует такое множество $E \subset X$, что X_0 состоит из всех элементов $x \in X$, дизъюнктных E; проекция элемента на компоненту в K-линеале определяется так же, как и в книге Л. В. Канторовича, Б. З. Вулиха, А. Г. Пинскера „Функциональ-

ный анализ в полуупорядоченных пространствах" (М.—Л., Гостехиздат, 1950) для K-пространств).

Г. И. Домрачева

7891. Меры в упорядоченных топологических пространствах. Сымбоан (Măsuri în spații topologice ordonate. Sîmboan G.), Comun. Acad. RPR, 1959, **9**, № 3, 237—243 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматривается локально компактное топологическое пространство X, упорядоченное по отношению „$\leqslant$", удовлетворяющее аксиомам X_{I}: интервалы $I[a, b] = \{x; a \leqslant x \leqslant b, x \in X\}$ являются замкнутыми множествами, X_{II}: внутренние части $\mathring{I}[a, b]$ интервалов $I[a, b]$ образуют базис пространства, X_{III}: для любой пары x и y из X существуют $x \vee y$ и $x \wedge y$. Пусть на кольце R, порожденном внутренними частями $\mathring{I}[a, b]$, $a \in X$, $b \in X$, $a \leqslant b$, дана некоторая аддитивная мера Δ, удовлетворяющая условиям I: $\Delta(\mathring{I}[a, a]) = 0$; II: для каждого $\varepsilon > 0$ и любого ограниченного $I[a, b]$ существует $I[\alpha, \beta]$ такой, что $\mathring{I}[a, b] \supseteq I[\alpha, \beta] \supseteq \mathring{I}[\alpha, \beta]$ и $\Delta(\mathring{I}[a, b] - \mathring{I}[\alpha, \beta]) < \varepsilon$. Тогда существует мера на X, сужение которой на множествах $\mathring{I}[a, b]$ совпадает с мерой Δ. Имеются опечатки.

Примечание референта. В доказательстве предложения 2 используется неверное утверждение: Если $I = \bigcup_{\alpha,\beta} \mathring{I}[\alpha, \beta]$ и $\mathring{J}_1 \cap I = \varnothing$, то существует интервал $\mathring{I}[\alpha, \beta]$ такой, что $\mathring{I}[\alpha, \beta] \cap \mathring{J}_1 = \varnothing$.

К. М. Фишман

7892. Теория кратности для булевых алгебр проекций в банаховом пространстве. Бейд (A multiplicity theory for Boolean algebras of projections in Banach spaces. Bade William G.), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **92**, № 3, 508—530 (англ.)

Пусть $\mathfrak{B}$ — полная абстрактная булева алгебра (б. а.). Функция m, заданная на $\mathfrak{B}$, значениями которой являются кардинальные числа, называется функцией кратности, если

$$m(0) = 0, \tag{1}$$

$$m(\vee_\alpha E_\alpha) = \vee_\alpha m(E_\alpha), \ \{E_\alpha\} \subseteq \mathfrak{B}. \tag{2}$$

Число $m(E)$ называется кратностью E. Элемент $E \in \mathfrak{B}$ имеет, по определению, равномерную кратность n, если $m(F) = n$ для всех F, $0 \neq F \leqslant E$. Доказывается следующая

Теорема. Пусть m — функция кратности, заданная на полной абстрактной б. а. $\mathfrak{B}$. Существует единственное семейство $\{E_n\}$ непересекающихся элементов $\mathfrak{B}$ такое, что n пробегает кардинальные числа $\leqslant m(I)$ и 1) $I = \vee E_n$, 2) если $E_n \neq 0$, то E_n имеет равномерную кратность n.

Пусть теперь $\mathfrak{B}$ — полная б. а. (коммутирующих) проекторов в вещественном или комплексном банаховом пространстве $\mathfrak{X}$. Для каждого $x \in \mathfrak{X}$ проектор на $\Lambda = \{E: Ex = x\}$ называется несущим проектором элемента x. Проектор $E \in \mathfrak{B}$ удовлетворяет, по определению, условию счетной цепи, если всякое семейство непересекающихся элементов $\mathfrak{B}$, ограниченное проектором E, не более чем счетное. Через $\mathfrak{E}$ обозначается множество проекторов, удовлетворяющих этому условию. Доказывается, что $\mathfrak{E}$ совпадает с множеством всех проекторов, несущих некоторый элемент пространства $\mathfrak{X}$. Кратность $m(E)$ проектора $E \in \mathfrak{E}$ определяется как минимальная из мощностей множеств $A \subseteq \mathfrak{X}$, порождающих область значений оператора $E: E\mathfrak{X}$ — замыкание линейной оболочки $\{Fx: F \in \mathfrak{B}, x \in A\}$.

Так определенная на $\mathfrak{E}$ функция m единственным образом продолжается до функции кратности, заданной на всей б. а. $\mathfrak{B}$ проекторов в $\mathfrak{X}$, и к ней применима предыдущая теорема. Одновременно построена функция кратности на б. а. $\mathfrak{B}^*$ в $\mathfrak{X}^*$. Однако в противоположность работе Дьёдонне (РЖМат, 1957, 3296) сепарабельность пространства $\mathfrak{X}^*$ (а этим самым $\mathfrak{X}$) во всей построенной теории не предполагается.

Один из главных результатов работы состоит в том, что проектор $E \in \mathfrak{B}$ имеет конечную кратность n тогда и только тогда, когда сопряженный проектор $E^* \in \mathfrak{B}^*$ имеет эту же кратность n. Неизвестно, имеет ли это также место в случае проекторов бесконечной кратности.

В работе содержится приложение к теории спектральных (в смысле Данфорда) операторов скалярного типа. Это операторы, в комплексном банаховом пространстве, вида $Q = \int \lambda E(d\lambda)$, где $E(\cdot)$ — спектральная мера, заданная на борелевских множествах комплексной плоскости, счетно-аддитивна в смысле сильной сходимости операторов (см. монографию М. А. Наймарка по нормированным кольцам). Доказывается, что если спектральная мера $E(\cdot)$ не имеет среди своих значений проекторов бесконечной равномерной кратности, то существуют такое гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ и такой линейный оператор A, действующий из $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{H}$, замкнутый, с плотной областью определения, для которого A^{-1} существует и имеет плотную область определения, что $Q = A^{-1}NA$, где N — некоторый нормальный оператор в пространстве $\mathfrak{H}$. Более того, оператор A устанавливает взаимно однозначное соответствие между инвариантными относительно $E(\cdot)$ подпространствами пространства $\mathfrak{X}$ и инвариантными относительно разложения единицы оператора N подпространствами пространства $\mathfrak{H}$.

В. Э. Лянце

7893. Линейные множества с квазиинвариантной мерой. Судаков В. Н., Докл. АН СССР, 1959, **127**, № 3, 524—525

Известно, что группа трансляций бесконечномерного линейного пространства при широких условиях не допускает инвариантной σ-конечной меры. Реферируемая работа содержит аналогичные теоремы о "квазиинвариантных" мерах (квазиинвариантность меры означает инвариантность класса множеств меры нуль). Например, устанавливается, что в линейном топологическом пространстве, обладающем бесконечномерным множеством непрерывных линейных функционалов, не существует σ-конечной квазиинвариантной меры, определенной на всех полупространствах. Доказательства намечены.

В. А. Рохлин

7894. Изоморфизм харовских мер. Урбаник (On the isomorphism of Haar measures. Urbanik K.), Fundam. math., 1959, **46**, № 3, 277—284 (англ.)

Две σ-алгебры множеств $\boldsymbol{B}_1$ и $\boldsymbol{B}_2$ в пространстве с мерой μ называются взаимно независимыми, если для любых $A_1 \in \boldsymbol{B}_1$ и $A_2 \in \boldsymbol{B}_2$

$$\mu(A_1 \cap A_2) = \mu A_1 \, \mu A_2.$$

Меры μ и ν, заданные соответственно на σ-алгебрах $\boldsymbol{B}_\mu$ и $\boldsymbol{B}_\nu$, называются почти изоморфными (в советской литературе распространен термин: „изоморфными по модулю нуль"), если существует изоморфизм $h(\boldsymbol{B}_\mu \to \boldsymbol{B}_\nu)$ такой, что $\nu(h(A)) = \mu(A)$. Здесь $\boldsymbol{B}_\mu(\boldsymbol{B}_\nu)$ — фактор-алгебра алгебры $\boldsymbol{B}_\nu(\boldsymbol{B}_\nu)$ по классу множеств $\mu(\nu)$-меры нуль. С помощью аксиомы выбора доказывается следующая теорема, решающая задачу, поставленную Гартманом.

Теорема. Пусть G — бесконечная группа, J_1 и J_2 — две топологии, в каждой из которых G компактна, μ_1 и μ_2 — соответствующие харовские меры, заданные на σ-алгебрах бэровских множеств $\boldsymbol{B}_1$ и $\boldsymbol{B}_2$.

Существует топология J такая, что σ-алгебра B ее бэровских множеств включает B_1 и B_2 взаимно независимо относительно новой харовской меры μ, причем сужения меры μ на B_1 и B_2 почти изоморфны соответственно μ_1 и μ_2.

Опираясь на импликацию „если $2^{\aleph_\alpha}=2^{\aleph_\beta}$, то $\aleph_\alpha=\aleph_\beta$" (которая следует из обобщенной гипотезы континуума), автор доказывает утверждение: Харовские меры всех компактных топологий бесконечной группы G почти изоморфны. А. М. Вершик

7895. Одна интегральная формула. Фугледе (An integral formula. Fuglede Bent), Math. scand., 1958, 6, № 2, 207—212 (англ.)

Обозначения: A^k — множество линейных k-мерных многообразий α n-мерного евклидова пространства R^n; μ — инвариантная относительно группы вращений в R^n нормированная мера в A^k; ω_m — площадь поверхности m-мерной единичной сферы. Доказана формула

$$\int_{A^k} F(\alpha)\, d\mu(\alpha) = \frac{\omega_k}{\omega_n}\int_{R^n} |x|^{k-n} f(x)\, dx. \qquad (1)$$

Здесь $f(x)$ — бэровская функция в R^n и $F(\alpha)=\int_\alpha f(x)d\sigma(x)$, где $\sigma(x)$ — лебегова мера на многообразии $\alpha\in A^k$. Формула (1) может быть применена для вычисления функции $f(x)$ по значениям интегралов от $f(x)$ по всевозможным k-мерным подпространствам. М. З. Соломяк

7896. Другое доказательство леммы Хопфа. Шварц (Another proof of E. Hopf's ergodic lemma. Schwartz J. T.), Communs Pure and Appl. Math., 1959, 12, № 2, 399—401 (англ.)

Дается новое доказательство эргодической леммы Хопфа (Dunford N., Schwartz J. T., Linear Operators, Part I. Interscience, N.-Y. — London, 1958 — леммы VIII, 6.1 и VIII, 6.2) для дискретного случая:

Пусть $P=(p_{mn})_1^k$, $p_{mn}\geqslant 0$, $\sum_{m=1}^k p_{mn}\leqslant 1$ $(n=1, 2, \ldots, k)$. Тогда, если вектор v таков, что

$$v^*=\sup_{0<j<\infty}(v+Pv+\cdots+P^jv)_m\geqslant 0,$$

то $\sum_{n=1}^k v_n\geqslant 0$.

Общий случай получается предельным переходом. А. А. Нудельман

7897. Об индивидуальных эргодических теоремах Накано. Кристеску (Cu privire la teoremele ergodice individuale ale lui H. Nakano. Cristescou Romulus), An. Univ. «C. I. Parhon». Ser. ştiinţ. natur., 1958, № 20, 23—25 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор отмечает, что главная эргодическая теорема Накано (Nakano H., Ann. Math., 1948, 49, 538—556, теорема 3. 4) остается справедливой при замене нормы некоторым семейством полунорм (РЖМат, 1955, 3854), и указывает некоторые предложения более общего характера, на которые опирается доказательство. Резюме автора

7898. Обсуждение «аксиом» и асимптотических свойств локальной теории полей с составными частицами. Хаг (Discussion der «axiomes» et des propriétés asymptotiques d'une théorie des champs locale avec particules composées. Haag R.), Problèmes math. théorie quantique champs. Paris, CNRS, 1959, 151—162 (франц).

В настоящее время теоретическая физика располагает в основном двумя методами, пригодными для решения актуальных проблем квантовой теории полей. Первый метод можно охарактеризовать следующим образом. Берется законченная теория (модель). Все свойства (соотношения коммутации, уравнения движения и т. д.) даны заранее. Но вместо рассматривавшихся ранее величин a вводятся „размазанные" величины $a+\alpha$. В этом случае оказывается необходимым обращаться к математическим операциям, которые могут быть определены лишь апостериори при стремлении α к подходящему пределу. Задача заключается, следовательно, в нахождении точных определений этим операциям в соответствии с физическими предсказаниями опытных данных. Другой метод называется „аксиоматическим" Идея метода: физическое содержание теории аксиоматически дается общей схемой основных принципов; затем по мере разработки математической структуры теории ищут в ней слабые места. До последнего времени сторонники каждого из этих методов были убеждены в бесперспективности другого. В настоящее время намечается мостик между ними: изучение пропагаторов (аналог функции распространения). Данная работа предлагает вариант аксиоматического метода. В основу положена схема Уайтмана (A. S. Wightman). Лишь условие причинности (аксиома IV Уайтмана) заменено более общим. Доказано, что с этой поправкой схема Уайтмана является достаточной для того, чтобы определить асимптотические состояния, обладающие достаточно удобными трансформационными свойствами и ортогональностью. Кроме того, показано, что в этом случае нет необходимости различать обычную теорию и теорию с составными частицами. Н. А. Тихонов

7899. Аналитические свойства амплитуды Шрёдингера при фиксированном угле. Баукок, Валецкая (Analytic properties of the Schrödinger amplitude at a fixed angle. Bowcock J., Walecka D.), Nucl. Phys., 1959, 12, № 4, 371—388 (англ.)

Для нерелятивистской задачи рассеяния на потенциале вида

$$V(r)=\int_\mu^\infty \rho_D(\sigma)\frac{e^{-\sigma r}}{r}d\sigma+P_M\int_\mu^\infty \rho_E(\sigma)\frac{e^{-\sigma r}}{r}d\sigma,$$

где P_M — обменный оператор Майорана и

$$\int_\mu^\infty [\,|\rho_D(\sigma)|+|\rho_E(\sigma)|\,]\,d\sigma<\mu,$$

изучаются аналитические свойства амплитуды рассеяния $f(k, \theta)$ в комплексной плоскости энергии k^2 при некотором фиксированном физическом значении угла θ.

Показано, что, например, для потенциала $V(r)=\lambda\frac{e^{-\mu r}}{r}$, $|\lambda|<\mu$, амплитуда рассеяния аналитична во всей комплексной плоскости k^2, за исключением разрезов $(0, \infty)$, $\left(-\frac{\mu^2}{\sin^2\frac{\theta}{2}}, -\infty\right)$ и полюса в точке $k^2=-\frac{\mu^2}{4}\sin^2\frac{\theta}{2}$.

Для общего случая картина аналогична, а расположение особенностей обусловлено видом весовых функций ρ_D и ρ_E. О. С. Парасюк

7900. Дифференциальные уравнения для ренормированных полей в модели Ли с точечным источником и скалярной нейтральной мезонной теории. Хаг, Луццатто (Differential equations for the renormalized fields in the point source lee model and scalar neutral meson theory. Haag R., Luzzatto G.), Nuovo cimento, 1959, 13, № 2, 415—429 (англ., рез. итал.)

Теория перенормировок современной квантовой теории поля наряду с перенормированными полями $\Phi_n(x)$ вводит ренормированные поля $\Phi(x)$ по формуле

$$\Phi(x) = z^{-\frac{1}{2}} \Phi_n(x),$$

где z^{-1} — расходящаяся величина. Перенормированные поля, как правило, удовлетворяют нелинейным дифференциальным уравнениям движения и перестановочным соотношениям. Что же касается ренормированных полей, то до последнего времени не было ясно, могут ли они удовлетворять дифференциальным уравнениям движения. Авторам удается показать на примере двух точно решаемых моделей (модель Ли и скалярная нейтральная мезонная теория), что ренормированные поля действительно удовлетворяют дифференциальным уравнениям движения. Если бы этот результат удалось доказать, например, для квантовой электродинамики (некоторые соображения высказаны по этому поводу в реферируемой работе), то это означало бы построение квантовой теории поля без расходимостей, т. е. решение важнейшей проблемы современной науки. Метод вывода ренормированных уравнений, приведенный в данной работе, очень поучителен. Так, вывод ренормированных уравнений для модели Ли приводит к необходимости уточнения области определения оператора энергии в пространстве Гильберта в духе строгой теории неограниченных операторов в пространстве Гильберта. Как показано в другой работе Хаага (Haag R., Les problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs. Lille, 1957, 151—162), выяснение вопроса о том, удовлетворяют ли ренормированные уравнения поля дифференциальным уравнениям движения, имеет первостепенное значение для вывода асимптотических условий Челлана—Симанзика Циммермана (Il Nuovo Cimento, 1955, 1, № 1, 205—225). О. С. Парасюк

7901 К. Конечные группы симметрии и нахождение решений уравнения Шрёдингера. **Мариот** (Groupes finis de symétrie et recherche de solutions de l'équation de Schrödinger. Mariot L. Paris, Dunod. 1959, VIII, 106 p., ill., 960 fr.) (франц.)

Реферируемая книга посвящена некоторым применениям теории представлений конечных групп к нахождению решений уравнения Шрёдингера, связанного с кристаллом. В центре внимания находится вариационный метод Ритца аппроксимации энергетических уровней. В гл. 1 даются определения некоторых понятий теории групп, необходимых для дальнейшего. Гл. 2 посвящена теории представлений групп. Приводятся необходимые факты из теории матриц, даются определения представления группы, неприводимости, вполне приводимости, эквивалентности, унитарности представлений. Изучаются свойства кронекеровского произведения и характеров представлений. Разбираются примеры. В гл. 3 рассматриваются группы преобразований трехмерного пространства, главным образом группы изометрии, связанные с кристаллическими решетками. Вводятся условия цикличности Борна, после чего группы кристаллов становятся конечными. Изучаются неприводимые представления конечных трансляционных групп, и в процессе этого изучения вводится понятие обратной решетки. Далее дается определение единичной ячейки решетки и зоны Бриллюэна. В заключение введенные понятия иллюстрируются на примере кубических решеток (кристаллов типа алмаза, германия, кремния). В гл. 4 излагаются метод Ритца и необходимые для его построения теоремы об экстремальности энергетических уровней. Гл. 5 посвящена применения теории представлений групп к уравнению Шрёдингера для системы, обладающей конечной группой симметрии. Указывается, как в этом случае выбирать „пробные" функции при применении метода Ритца и как при этом разлагается вековое уравнение, к которому указанный метод приводит. В гл. 6 излагается метод „ортогональных плоских волн". Гл. 7 посвящена применению результатов, изложенных в книге, к вычислению энергии электронов в центральной точке зоны Бриллюэна. При этом используются неопубликованные результаты Германна и Вудруфа.

С. Г. Гиндикин

См. также: 7400, 7427 К, 7493, 7616, 7651, 7755, 7756, 7753, 7767, 7770, 7786, 7788, 7802, 7822, 7902.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редакторы *Н. В. Смирнов, Н. Н. Воробьев*

7902. *L*-случайные элементы и *L-случайные элементы в пространствах Банаха.** **Мурье** (*L*-random elements and *L**-random elements in Banach spaces. Mourier Edith), Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability. Vol. 2. Berkeley—Los Angeles, 1956, 231—242 (англ.)

Пусть X — пространство Банаха и X^* — сопряженное ему пространство. Однозначное отображение $x(u)$ основного поля вероятностей (U, F, m) в X называется L-случайным элементом, если все линейные функционалы $\langle x^*, x(u)\rangle$ суть измеримые функции u. В том специальном случае, когда $X = Y^*$, т. е. X само является сопряженным к некоторому Банахову пространству Y, говорят об L^*-случайных элементах. В сепарабельном случае из вышеуказанного определения вытекает, что $x(u)$ есть измеримое отображение (т. е. что прообразы борелевских подмножеств X F-измеримы). Перечисляются результаты, касающиеся сходимости средних арифметических $n^{-1}\sum_{j=1}^{n} x_j(u)$ последовательности случайных элементов к пределу (как в смысле сходимости почти наверное, так и в смысле сходимости в среднем порядка α). Попутно выделяется класс так называемых $\mathfrak{R}$-пространств (ими, в частности, являются все пространства L_p при $p \geqslant 2$). В сепарабельных $\mathfrak{R}$-пространствах выполняется некоторый аналог теоремы о сложении дисперсий. Именно, для каждого $\mathfrak{R}$-пространства существует такая константа K, что для любых независимых L-случайных элементов со значениями из $\mathfrak{R}$ и с математическими ожиданиями, равными нулю, имеет место неравенство $M\left(\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\|^2\right) \leqslant K \cdot \sum_{j=1}^{n} M(\|x_j\|^2)$.

Далее приводятся основные свойства характеристических функционалов, определяется понятие нормального (лапласова, по терминологии автора) L-случайного элемента и формулируется вариант центральной предельной теоремы для нормированных сумм независимых одинаково распределенных случайных элементов со значениями из рефлексивного сепарабельного $\mathfrak{R}$ пространства, имеющего базис. Последний результат применяется к доказательству асимптотической нормальности распределений дифференцируемых функционалов от эмпирического распределения.

В заключительном параграфе рассматриваются L^*-случайные элементы. Выясняется, что теория L^*-случайных элементов во многих отношениях проще, чем общая теория L-случайных элементов. Ю. В. Прохоров

7903. Замечание о характеристических функционалах. Сазонов В., Теория вероятностей и ее применения, 1958, 3, № 2, 201—205 (рез. англ.)

Доказываются две теоремы об условиях, необходимых и достаточных, чтобы функционал $\chi(f)$, определенный на сепарабельном гильбертовом пространстве H, был характеристическим функционалом вероятностного распределения P в H. При дополнительном требовании $\int \|x\|^2 dP < \infty$ условия теоремы 1 таковы: 1) $\chi(f)$ положительно определен, непрерывен по норме и $\chi(f)=1$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF^n(x) < \infty$, где $F^n(x)$ — функция распределения в R' с характеристической функцией $\varphi_n(t) = \chi(te_n)$ ($\{e_n\}$ — ортонормированный базис в H).

Условия теоремы 2 состоят в том, что $\chi(f)$ должен быть положительно определенным, равным единице в 0 и непрерывным в 0 в смысле специальным образом выбранной $\mathfrak{F}$-топологии (0 — нуль в H). В. Г. Винокуров

7904. О распределениях Лорана Шварца и некоторых их применениях в теории вероятностей. Ферон (Sur les distributions de probabilité de Laurent Schwartz et quelques unes de leurs applications au calcul des probabilités. Féron R. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, 1956, 5, 13—27) (франц.)

Автор дискутирует вероятностные распределения с точки зрения теории Шварца, в которой вероятностное распределение в n-мерном пространстве отождествляется с соответствующим распределением Шварца (линейный функционал). В качестве применения выводятся результаты Фреше о верхних и нижних границах двумерных функций распределения с заданными частными распределениями (Ann. Univ. Lyon A, 1951, 14, 53—77) и дается строгое доказательство неточных утверждений Берто (РЖМат, 1956, 4671). J. L. Doob

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 9, 769.

7905. О расстоянии между двумя законами распределения. Фреше (Sur la distance de deux lois de probabilité. Fréchet Maurice), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 6, 689—692 (франц.)

Пусть два закона распределения L и L' определяются функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$ соответственно. Пусть пара (X_μ, Y_μ) случайных величин с совместной функцией распределения $H(x, y)$ такова, что одномерное распределение X_μ (Y_μ) есть $F(G)$. Указывается, что при довольно общих предположениях $\inf_H M(X_\mu - Y_\mu)^2$ достигается при $H(x, y) = H_1(x, y) = \min[F(x), G(y)]$ и равен

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [x - \lambda(x)]^2 dF(x), \qquad (1)$$

где функция $y = \lambda(x)$ задается равенством $F(x) = G(y)$. Квадратный корень из интеграла (1) предлагается в качестве „расстояния" между L и L'. Ю. В. Прохоров

7906. Стационарные меры вероятностных процессов. Лампорти (Stationary measures for certain stochastic processes. Lamperti John), Pacif. J. Math., 1958, 8, № 1, 127—132 (англ.)

Пусть Y — фиксированное множество целых чисел и $\Omega = \prod_{i=-\infty}^{\infty} Y_i$, $\Omega_0 = \prod_{i=0}^{\infty} Y_i$, где $Y_i = Y$. Вместе с борелевскими телами, построенными с помощью цилиндрических множеств, Ω и Ω_0 образуют измеримые пространства. Пусть (X, F) — измеримое пространство и q — взаимно однозначное и измеримое вместе со своим обратным отображение Ω_0 в X. Обозначим $Z_n(\omega) = i_n$, $\omega = \{\ldots i_{-1}, i_0, i_1, \ldots, i_n \ldots\} \in \Omega$ и $X_{n+1} = q(\{Z_n, Z_{n-1}, \ldots\})$. Определим в Ω метрически транзитивную и инвариантную относительно сдвига вероятностную меру μ и обозначим через Q_μ вероятностную меру, индуцированную ею в X. Автор показывает, что если $\{Z_n\}$ — циклический процесс, то Q_μ сконцентрирована на конечном числе точек; в противном случае $\{X_n\}$ есть марковский процесс, мера Q_μ неатомична и любые две меры Q'_μ и Q''_μ, порожденные разными μ' и μ'', ортогональны. Этот результат является обобщением теорем, опубликованных Гаррисом (РЖМат, 1960, 3265) и Карлиным (РЖМат, 1955, 1862), в которых Y и q специализированы. В. Г. Винокуров

7907. Одно свойство распределения Пуассона. Дабони (Una proprietà delle distribuzioni poissoniane. Dabboni Luciano), Boll. Unione mat. ital., 1959, 14, № 3, 318—320 (итал.; рез. англ.)

Пусть N — число испытаний в схеме Бернулли. Число N_A успехов и число $N_B = N - N_A$ неудач независимы, если и только если N имеет распределение Пуассона. Резюме автора

7908. Асимптотические законы триномиального распределения. Ряубa (Trinominio pasiskirstymo asimptotiniai désniai. Riauba B.), Vilniaus univ. Mokslo darbai. Уч. зап. Вильнюсск. ун-т, 1958, 25, 17—22 (лит.; рез. русск.)

Получены три асимптотические формулы для триномиального распределения: для p_1, p_2 и p_3, не зависящих от n (p_i ($i = 1, 2, 3$) — вероятности появления события A_i в одном испытании, n — число независимых испытаний), для $p_1 = O\left(\frac{1}{n}\right)$ и для $p_1 = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $p_2 = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Указывается, каким должно быть соотношение между n, p_1, p_2 и p_3, чтобы одна из этих формул наилучше аппроксимировала триномиальный закон. Э. И. Вилкас

7909. Об одном парадоксе в применениях вероятностей. Штейнхаус, Трыула (On a paradox in applied probabilities. Steinhaus H., Trybuła S.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1959, 7, № 2, 67—69 (англ.)

В практике часто встречаются задачи, при решении которых требуется сравнить значение некоторых параметров, не определяя сами эти значения. Пусть $F(\alpha)$, $G(\alpha)$, $H(\alpha)$ — функции распределения независимых случайных величин x, y и z соответственно. Предположим, что никакие две из функций распределения не имеют общих точек разрыва. Обозначим $P\{x < y\} = \xi$; $P\{y < z\} = \eta$; $P\{z < x\} = \zeta$. Имеем:

$$\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)\, dG(\alpha); \quad \eta = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\alpha)\, dH(\alpha);$$

$$\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\alpha)\, dF(\alpha). \qquad (1)$$

Мы хотим определить множество точек (ξ, η, ζ), которые могут быть получены из (1), если рассматривать все возможные F, G и H. Имеет место

Теорема: Искомое множество точек определяется соотношениями $1 - g(1 - \xi, 1 - \eta) \leqslant \zeta \leqslant g(\xi, \eta)$, где

$$g(\xi, \eta) = \begin{cases} \max\left(1 - \xi\eta, \dfrac{1-\xi}{\eta}, \dfrac{1-\eta}{\xi}\right) & \text{для } \xi + \eta > 1, \\ 1 & \text{для } \xi + \eta \leqslant 1, \end{cases}$$

$$0 \leqslant \xi \leqslant 1; \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1,$$

Л. Н. Куцев

7910. О двух характеристиках случайных направлений. Симайка (On two characteristics of a random direction. Simaika J. B.), Proc. Math. and Phys. Soc. Egypt, 1956(1957), 5, № 4, 113—119 (англ.)

Если рассматривать случайные направления на плоскости как случайные величины, определенные на окружности единичного круга, то при изменении начала отсчета на окружности на величину α новое среднее выражается через старое по формуле

$$M\theta_\alpha = M\theta_0 - \alpha + 2\pi F(\alpha),$$

где F — функция распределения θ_0, т. е. средние различаются не только на величину сдвига, но и еще на некоторую величину, зависящую от закона распределения исходной случайной величины. Дисперсия также не обладает инвариантностью по отношению к сдвигу и аддитивностью (для независимых слагаемых).

Автор вводит понятия типичного значения $T\theta$ случайной величины θ как амплитуды характеристической функции θ в точке $t = 1$ и типичного отклонения $D\theta = \arccos |\chi(1)|$, показывает, что они обладают свойствами инвариантности, аддитивности и единственности, и предлагает использовать их вместо среднего и стандартного отклонения. Аналогичное построение совершается и для трехмерного пространства. В. М. Волков

7911. Гармоническое среднее независимых $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$-случайных величин. Бойд (The harmonic mean of independent γ ($^1/_2$) variates. Boyd A. V.), Simon Stevin, 1959, 33, № 1, 34—37 (англ.)

$\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$-случайной величиной автор называет случайную величину, имеющую функцию распределения $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^y y^{-\frac{1}{2}} e^{-y}dy$. Сумма k независимых $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$-случайных величин является $\gamma\left(\frac{k}{2}\right)$-случайной величиной. $\gamma(\lambda;\ \alpha)$-случайной величиной автор называет случайную величину, имеющую плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

(здесь $\lambda > 0$, $\alpha > 0$). Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — независимые $\gamma\left(\frac{1}{2};\ a_i\right)$-случайные величины, то случайная величина $y = \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$ является $\gamma\left(\frac{1}{2};\ a\right)$-величиной, где a определяется из равенства $a = \sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_n}$. В. М. Волков

7912. Одна теорема о выпуклых множествах с приложениями. Шерман (A theorem on convex sets with applications. Sherman S.), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 4, 763—767 (англ.)

Если два одномерных распределения унимодальны и симметричны, то их композиция также унимодальна и симметрична. Автор получает одно обобщение этого факта на n-мерное евклидово пространство и обобщает лемму Бирнбаума (Birnbaum Z. W., Ann. Math. Statistics, 1948, 19, 76—81) о „вершинности" распределений.

H. P. Mulholland

Из Math. Revs, 1956, 17, № 6, 655

7913. Обобщенные пуассоновские распределения. Голд (Generalized Poisson distributions. Gold Louis), Ann. Inst. Statist. Math., 1957, 9, № 1, 43—47 (англ.)

Рассматривается обобщенное пуассоновское распределение, записываемое в виде

$$N_x = \text{const}\, q^x e^{-qu} \sum_{j=x}^{\infty} \frac{u^j}{j!},$$

где $0 < q < \infty$ — параметр, определяющий форму кривой плотности N_x. Рассматривается связь этого распределения с простым пуассоновским распределением и с пуассоновским экспоненциально-биномиальным пределом, записываемом в виде

$$N_x = \text{const}\, e^{-u} \sum_{j=x}^{\infty} \frac{u^j}{j!}$$

и получающемся из обобщенного распределения предельным переходом при $q \to 1$. Показывается, что моменты остальных распределений получаются из моментов обобщенного пуассоновского распределения соответствующим переходом к пределу. В. И. Бабкин

7914. Характеризация гамма-функции. Банерджи (Characterisation of the Gamma function. Banerjee D. P.), Proc. Nat. Acad. Sci. India, 1957, A26, № 2, 112—116 (англ.)

Рассматриваются две теоремы относительно гамма-распределения

$$F(x, a, \lambda) = \begin{cases} \frac{a^\lambda}{\Gamma a} \int_0^z t^{\lambda-1} e^{-at}dt, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Теорема 1. Если x, y — независимые случайные величины, имеющие гамма-распределение с параметрами t, m соответственно, тогда случайные величины $u = x + y$ и $v = \frac{x-y}{x+y}$ независимы.

Теорема 2. Пусть x, y — две невырожденные и положительные случайные величины, имеющие независимое распределение. Если случайные величины $u = x + y$ и $v = \frac{x-y}{x+y}$ независимо распределены и $|E(u)| < 1$, $|E(v)| < 1$, $E(v^2) - \{E(v)\}^2 > 0$, то x и y имеют гамма-распределения с одинаковым параметром.

Примечание референта. Вторая теорема в статье сформулирована неточно и должна иметь, по-видимому, вышеприведенный вид. В. И. Бабкин

7915. Об оценке снизу вероятностных моментов. Трыбула (On lower bounds for probability moments. Trybuła S.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron et phys., 1959 7, № 5, 267—269 (англ.; рез. русск.)

Имеется случайная величина X с абсолютно непрерывным распределением. Рассматривается функционал

$$\Pi_n = \int_{-\infty}^{\infty} f^n(x)\,dx,$$

где $f(x)$ — плотность распределения величины X. Предполагается, что у случайной величины X k-й центральный абсолютный момент m_k конечен. Целью работы является нахождение наибольшей нижней границы для Π_n в зависимости от m_k. Получено, что

$$\Pi_n^k m_k^{n-1} \geqslant \frac{(kn)^k (n-1)^{n-1}}{(kn+n-1)^{k+n-1}} \left[\frac{k}{2B\left(\frac{1}{k}, \frac{n}{n-1}\right)}\right]^{k(n-1)}$$

где $B(\alpha, \beta)$ есть бета-функция. Указанная нижняя граница достигается для функции $f(x)$ вида

$$f_0(x)=\begin{cases} c\,(1-|ax|^k)^{1/(n-1)} & \text{для } -\frac{1}{a} < x < \frac{1}{a} \\ 0 & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

В. И. Бабкин

7916. О моментах максимума частных сумм конечного числа независимых нормальных случайных величин. Анис (On the moments of the maximum of partial sums of a finite number of independent normal variates. Anis A. A.), Biometrika, 1956, 43, № 1, 79—84 (англ.)

Выводятся рекуррентные соотношения для вычисления моментов максимума последовательных сумм независимых нормально распределенных случайных величин. Если X_k — нормально распределенная случайная величина с параметрами (0, 1), $S_r=\sum_{k=1}^{r} X_k$, $U_n=\max\limits_{1\leqslant r\leqslant n} S_r$, $M_r(n)=\int_{-\infty}^{\infty} H_r(x)\,dF_n(x)$, где $H_r(x)$ — полиномы Эрмита, $F_n(x)$ — функция распределения величины U_n, то

$$M_j(n+1)=\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\,M_{j-1}(n-r+1)+$$

$$+(j-1)\,nM_{j-2}(n+1)-\frac{1}{2}(j-1)\sum_{r=1}^{n-1}M_{j-2}(r+1).$$

Приводятся таблицы моментов первых четырех порядков распределения величины U_n для n от 2 до 15.

И. И. Гихман

7917. «Приводимость» всякого многомерного распределения вероятностей. Кастольди («Riducibilità» di ogni distribuzione statistica multipla. Castoldi Luigi), Rend. Semin. Fac. sci. Univ. Cagliari, 1955, 25, № 3-4, 137—142 (итал.)

Для n-мерного распределения вероятностей, заданного плотностью $f(x_1, \ldots, x_n)$, рассматривается произвольная замена переменных $\xi_i=\xi_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i=1, \ldots, n)$ и ищется условие, при котором полученное распределение будет равномерным в единичном n-мерном координатном кубе и, следовательно, представляется в виде произведения независимых одномерных случайных величин. Такое условие имеет вид: $D(\xi_1, \ldots, \xi_n)/D(x_1, \ldots, x_n)=f(x_1, \ldots, x_n)$ и представляет при произвольно выбранных функциях $\xi_2, \ldots, \xi_n$ от $x_1, \ldots, x_n$ линейное уравнение первого порядка в частных производных для нахождения функции ξ_1, которое, как известно, имеет общее решение, зависящее от еще одной произвольной функции. Выбирая, в частности, в качестве $\xi_2, \ldots, \xi_n$ функции только от переменных $x_2, \ldots, x_n$, получаем уравнение вида

$$\partial\xi_1/\partial x_1=F(x_1, \ldots, x_n),$$

где

$$F=f(x_1, \ldots, x_n)/[D(\xi_2, \ldots, \xi_n)/D(x_2, \ldots, x_n)],$$

интегрирующееся просто квадратурой. Автор заключает отсюда, что всякое многомерное распределение приводимо, т. е. заменой переменных приводится (к тому же бесчисленным множеством способов) к произведению одномерных распределений. В качестве примера рассматривается двумерное нормальное распределение.

М. Ф. Бокштейн

7918. Характеристическая функция четырех стохастических алгорифмов. Маравалль-Касесновес (La funcion caracteristica de cuatro algoritmos estocasticos. Maravall Casesnoves Dario), Gac. mat., 1958, 10, № 5-6, 139—144 (исп.)

Вычисываются характеристические функции для 1) случайного вектора в евклидовом пространстве с плотностью распределения вида $f\left(\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\right)$ (x_i — координаты), 2) для некоторых сумм случайного числа независимых случайных величин, 3) для произведения случайных величин, где задана совместная плотность распределения, 4) для частного таких же случайных величин.

Ю. В. Линник

7919. Локальная теорема для решетчатых распределений. Петров В. В., Докл. АН СССР, 1957, 115, № 1, 49—52

Дана последовательность $\{\xi_n\}$ независимых целочисленных случайных величин. Обозначим $\zeta_n=\sum_{m=1}^{n}\xi_m$, $p_{mj}=P\{\xi_m=j\}$. Пусть $p_{m0}\geqslant p_{mj}$ при всех m и j и а) общий наибольший делитель всех целых j, для которых $\log^{-1} n\sum_{m=1}^{n} p_{m0}\cdot p_{mj}\to\infty$ при $n\to\infty$ равен единице, б) $s_n^2=D\zeta_n\to\infty$ при $n\to\infty$ и при всех n

$$c_n=\sum_{m=1}^{n} M\,|\xi_m-M\,\xi_m|^{2+\delta}\leqslant Bs_n^2.$$

Тогда равномерно по N величина $s_nP\{\zeta_n=N\}$ отличается от значения нормальной $(0, 1)$ плотности в точке $(N-M\,\zeta_n)/s_n$ не более чем на CL_n, где $L_n=c_n/s_n^{2+\delta}$ — ляпуновское отношение, $0<\delta\leqslant 1$, C — постоянная. По методам доказательства работа примыкает к статьям референта (РЖМат, 1955, 3858) и Ю. А. Розанова (РЖМат, 1959, 1748).

Ю. В. Прохоров

7920. Внутрь центральной проблемы. Лоэв (A l'intérieur du problème central. Loève Michel), Publs Inst. statist. Univ. Paris, 1957, 6, № 4, 313—325 (франц.)

Рассматриваются серии $\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \ldots, \xi_{n,k_n}$, $k_n\to\infty$ при $n\to\infty$, независимых внутри каждой серии бесконечно малых случайных величин. Выбирается непрерывная на всей прямой функция $y(x)$, $y(0)=0$, и вводятся случайные величины $\eta_{n,k}=y(\xi_{n,k}-\alpha_{n,k})$, где $\alpha_{n,k}$ — „урезанные" математические ожидания $\xi_{n,k}$:

$$\alpha_{n,k}=\int_{|x|<\tau} x\,dF_{nk}(x).$$

Исследуется связь между предельным поведением распределений сумм $\xi_n=\sum\xi_{n,k}$ и сумм $\eta_n=\sum\eta_{n,k}$. Известно, что первый результат такого рода был получен Д. А. Райковым (в предположении, что ξ_n асимптотически нормальны и $y(x)=x^3$, см., например, Гнеденко Б. В. и Колмогоров А. Н. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, ГИТТЛ, 1949, стр. 152). В качестве типичного результата можно привести следствие 2 из теоремы 2 (§ 3).

Пусть $y(x)=cx+O(x^3)$ при $x\to 0$. Если при некотором выборе постоянных a_n распределения ξ_n-a_n сходятся к неограниченно делимому распределению с логарифмом характеристической функции, определяемым формулой Леви

$$\psi(t)=ita-\frac{\sigma^2t^2}{2}+\int_{-\infty}^{0}h(t, x)\,dM+\int_{0}^{\infty}h(t, x)\,dN,$$

то распределения $\tau_{ln} - b_n$ сходятся к неограниченно делимому распределению с логарифмом характеристической функции

$$\varphi(t) = i\beta t - \frac{c^2\sigma^2 t^2}{2} + \int_{-\infty}^{0} h(t, y(x))\,dM + \int_{0}^{\infty} h(t, y(x))\,dN.$$

Если $y(x) = dx^2 + o(x^2)$, то распределения τ_{ln} сходятся к предельному с

$$\varphi(t) = itd\sigma^2 + \int_{-\infty}^{0} (e^{ity(x)} - 1)\,dM + \int_{0}^{\infty} (e^{ity(x)} - 1)\,dN.$$

Самостоятельный интерес представляет ряд лемм, касающихся условий компактности семейств распределений „с точностью до сдвига". Ю. В. Прохоров

7921. Локальные предельные теоремы для больших уклонений. Рихтер Вольфганг. Докл. АН СССР, 1957, 115, № 1, 53—56

Рассматриваются нормированные суммы независимых случайных величин (не обязательно одинаково распределенных). Исследуется поведение плотности сумм (в абсолютно непрерывном случае) или вероятностей попадания в узлы решетки (в решетчатом случае) для „больших" значений аргумента. В качестве типичного результата можно привести теорему 3.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые случайные величины с одной и той же функцией распределения $V(x)$ с максимальным шагом единица, средним a, дисперсией σ^2. Пусть $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx}dV(x)$ сходится при $|s| \leqslant A$. Положим

$$\mathfrak{P}_n(k) = P\left\{\sum_1^n X_j = k\right\}, \quad x_{n,k} = \frac{k - na}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Тогда при $x_{n,k} > 1$ и $x_{n,k} = o(\sqrt{n})$

$$\sigma\sqrt{n}\,\mathfrak{P}_n(k) = \varphi(x_{n,k}) \exp\left[\frac{x_{n,k}^3}{\sqrt{n}}\lambda\left(\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)\right] \times \left[1 + O\left(\frac{x_{n,k}}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

где $\varphi(x)$ — стандартная нормальная плотность, а ряд $\lambda(x)$ тот, что обычно появляется в задачах о вероятностях больших уклонений (см., например, Крамер Г., Успехи матем. наук, 1944, 10, 166 и В. В. Петров (РЖМат, 1956, 3190)). Ю. В. Прохоров

7922. Две равномерные предельные теоремы для сумм независимых слагаемых. Колмогоров А. Н., Теория вероятностей и ее применения, 1956, 1, № 4, 426—436 (рез. франц.)

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, Φ_n — функция распределения их суммы, θ — множество всех неограниченно делимых функций распределения, γ — множество всех вырожденных функций распределения. Доказываются две теоремы.

В первой теореме из близости распределений слагаемых к вырожденным в том смысле, что для „малых" l и ε

$$E_k(x - l) - \varepsilon \leqslant F_k(x) \leqslant E_k(x + l) + \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$E_k \in \gamma$, выводится существование распределения $\Psi \in \theta$, близкого в том же смысле к Φ_n:

$$\Psi(X - L) - \delta \leqslant \Phi_n(x) \leqslant \Psi(X + L) + \delta;$$

L и δ определяются по l и ε.

Вторая теорема для случая слагаемых с одной и той же функцией распределения $F(x)$ устанавливает неравенство

$$\varphi_F(n) = \inf_{\Psi \in \theta} \sup_x |\Phi_n(x) - \Psi(x)| < Cn^{-1/6},$$

где C — абсолютная постоянная. Более слабый результат был ранее установлен референтом (РЖМат, 1956, 5999): при любой F $\lim_{n\to\infty} \varphi_F(n) = 0$. Центральное место в доказательстве занимает лемма о функциях концентрации сумм случайных величин, обобщающая аналогичную лемму Леви (Lévy P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris, 1937, § 48). Для случая одинаково распределенных слагаемых эта лемма формулируется так: обозначим $Q_G(l) = \sup_x [G(x + l + 0) - G(x)]$; тогда при $L \geqslant l$, $\dot{L} \geqslant l\sqrt{\log[n(1 - Q_F(l))]}$,

$$Q_\Phi(L) \leqslant \frac{C_{\text{абс}} \cdot L}{l\sqrt{n(1 - Q_F(l))}}.$$

Ю. В. Прохоров

7923. Об асимптотическом поведении последовательностей случайных величин. Дюге (Sur le comportement asymptotique des suites de variable aléatoires. Dugué Daniel), C. r. Acad. sci., 1957, 244, № 24, 2885—2886 (франц.)

Автор называет последовательность $\{X_n\}$ случайно устойчивой по вероятности, если существует такая последовательность постоянных $\{a_n\}$, что разность $X_n - a_n$ сходится по вероятности к некоторой случайной величине Z (при $Z \equiv 0$ это определение превращается в хорошо известное определение устойчивости последовательности случайных величин). С использованием „функций концентрации" Леви (Lévy P., Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris, 1937) доказывается теорема: Если последовательности $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ независимы между собою и если $X_n + Y_n$ сходится по вероятности к некоторой случайной величине, то последовательность $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ случайно устойчивы по вероятности. Ю. В. Прохоров

7924. Центральная предельная теорема со сходимостью в среднем. Эссеен (On mean central limit theorems. Esseen Carl-Gustav. Kungl. tekn. högskolans handl., 1958, № 121, 31 pp.) (англ.)

Рассматривается

$$C_n^{(p)} = \int_{-\infty}^{+\infty} |F_n(x) - \Phi(x)|^p dx, \quad p \geqslant 1,$$

где $F_n(x)$ — функции распределения обычным образом нормированных сумм независимых случайных величин, с одной и той же функцией распределения $F(x)$ и конечным третьим моментом. Для нерешетчатой $F(x)$ (а в случае $p = 1$, 2 — для любой) показано, что

$$C_n^{(p)} = A_p \cdot n^{-p/2} + o(n^{-p/2}),$$

где A_p не зависит от n. Следовательно, расстояние $\rho_n^{(p)}$ в L_p-смысле между $F_n(x)$ и $\Phi(x)$ допускает выражение

$$\rho_n^{(p)} = B_p \cdot n^{-1/2} + o(n^{-1/2}).$$

Использованные методы представляют собой дальнейшее развитие методов известной работы автора (Acta math., 1945, 77, 1—125) и могут быть интересны вне связи с разбираемой автором задачей. В ряде специальных случаев асимптотические формулы для $C_n^{(p)}$ были даны Агнью (РЖМат, 1959, 3793). Ю. В. Прохоров

7925. Заметка о статье Колмогорова и Прохорова «О суммах случайного числа случайных слагаемых».

Сейц Иржий, Винкельбауэр Карел, Чехосл. матем. ж., 1953, 3, № 1, 89—91 (рез. англ.)

Строится пример, показывающий, что в указанной в заголовке статье (Колмогоров А. Н., Прохоров Ю. В., Успехи матем. наук, 1949, 4, № 4, 168—172) теоремы 3, 4, 5 в общем случае несправедливы. При более узких предположениях приводятся видоизменения этих теорем. Как наиболее важную рассмотрим теорему 4:

Пусть ν — случайная величина, принимающая значения 1, 2, ..., с вероятностями $p_1, p_2, \ldots$ соответственно, векторы $\xi_n = (\xi_n^1\ \xi_n^2)$ взаимно независимы. Если существует такое множество V_n в $2n$-мерном евклидовом пространстве, что $\{\nu = n\} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^{-1}(V_n)$, причем через выражение в правой части обозначено множество всех элементарных событий, для которых вектор $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ лежит в V, а в левой — множество всех элементарных событий, для которых $\nu = n$, то при условии, что

$$M(\xi_n^i) = a_n^i,\quad M\{(\xi_n^i - a_n^i)(\xi_n^j - a_n^j)\} = b_n^{ij},\quad i,\ j = 1,\ 2$$

и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P_n\left(\sqrt{b_n^{11}c_n^{22}} + \sqrt{b_n^{22}c_n^{11}}\right)$ сходится, существует $M\{(\zeta_\nu^1 - A_\nu^1)(\zeta_\nu^2 - A_\nu^2)\} = \sum_{n-1}^{\infty} P_n B_n^{12}$,

где $P_n = \sum_{m=n}^{\infty} p_m$, $c_n^{ij} = \sum_{m=1}^{n} M\{(\xi_m^i - a_m^i)(\xi_m^j - a_m^j)\nu \geqslant n\}$,

$$\zeta_\nu^i = \sum_{k=1}^{\nu} \xi_k^i,\quad A_n^i = \sum_{m=1}^{n} a_m^i,\quad B_n^{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_k^{ij},\quad i,\ j = 1,\ 2.$$

Б. А. Рогозин

7926. Элементарное доказательство центральной предельной теоремы. Троттер (An elementary proof of the central limit theorem. Trotter H. F.), Arch. Math., 1959, 10, № 2-3, 226—234 (англ.)

Элементарность доказательства заключается в том, что в нем не используется аппарат характеристических функций. Со случайной величиной ξ, имеющей функцию распределения $V(x)$, связывается следующий оператор T_ξ, определенный на классе всех равномерно непрерывных на оси функций: функции $f(y)$ соответствует функция $(T_\xi f)(y) = \int f(x+y)\,dV(x)$, для этих операторов доказывается правило умножения $(T_{\xi_1+\xi_2} f)(y) = (T_{\xi_1} T_{\xi_2} f)(y)$. Находится достаточное условие, описываемое в терминах этих операторов, сходимости по распределению. Центральная предельная теорема доказывается в предположениях, что для последовательности $\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots$ независимых случайных величин выполнены условия Линдеберга, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} s_n^{-2} \sum_{i=1}^{n} \int_{|x| \geqslant \delta s_n} x^2 dV_i(x) = 0$$

при любом $\delta > 0$, где

$$s_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \int x^2 dV_i(x) \quad \text{и} \quad \int x\,dV_i(x) = 0.$$

Доказательство в сущности то же самое, как при использовании характеристических функций, но освобождается от деталей, связанных с конкретным характером e^{itx}. В заключение дается способ перенесения этих понятий и предложений на многомерный случай.

Б. А. Рогозин

7927. Критерий для числа максимумов. Характеристики и предельная форма распределения. Весро (Test du nombre de maxima. Caractéristiques et forme limite de la distribution. Vesserеau A.), Rev. statist. appl., 1958, 6, № 4, 111—117 (франц.)

Пусть p_{kn} означает вероятность иметь k максимумов среди значений n случайных величин, причем значение первой случайной величины и последней считаются соседними, автор получает рекуррентную формулу, связывающую характеристическую функцию для распределения числа максимумов среди n случайных величин с характеристической функцией для распределения числа максимумов среди $n-1$ величин: $\varphi_n(t) = e^{it}\varphi_{n-1}(t) + \frac{2i}{n-1}(e^{it}-1)\frac{d}{dt}\varphi_{n-1}(t)$, с помощью которой вычисляется математическое ожидание, три последующих центральных момента, четыре первых семиинварианта и коэффициенты асимметрии и эксцесса. В предположении, что имеет место сходимость к предельному закону, устанавливается сходимость при $n \to \infty$ к нормальному закону распределений для числа максимумов среди n случайных величин.

Б. А. Рогозин

7928. О локальной предельной теореме вероятностей. Сегал Б. И. Матем. просвещение, вып. 4, 1959, 193—195

Обычным способом показывается, что

$$C_s^m p^m (1-p)^{s-m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)s}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-ps}{\sqrt{p(1-p)s}}\right)^2} \times \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)\right),$$

где $0 < p < 1$, $a \leqslant \frac{m-ps}{\sqrt{p(1-p)s}} \leqslant b$, a и b — постоянные, причем постоянная в O зависит от p, a и b.

Б. А. Рогозин

7929. О последовательностях событий, вероятности которых допускают положительный нижний предел. Сачестон (On sequences of events of which the probabilities admit a positive lower limit. Sucheston L.), J. London Math. Soc., 1959, 34, № 4, 386—394 (англ.)

Теорема А. Пусть заданы последовательность событий $\{A_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, положительные целые числа r, s $(r < s)$ и положительное число p такие, что

$$\varliminf_{n_i \to \infty} P(A_{n_1} \ldots A_{n_r}) \geqslant p^r. \tag{1}$$

Тогда существует подпоследовательность $\{B_i\}$ последовательности $\{A_i\}$ такая, что

$$\varliminf_{n_i \to \infty} P(B_{n_1} \ldots B_{n_s}) \geqslant p^s. \tag{2}$$

Здесь $\varliminf_{n_i \to \infty}$ означает нижний предел при всех n_i, стремящихся независимо один от другого к бесконечности. Частный случай этой теоремы, отвечающий значениям $r = 1$, $s = 2$, был получен Виссером (Visser C., Bull. Amer. Math. Soc., 1936, 42, 397—400) в качестве обобщения одного результата А. Я. Хинчина (Khintchine A., Compositio math., 1935, 9, 177—179). Далее указывается условие, необходимое и достаточное для того, чтобы для последовательности $\{A_i\}$, удовлетворяющей (1), нижний предел p^s в (2) был наилучшим возможным.

В. В. Петров

7930. Несколько замечаний к усиленному закону больших чисел. Прохоров Ю. В., Теория вероятностей и ее применения, 1959, 4, № 2, 215—220 (рез. англ.)

Доказана следующая теорема: Для того чтобы последовательность независимых случайных величин ξ_1, $\xi_2, \ldots$, таких, что

$$\xi_n = O\left(\frac{n}{\ln\ln n}\right), \qquad (1)$$

удовлетворяла усиленному закону больших чисел (у. з. б. ч.), необходимо и достаточно следующее условие:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{D\varkappa_r}\right\} < \infty$$

при любом $\varepsilon > 0$. Здесь $\varkappa_r = 2^{-r}\sum \xi_n$, где суммирование производится по тем n, для которых $2^r < n \leqslant 2^{r+1}$. Показано, что если заменить в (1) $n/\ln\ln n$ функцией $\varphi(n)$ такой, что $\varphi(n)/(n/\ln\ln n) \to \infty$ при $n \to \infty$, то необходимые и достаточные условия применимости у. з. б. ч. уже не могут быть выражены в терминах дисперсий величин $\varkappa_n$. Для случая, когда $\varphi(n)$ растет быстрее $n/\ln\ln n$, но медленнее n, указаны „наилучшие" достаточные условия применимости у. з. б. ч. в терминах дисперсий величин $\varkappa_r$. В заключение приведено доказательство сформулированной автором ранее теоремы о необходимых и достаточных условиях применимости у. з. б. ч. для случайных величин с тремя возможными значениями. В. В. Петров

7931. Предельная теорема теории вероятностей без предположения существования моментов. Кемень (A probability limit theorem requiring no moments. Kemeny John G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, 10, № 4, 607—612 (англ.)

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые решетчатые одинаково распределенные случайные величины, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Пусть значения a_t величины X_j ($j = 1, 2, \ldots$) кратны данному рациональному числу r, а S_n при достаточно больших n может принять любые значения, кратные r. Пусть, далее, $p_t = P\{X_j = a_t\}$, $f(s) = \sum p_t s^{a_t}$ — производящая функция, определенная в интервале (s_1, s_2), $0 \leqslant s_1 \leqslant 1 \leqslant s_2 \leqslant \infty$,

$$g(s) = sf'(s)/f(s), \quad t_1 = \lim_{s \to s_1 + 0} g(s), \quad t_2 = \lim_{s \to s_2 - 0} g(s),$$

$h(t) = g^{-1}(t)$ при $t_1 < t < t_2$, $h(t) = t_1$ при $t \leqslant t_1$, $h(t) = t_2$ при $t \geqslant t_2$. Пусть, наконец, a, a' и t — числа, кратные r; $\inf a_t \leqslant t \leqslant \sup a_t$. Доказывается, что тогда для любого целого числа b

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P\{S_{n-b} = nt + a\}}{P\{S_n = nt + a'\}} = \frac{[h(t)]^{a'-a}}{E[h(t)^{X_j}]^b}.$$

Этот результат является обобщением одного результата Чжуна и Эрдёша (Chung K. L., Erdös P., Mem. Amer. Math. Soc., 1951, № 6). В. В. Петров

7932. О локальной теореме. Сираждинов С. Х., УзССР Фанлар Акад. докладлари, Докл. АН УзССР, 1959, № 2, 5—6 (рез. узб.)

Сформулирована теорема, доказательство которой приведено в другой статье автора (РЖМат, 1960, 4302). В. В. Петров

7933. Простое доказательство основной теоремы для χ^2-критерия. Рибарц (Ein einfacher Beweis für das dem χ^2-Verfahren zugrundeliegende Theorem. Rybarz J.), Metrika, 1959, 2, № 2, 89—93 (нем.)

Дается новый вариант доказательства известной предельной теоремы для полиномиального распределения, основанной на рассмотрении его как условного распределения для суммы $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = z$ независимых целочисленных и неотрицательных слагаемых x_t, следующих каждое закону Пуассона, при условии $z = n$ ($n \to \infty$). Н. В. Смирнов

7934. Условия для многомерной центральной предельной теоремы в случае ограниченных дисперсий. Такано (Multidimensional central limit criterion in the case of bounded variances. Takano Kinsaku), Ann. Inst. Statist. Math., 1956, 7, № 2, 81—93 (англ.)

Обобщаются результаты о классе предельных распределений для сумм независимых слагаемых и об условиях сходимости на случай конечномерных векторов. О слагаемых предположено, что они имеют конечные дисперсии и что дисперсии сумм ограничены одной константой. Автору неизвестны ранние работы в том же направлении. См. Гнеденко Б. В., Успехи матем. наук, 1944, 10, 230—244; Рвачева Е. Л., РЖМат, 1957, 679.

Б. В. Гнеденко

7935. О практическом значении почти достоверной сходимости. Фреше (Sur la portée pratique de la convergence presque certaine. Fréchet M.), Rev. Inst. internat. statist., 1958, 26, № 1-3, 26—28 (франц., рез. англ.)

Автор приводит свои возражения против мнения, что из двух понятий сходимости: „по вероятности" и „почти достоверной", только первое имеет практическое значение. Р. Х. Дивеев

7936. О некоторых классах случайных функций. Леви (Sur quelques classes de fonctions aléatoires. Lévy Paul), J. math. pures et appl., 1959, 38, № 5, 1—23 (франц.)

Первая часть работы посвящена случайным функциям $\Phi(t)$, $t > 0$, представимым в виде

$$\Phi(t) = \int_0^t F(t, u)\, dX(u), \qquad (1)$$

где $F(t, u)$ — обычная (неслучайная) функция двух переменных, а $X(u)$ — гауссовская (автор, в соответствии с французской традицией, вместо этого говорит „лапласовская") случайная функция с независимыми приращениями. Разумеется, представление (1) определяется не однозначно; например, в нем всегда можно заменить $F(t, u)$ на $F_1(t, u) = F(t, u)/\varphi(u)$, а $dX(u)$ — на $dX_1(u) = \varphi(u)\, dX(u)$ (получаемые при этом два представления вида (1) одной и той же функции $\Phi(t)$ называются строго эквивалентными). Специальный класс представлений (1) образуют собственные представления, обладающие тем свойством, что, каково бы ни было u, $\Phi(t)$ при всех $t > u$ зависит от случайной величины $dX(u)$, и полусобственные представления, в которых указанное свойство выполняется хоть при некоторых значениях u. Однако даже собственные представления не определяются однозначно с точностью до перехода к другим строго эквивалентным представлениям: показывается, что, например, функция Винера имеет бесконечное число собственных представлений, не являющихся строго эквивалентными (и даже не являющихся эквивалентными в смысле работ автора). (РЖМат, 1958, 5719; 1960, 5563). Особую роль играет каноническое представление функции $\Phi(t)$ — представление вида (1), в котором $\int_0^{t'} F(t, u)\, dX(u)$ при $t' < t$ является условным математическим ожиданием величины $\Phi(t)$ при известных значениях $\Phi(s)$, $0 < s \leqslant t'$ (по поводу таких представлений см. вторую из цитированных выше работ автора). Любые два канонических представления функции $\Phi(t)$ обязательно являются строго эквивалентными. Для каждой функции $\Phi(t)$, представимой в виде (1), можно построить также представление того же вида, в котором функция $X(u)$ будет функцией Винера. Далее доказывается, что функции, представимые в виде (1), образуют класс, замкнутый относительно операции сложения (и последующего предельного перехода) независимых случайных функций. Устанавливаются также некоторые условия существования собственных представлений вида (1) функции $\Phi(t)$ и существования канонического собственного представления.

Вторая часть работы посвящена классу C функций $\Phi(t)$, представимых в виде:

$$\Phi(t) = \varphi(t) + \int_0^t F(t, u)\, dZ(u), \qquad (2)$$

где $\varphi(t)$ — неслучайная функция, а $Z(u)$ — произвольная случайная функция с независимыми приращениями, и классу C' функций $\Phi(t)$, представимых в виде:

$$\Phi(t) = \varphi(t) + \int_0^t [F(t, u)\, dX(u) + G(t, u)\, dY(u) + H(t, u)\, dS(u)], \qquad (3)$$

где $X(u)$ — гауссовская случайная функция с независимыми приращениями, $Y(u)$ — стохастически непрерывная случайная функция с независимыми приращениями, не имеющая гауссовской компоненты и $S(u)$ — функция с независимыми приращениями, сосредоточенная в дискретных точках разрыва. Доказывается, что классы C' и $\overline{C}$ совпадают между собой, т. е. что каждая функция, представимая в виде (3), может быть представлена и в виде (2). Далее рассматривается замыкание $\overline{C}$ класса C, состоящее из всех случайных функций $\Phi(t)$ таких, что $\Phi(t)$ при любом фиксированном t является линейным функционалом от значений на $(0, t)$ функции $Z(u)$ с независимыми приращениями. Ставится вопрос о том, совпадает ли или не совпадает $\overline{C}$ с C; приводятся некоторые соображения и примеры, делающие правдоподобной гипотезу о том, что $\overline{C} \neq C$. А. М. Яглом

7937. Об одном специальном типе стохастических дифференциальных уравнений. Зитек (Sur un type spécial d'équations différentielles stochastiques. Zítek František), Чехосл. матем. ж., 1959, 9, № 3, 452—458 (франц.; рез. русск.)

Изучается введенное автором ранее стохастическое дифференциальное уравнение „с ошибкой" для случайных функций $X(t)$ с независимыми приращениями. Это уравнение имеет вид: $\delta X(t) \sim F(t, dt)$ и понимается оно в том смысле, что

$$|\lg M \exp[is\Delta_h X(t)] - \lg M \exp[isF(t, h)]| = o(h)$$

при $h \to 0$ (здесь $\Delta_h X(t) = X(t+h) - X(t)$, $F(t, h)$ — известная случайная функция). Это уравнение сначала изучается для $F(t, h)$ такой, что $M \exp[isF(t, h)] = 1 + g(h)[\varphi(s) - 1]$, где $g(h)$ — неубывающая функция неотрицательного аргумента, причем $g(h) \to 0$ при $h \to 0$, а $\varphi(s)$ — характеристическая функция некоторой случайной величины. Доказано, что при такой $F(t, h)$ для существования решения уравнения $\delta X(t) \sim F(t, dt)$ при начальном условии $P\{X(0) = 0\} = 1$ необходимо и достаточно, чтобы у функции $g(h)$ существовала ограниченная производная в нуле справа. Рассмотрено также уравнение с более общей случайной функцией $F(t, h)$. Отмечается, что случайный процесс пуассоновского типа можно охарактеризовать как решение стохастического уравнения указанного типа, когда $g(h) = h$, а $\varphi(s)$ — характеристическая функция случайной величины дискретного типа. Р. З. Хасьминский

7938. О случайных возмущениях систем дифференциальных уравнений. Ренье (Sur les perturbations aléatoires des systèmes d'équations différentielles. Régnier André), Calcul probabilités et applic. Paris, CNRS, 1959, 149—155 (франц.)

Изучаются системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_t}{dt} = U(X_t, a_t);\ t \in [0, \infty),$$

где $\mathfrak{X} \ni x_t$, $A \ni a_t$ — две связные компактные области евклидовых пространств соответственно R^n и R^p, а $U(x, a)$ — оператор на $\mathfrak{X} \times A$ со значениями из R^n. a_t — случайный процесс. Начальные условия задаются совместным законом распределения вероятностей для (a_0, x_0). Основное предположение: для $\tau > t$, величины x_τ и a_t независимы. Доказано несколько теорем о свойствах функции распределения для x_t. Все теоремы приблизительно одного и того же типа. Например: обозначим $P_t(da)$, $P_t(dx)$ — законы распределения вероятностей соответственно для a_t и x_t. N_t — ядро меры $P_t(da)$.

Теорема 5. x_t будет априори стационарным процессом, а x_t и a_t будут для каждого t независимы, если и только если для $t = 0$: а) эта независимость имеет место; б) априорный закон распределения $P_t(dx)$ является мерой, инвариантной для всех систем

$$\frac{dx_t}{dt} = U(x_t, a),$$

где $a \in \bigcap_{t \in C} UN_t$ (C — множество точек, где a_t непрерывно по вероятности). Р. Ф. Матвеев

7939. Обобщенные случайные процессы и их продолжение до меры. Минлос Р. А., Тр. Моск. матем. о-ва, 1959, 8, 497—518

Автор пользуется гельфандовским определением обобщенного случайного процесса. Основная теорема формулируется следующим образом: Для того чтобы всякий обобщенный случайный процесс, заданный в пространстве, сопряженном счетно-гильбертовому сепарабельному пространству E, продолжался до вполне аддитивной меры, необходимо и достаточно, чтобы E было ядерно. Нужно заметить, что эта теорема является следствием более общей теоремы о характеристических функционалах, полученной позднее. В работе рассматривается также вопрос о множествах, на которых сосредоточена продолженная мера. Например, доказано, что если корреляционный или характеристический функционал обобщенного случайного процесса, заданного в сопряженном к ядерному пространстве, непрерывен в k-м скалярном произведении, то $\mu(E'_{k+1}) = 1$, где E'_{k+1} — подмножество E', состоящее из функционалов, непрерывных в $(k+1)$-м скалярном произведении. В. В. Сазонов

7940. Спектральный тип сдвига дифференциальных процессов со стационарными приращениями. Ито (Spectral type of the shift transformation of differential processes with stationary increments. Itô Kiyosi), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 81, № 2, 253—263 (англ.)

Пусть $X(t, \omega)$, $-\infty < t < \infty$, — измеримый дифференциальный процесс со стационарными приращениями. Тогда преобразования сдвига $\{T_\tau\}$ образуют однопараметрическую группу сохраняющих меру преобразований, действующих на борелевской системе B_x разностных множеств

$$\{\omega;\ X(t, \omega) - X(s, \omega) < c\}$$

и индуцируют группу $\{U_\tau\}$ унитарных операторов в L^2-пространстве H_x на B_x. Доказывается, что H_x изоморфно прямой сумме комплексных чисел и счетному множеству повторений L^2-пространств на вещественной прямой. Таким образом U_τ становится оператором

$$\Phi_\tau : (c, f_1(t),\ f_2(t), \ldots) \to (c, f_1(t+\tau),\ f_2(t+\tau), \ldots),$$

откуда следует, что процессы такого рода спектрально эквивалентны — результат, обобщающий теорему Какутани (Kakutani S., J. Prot. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 1950, 36, 319—323), которая относится к специальному случаю броуновского движения. G. Hufford

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 9, 980.

7941. О среднем времени пребывания броуновского движения. Нисида, Сугаку, 1954, 6, № 1, 28—30 (японск.)

Рассматривается броуновское движение $(X_1(t), X_2(t)\ldots X_n(t)) = A(t)$ с независимыми компонентами, где $X_l(t)$ — одномерное броуновское движение, $X_l(0)=0$. Пусть D — некоторая ограниченная область в n-мерном пространстве R_n и $S_D(T)$ — время пребывания частицы в области D за время $(0, T]$. Доказано, что $\lim_{T\to\infty} E\left\{\frac{S_D(T)}{T}\right\} = 0$. В работе получаются некоторые оценки для $E\left\{\frac{S_D(T)}{T}\right\}$ при разных областях D для разных n. Например, когда $n=2$, а D — круг с центром (0, 0) и радиусом a, то при $a/\sqrt{2T}\leqslant 1$ имеет место неравенство

$$1-\left(1-\frac{a}{\sqrt{2T}}\right)\left[1-P\left(\sqrt{2T}, \sqrt{2a}\right)\right]^2 > E\left\{\frac{S(T)}{T}\right\} > P(T, a),$$

где $P(t, x) = P\{\overline{OA(t)} < x\}$, $\overline{OA(t)}$ — расстояние от 0 до $A(t)$ в R_2. Ван Цы-кун

7942. Ветвящиеся случайные процессы с непрерывным пространством состояний. Иржина (Stochastic branching processes with continuous state space. Jiřina Miloslav), Чехосл. матем. ж., 1958, 8, № 2, 292—313 (англ.; рез. русск.)

Рассматривается марковский процесс в n-мерном евклидовом пространстве на множестве E с неотрицательными координатами. На вероятности перехода $P(s, a, t, A)$ за промежуток времени (s, t) из состояния $a\in E$ в борелевское множество $A\subset E$ налагается, помимо обычных, дополнительное требование

$$P(s, a^{(1)}+a^{(2)}, t, A) = \int_E P(s, a^{(1)}, t, db)P(s, a^{(2)}, t, A-e).$$

В частном случае, когда все меры $P(s, a, t, A)$ сосредоточены на множестве целочисленных точек E, этот процесс является обычным ветвящимся случайным процессом с n типами частиц, причем вектор $a=(a_1,\ldots,a_n)$ соответствует совокупности частиц, состоящей из a_i частиц i-го типа, $i=1,2,\ldots,n$. В общем случае получается формальное обобщение ветвящихся процессов, в которых „числа частиц" a_i могут принимать любые неотрицательные значения. Аппарат производящих функций ветвящихся случайных процессов применяется и в этом случае. Процесс называется сходящимся к нулю: 1) строго, если почти все выборочные функции равны, начиная с некоторого места, нулю; 2) сильно, если почти все выборочные функции сходятся к нулю; 3) слабо, если выборочные функции сходятся к нулю по вероятности для всякого начального распределения. В случае обычных ветвящихся процессов все три сходимости совпадают. Для однородных во времени процессов с дискретным временем находятся необходимые и достаточные условия различных видов сходимости к нулю.

Далее рассматриваются чисто разрывные такие процессы с непрерывным временем. С помощью таких процессов доказывается теорема о том, что распределения числа частиц обычного ветвящегося процесса безгранично делимы, если в нем число частиц каждого типа не убывает. Б. А. Севастьянов

7943. Стохастические процессы, связанные с симметричным колебательным процессом Пуассона. Рамакришнан, Матьюс (Stochastic processes associated with a symmetric oscillatory Poisson process. Ramakrishnan Alladi, Mathews P. M.), Proc. Indian Acad. Sci., 1956, A43, № 2, 84—98 (англ.)

Пусть $m(t)$ есть обобщенный процесс Пуассона с параметром λ. Каждое событие прибавляет ± 1 к m с равными вероятностями. Рассматриваются: распределение, моменты первого прохождения, время возвращения для m. Пусть $y(t) = \int_0^t m(\tau)\,d\tau$; y не является марковским процессом, однако пара (y, m) является марковской. Плотность $\pi(y, t)$ удовлетворяет „обратному" уравнению

$$\partial\pi(y, t)/\partial t = -\lambda\pi(y, t) + \frac{1}{2}\lambda[\pi(y-t,t)+\pi(y+t,t)]. \quad (1)$$

Это связано с фактом, что $y(t)$ для фиксированного t имеет то же распределение, что и марковский процесс $y^*(t)$, $t\geqslant 0$, где y^* — процесс скачков со скоростью λ, скачок в τ имеет величину $\pm\tau$ (с одинаковыми вероятностями). Если $F(y, t)\,dy\,dt$ есть вероятность, что y^* находится в $(y, y+dy)$ впервые за время $(t, t+dt)$, тогда

$$F(y, t) = \frac{1}{2}\lambda\{\pi(y-t, t)+\pi(y+t, t)\}.$$

Последнее может быть вычислено с помощью (1). Обсуждаются три модели рассеивания в ветвящихся процессах.

T. E. Harris

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 9, 980.

7944. Об эргодических теоремах относительно марковских процессов. Цуруми (On the ergodic theorems concerning Markov processes. Tsurumi Shigeru), Tohoku Math. J., 1958, 10, № 2, 146—164 (англ.)

Доказываются следующие эргодические теоремы для марковского процесса $x_0, x_1, x_2,\ldots$ с дискретным временем в абстрактном пространстве. Пусть $Tf(x) = M_x f(x_1)$ и пусть φ — конечная инвариантная мера. Тогда для любой функции $f\in L_p(\varphi)$ $(p\geqslant 1)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}T^j f(x)$$

существует в смысле сходимости в среднем порядка p и в смысле сходимости φ почти наверное.

В. А. Волконский

7945. Аддитивные функционалы от марковского процесса. Гетур (Additive functionals of a Markov process. Getoor R. K.), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 4, 1577—1591 (англ.)

Пусть x_t — траектория однородного марковского процесса с полугруппой операторов U_t и V_x — функция на фазовом пространстве. Рассматривается аддитивный функционал вида $L(t) = \int_0^t V(x_s)\,ds$ от траекторий этого процесса и полугруппа операторов $T_t: T_t f(x) = M_x e^{-L(t)} f(x_t)$. Пусть Ω и Ω' — инфинитезимальные операторы соответственно полугрупп U_t и T_t и V — оператор умножения на $V(x)$. В достаточно широких предположениях доказывается, что операторы Ω и Ω' как операторы в пространстве $L^2(m)$ по некоторой мере m, связанной с переходной функцией процесса, связаны следующими соотношениями:

Если $V(x)$ ограничена, то

$$\Omega' = \Omega - V. \quad (1)$$

Если $V(x)$ неотрицательна, то область определения $D_{\Omega'}$ оператора Ω' содержит пересечение $D_\Omega \cap D_V$ областей определения операторов Ω и V, и если $\varphi\in D_\Omega \cap D_V$, то $\Omega'_\varphi = \Omega_\varphi - V_\varphi$.

Равенство (1) было доказано в работе Е. Б. Дынкина (РЖМат, 1956, 8165) для операторов в пространстве C непрерывных ограниченных функций и для $V(x)\in C$, на которую в статье нет ссылки. В. А. Волконский

7946. Марковские функции от марковского процесса. Розенблатт (Functions of a Markov process that are Markovian. Rosenblatt M.), J. Math. and Mech., 1959, 8, № 4, 585—596 (англ.)

Рассматривается семейство $\{X(n)\}$ марковских процессов с дискретным параметром, порожденное стационарной переходной функцией $P\{x, B\}$ и всевозможными начальными распределениями $P\{B\}$, и некоторая функция $y = f(x)$, определяемая на множестве Λ значений процесса $X(n)$ со значениями во множестве Λ', с помощью которой определяется новое семейство случайных процессов $\{Y(n)\} = \{f(X(n))\}$.

В предположении, что семейство мер $P(x, f^{-1}B')$, $x \in \Lambda$, $B' \in \mathfrak{B}'$ (где $\mathfrak{B}'$ — борелевское поле в Λ'), индуцированное на поле $f^{-1}\mathfrak{B}'$ переходной функцией и f, подчинено некоторой сигма-конечной мере, получены необходимые и достаточные условия марковости семейства случайных процессов $\{Y(n)\}$ независимо от начального распределения $P\{B\}$ для $X(n)$.

Аналогичные условия получены и для марковских процессов с непрерывным параметром, но со счетным множеством возможных значений. В. М. Волков

7947. К теории неоднородных цепей Маркова. Сарымсаков Т. А., Докл. АН УзССР, 1956, № 8, 3—7

Формулируется условие выполнения эргодического принципа для неоднородной цепи Маркова, управляемой последовательностью матриц

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots, \qquad (1)$$

заключающееся в том, что $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ расходится, где λ_k — мера эргодичности матрицы P_k (число λ называется мерой эргодичности стохастической матрицы P конечного или бесконечного порядка, если для любой пары строк существует хотя бы один столбец, на пересечении которого с эти и строками находятся положительные элементы со значением не меньшим, чем λ). Далее в терминах мер эргодичности рассматриваются условия приложимости центральной предельной теоремы (ц. п. т.) для частичных сумм последовательности

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \qquad (2)$$

случайных величин, связанных в цепь Маркова, закон которой задается последовательностью матриц (1). Приводятся также условия применимости к последовательности (2) закона повторного логарифма и условия применимости многомерной ц. п. т. для последовательности векторов, связанных в неоднородную цепь Маркова. В заключение указывается, что доказанные теоремы дополняют исследования Ю. В. Линника (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1949, **13**, № 1, 65—94) и Н. А. Сапогова (Докл. АН СССР, 1947, **58**, № 9, 1905—1907), а новая формулировка закона повторного логарифма обобщает соответствующий результат Н. А. Сапогова (Уч. зап. ЛГУ. Сер. матем., 1950, вып. 19, 160—179). Все теоремы приводятся без доказательства.

Б. А. Рогозин

7948. О характеристических соотношениях непрерывных цепей Маркова кратности p. Теодореску (Asupra relaţiilor caracteristice ale lanţurilor Markov continue de multiplicitate p. Theodorescu Radu), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne Sec. mat. şi fiz., 1955, **7**, № 3, 763—774 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматривается стохастический процесс с непрерывными параметрами и конечным пространством состояний. Предполагается, что это есть процесс Маркова кратности p; это означает, что переходная вероятность $P_{ij}(s, t)$ удовлетворяет условиям

$$P_{ik}(r, s) \geqslant 0; \quad \sum_{k} P_{ik}(r, s) = 1,$$

$$P_{ik}(s, t) = \sum_{j} P_{ij}(s, u) P_{jk}(u, t), \quad (s < u < t),$$

где $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_p)$, $s_1 \leqslant \ldots \leqslant s_p$, $\mathbf{s} \leqslant \mathbf{r}$ означает соответствующие неравенства для всех компонент, а $\boldsymbol{i}$ — p-мерный вектор, компоненты которого означают состояния. Для $p = 1$ это обычные соотношения марковских цепей. При некоторых условиях регулярности существуют функции $Q_{jk}^{(h)}(t)$, удовлетворяющие некоторым условиям совместности, для которых

$$\frac{\partial P_{ik}(s, t)}{\partial t_h} = \sum_{j} P_{ij}(s, t)\, Q_{jk}^{(h)}(t),$$

$\mathbf{s} \leqslant \mathbf{u} \leqslant t$, $h = 1, \ldots, p$.

Эта система уравнений с переменным $\mathbf{t}$, фиксированным $\mathbf{s}$ и граничным условием $P_{ik}(s, s) = \delta_{ik}$ однозначно определяет переходные вероятности. Существует подобная же система, соответствующая взятию производных по s_h. При более строгих условиях регулярности результаты остаются в силе для счетных пространств состояний.

Примечание референта. Вероятностная основа определений автора не обсуждается.

Если каждый вектор $\mathbf{s}$, $\mathbf{t}$, $\mathbf{u}$ имеет одинаковые компоненты, соотношения превращаются в те, которые удовлетворяются обыкновенной цепью Маркова. Поэтому неясно, насколько общим является рассмотренный автором случай и какое он имеет отношение к случаю $p = 1$. J. L. Doob

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 6, 635.

7949. Стохастические процессы кратности p. Теодореску (Procese stochastice continue de multiplicitate p. Theodorescu Radu), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi fiz., 1955, **7**, № 3, 775—794 (рум., рез. русск., франц.)

Автор рассматривает цепи кратности p с непрерывным параметром и непрерывным пространством состояний, расширяя результаты предыдущей статьи (реф. 7948), которые относились к счетным пространствам состояний, и получает обобщения для обычных дифференциальных уравнений для переходных вероятностей марковских процессов. J. L. Doob

Из Math. Revs, 1956, **17**, № 6, 636.

7950. О новом определении случайной функции и эргодическая теорема. Дедебан, Мачадо (Sobre una nueva definición de función aleatoria y su teorema ergódico. Dedebant G., Machado E. A. M.), Meteoros, 1954, **4**, № 4, 287—300 (исп., рез. франц.)

Пусть $x(t)$ — стационарный в узком смысле стохастический процесс, $t \geqslant 0$, $Ex(t) = 0$, $Ex^2(t) = 1$. Кривая C в гильбертовом пространстве, определяемая таким стохастическим процессом ($x(t)$ — точка гильбертова пространства), лежит на единичной сфере и длина части C для $0 \leqslant t \leqslant T$ равна kT, k — некоторая постоянная. В случае, когда C — окружность, корреляционная функция процесса есть $\rho(t) = Ex(0)\, x(t) = \cos kt$. Эргодическая теорема, упомянутая в заголовке, заключается в том, что в этом случае $EM^2(T) = 2(1 - \cos kT)/k^2T^2$, где $M(T) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, dt$, так что $M(T)$ не только приближается в среднем квадратическом к 0 при $T \to \infty$, но и обращается в нуль для T, кратных $2\pi/k$.

D. Blackwell

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 1, 49.

7951. Линейные стохастические функциональные уравнения, допускающие сдвиг, и случайные распределения. Онояма (Linear translatable stochastic functional equations and random distributions. Onoyama Takuji), Кюсю дайгаку ригакубу киё, Mem.

Fac. Sci. Kyusyu Univ., 1956, A10, № 1, 29—43 (англ.)

Пусть $Y(\Phi)$ — специфицированное стационарное случайное распределение, т. е. случайно-значная (в L_2) функция, определенная на шварцевском пространстве вещественно-значных C_∞-функций с компактными носителями на вещественной прямой. Пусть ковариационная функция $Y(\Phi)$ инвариантна относительно сдвигов. Исследуется решение уравнения

$$\int_0^1 X[\Phi(t-h)]\,d\varphi(h) = Y(\Phi),$$

где φ — функция ограниченной вариации на $[0, 1]$ и X — случайное распределение. Решение получено в терминах случайного ряда Коши, введенного Китагава (Kitagawa T., Jap. J. Math., 1952, 22, 1—18) и зависит от вида функции $G(\lambda) = \int_0^1 e^{\lambda t}\,d\varphi(t)$. Если $X(t)$ — случайный процесс со стационарными приращениями K-го порядка и если $Y(\Phi) \equiv 0$, то члены ряда Коши, соответствующие некоторым нулям G, обращаются в нуль.

J. L. Doob.

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 11, 1218.

7952. Прогнозирование стационарного процесса с выпуклой корреляционной функцией. Гаек (Predicting a stationary process when the correlation function is convex. Hájek Jaroslav), Чехосл. мат. ж., 1956, 8, № 1, 150—154 (англ.; рез. русск.)

Доказывается следующая теорема:

Для любого стационарного случайного процесса $x(t)$, корреляционная функция $\mathfrak{B}(\tau)$, $0 \leqslant \tau < \infty$, которого является функцией выпуклой, средний квадрат $\sigma^2(s)$ наилучшего линейного прогноза на время s вперед удовлетворяет неравенству

$$\sigma^2(s) \geqslant \mathfrak{B}(0) - \mathfrak{B}(s).$$

Отсюда, в частности, вытекает, что средний квадрат ошибки наилучшего прогноза, использующего лишь последнее известное нам значение процесса $x(t)$, превосходит средний квадрат ошибки общего наилучшего линейного прогноза не более чем в $1 + \frac{\mathfrak{B}(s)}{\mathfrak{B}(0)}$ раз (т. е. всегда не более чем в 2 раза). Доказательство теоремы существенно опирается на результаты, полученные автором ранее.

А. М. Яглом

7953. Об одной задаче случайного блуждания. Вилкас Э. И., LietTSR Mokslų Akad. darbai, Тр. АН ЛитССР, 1959, Б 2(18), 31—39 (рез. лит.)

Рассматривается случайное блуждание по целочисленной решетке в n-мерном евклидовом пространстве. Пусть $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_0$ — точки этого пространства с целыми координатами. $P(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ — вероятность перехода за 1 шаг из точки $\mathbf{x}$ в точку $\mathbf{x}_0$. Делаются следующие допущения: 1) $P(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = P(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$; 2) $\sum_{\mathbf{x}} P(\mathbf{x}) = 1$, $P(0) = 0$; 3) $\sum_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^2 P(\mathbf{x}) < \infty$; ($\mathbf{x}^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$; $x_1, \ldots, x_n$ — координаты точки $\mathbf{x}$).

Теорема. Пусть невырожденное случайное блуждание обладает перечисленными свойствами. Тогда необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы частица возвращалась в начальную точку с вероятностью 1, являются условия:

$$1)\ n < 2;\ 2)\ \sum_{\mathbf{x}} x_1 P(\mathbf{x}) = \ldots = \sum_{\mathbf{x}} x_n P(\mathbf{x}) = 0.$$

В работе выведена также формула, выражающая вероятность возвращения частицы в начальную точку через характеристическую функцию блуждания. В качестве примера указанная вероятность возвращения P вычисляется для случая блуждания по плоскости: Пусть P_1, P_2, P_3, P_4 — вероятности перехода за один шаг в соседние точки; $\sum_{k=1}^{4} P_k = 1$; P_1, P_2 — соответствуют движению по одной оси, P_3, P_4 — по другой. Получено, что

$$P = 1 - \frac{2\pi}{\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{a - b\cos t}}},$$

где $a = 1 - 4(P_1P_2 + P_3P_4)$; $b = 8\sqrt{P_1P_2P_3P_4}$.

Р. Ф. Матвеев

7954. Метод Монте-Карло. I. Стохастические схемы, связанные с проблемой измерения неполных данных. Шарль, Ванденпла (La méthode de Monte-carlo. I. Schémas stochastiques associés à un problème de mesure à données incomplètes. Charles J., Vandenplas P.), Bull. Assoc. ingrs issus Ecole applic. artill. et génie, 1959, 37, № 2, 1—6 (франц.; рез. флам.)

Имеется линейка длины l, не содержащая никаких делений. Требуется измерить стороны a и b плоского прямоугольника, не делая на нем никаких отметок и не деля линейку на части. Авторы предлагают два различных метода решения этой задачи: первый метод основан на использовании последовательности независимых реализаций случайной величины, распределенной равномерно в интервале $(-\pi, \pi)$; второй — на использовании случайной величины, распределенной равномерно на $(0, l)$.

В. М. Волков

7955. Метод Монте-Карло. II. Замечания об одной проблеме Монте-Карло. Франкс (La méthode de Monte-Carlo. II. Remarques sur un problème de Monte-Carlo. Franckx E.), Bull. Assoc. ingrs issus Ecole applic. artill. et génie, 1959, 37, № 2, 7—9 (франц.; рез. флам.)

Подчеркивается, что в задачах, подобных рассмотренной в предыдущей заметке, где требуется придумать и реализовать случайный процесс, позволяющий численно оценить неизвестные величины, главная трудность заключается именно в отыскании подходящего случайного процесса, некоторые параметры которого выражаются через искомые неизвестные величины. Это, по мнению автора, объясняется тем, что решения таких задач никогда не являются единственными. В качестве иллюстрации описывается третье решение задачи измерения сторон прямоугольника (реф. 7954), основанное на использовании классического метода иглы Бюффона.

В. М. Волков

7956. t-распределения, относящиеся к случайному интегрированию. Китагава (The t-distributions conserning random integrations. Kitagawa Tosio), Кюсю дайгаку ригаку-бу киё, Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., 1953, A8, № 1, 31—41 (англ.)

В ранней статье автор ввел три типа случайных аппроксимаций для интеграла от непрерывной функции $f(t)$ на интервале $(0, 1)$ и нашел их средние значения и дисперсии. Здесь он исследует соответствующие t-распределения. В частности, для первого типа t-распределение определяется следующим образом: Пусть $f(t)$ — фиксированная функция; $t_1, \ldots, t_n$ — независимые случайные величины, равномерно распределенные на $[0, 1]$:

$$\bar{f} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} f(t_i) \quad \text{и} \quad s^2 = (n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\{f(t_i) - \bar{f}\}^2.$$

t-распределением автор называет распределение величины $t = n^{1/2}\bar{f}/s$. Для других типов рассматривается несколько другая форма t. При некоторых ограничительных условиях в качестве первой аппроксимации к t-распре-

делению автор получает обычное распределение Стьюдента. Используя некоторые известные результаты, включающие разложения Грама — Шарлье типа A, автор получает лучшие аппроксимации. Выведенные формулы слишком сложны, чтобы их можно было приводить здесь.

H. P. Mulholland

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 10, 8.6.

7957. Количество информации и энтропия для непрерывных распределений. Гельфанд И. М., Колмогоров А. Н., Яглом А. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 3. М., АН СССР, 1958, 300—320

Излагаются результаты более ранних работ по теории информации. Дается определение количества информации $I(\zeta, \eta)$, содержащейся в одном случайном объекте ζ (случайная величина со значениями в абстрактном измеримом пространстве) относительно другого случайного объекта η, и выводятся основные свойства этой величины I. Излагается в абстрактных терминах основная теорема Шеннона. Приводятся формулы для вычисления количества информации для гауссовских распределений и для гауссовских случайных процессов, а также ε-энтропии (скорости создания сообщений) для некоторых случайных величин и случайных процессов. Для некоторых случаев приводятся оценки сверху величины ε-энтропии. Вычисляется количество информации на единицу времени, содержащейся в одном стационарном гауссовском процессе относительно другого такого процесса, связанного с первым, и порядок ε-энтропии, которую несет стационарный гауссовский процесс за единицу времени для некоторых, наиболее практически интересных спектральных плотностей.

В. А. Волконский

7958. Алгебраическое декодирование для бинарного канала со стиранием. Эпстейн (Algebraic decoding for a binary erasure channel. Epstein M. A.), IRE Nat. Convent. Rec., 1958, **6**, № 4, 56—69 (англ.)

Рассматривается бинарный канал без памяти со стиранием, т. е. канал с алфавитом 0, 1 на входе, 0, 1, x на выходе и матрицей вероятностей перехода

$$\begin{pmatrix} p & 0 & q \\ 0 & p & q \end{pmatrix}, \quad p+q=1.$$

Здесь слово $A=(a_1, \ldots, a_n)$ на входе может перейти в слово $B=(b_1, \ldots, b_n)$ на выходе, лишь если или для всех i, или $a_i=b_i$, или же i-й символ „стерт": $b_i=x$, причем условная вероятность $P(B \mid A)=p^{n-m}q^m$, где m — число стертых символов. Чтобы вести передачу со скоростью R выбирают $2^{[nR]}$ слов $A_1, \ldots, A_{2^{[nR]}}$ на входе. Оптимальный метод декодирования состоит здесь просто в том, чтобы, получив слово на выходе, декодировать его как одно из слов, которое может перейти в B. Для того, чтобы провести такое декодирование, нужно перебирать слова A_i, сравнивая их со словом B, что требует, вообще говоря, числа алгебраических операций, экспоненциально растущего с ростом n. Можно использовать корректирующие коды $A_i=\{a_1^i, \ldots, a_n^i\}$ Хемминга, т. е. коды такие, что символы $a_1^i, \ldots, a_{[nR]}^i$, называемые информационными, принимают всевозможные значения, а символы a_j^i, $j=[nk]+1, \ldots, n$, называемые проверочными, задаются как

$$a_j^i=\sum_{k=1}^{[nR]} b_{jk}a_k^i, \qquad (1)$$

где (b_{jk}) — матрица с элементами 0, 1, характеризующая код, и сложение и умножение проводится по модулю 2. Как показано Элайасом (РЖМат, 1957, 8849; 1958, 6041), вероятность ошибки для наилучшего корректирующего кода убывает при $n \to \infty$ и достаточно большой скорости R асимптотически не медленнее, чем вероятность ошибки для наилучшего из всех кодов. Для корректирующего кода оптимальное декодирование сводится к решению системы линейных уравнений и, как показывает автор, требует не более $\frac{1}{2}n^3+n^2$ алгебраических операций.

Далее автор вводит новый класс кодов, которые он называет «сверточными кодами» (convolution codes). В этих кодах имеется бесконечная периодическая последовательность информационных и проверочных символов, причем на N символов приходится в среднем NR информационных символов (т. е. символов, образующих передаваемое сообщение). Каждый проверочный символ задается аналогично (1) как линейная комбинация предыдущих информационных символов. Вероятность ошибки для сверточных кодов убывает при $n \to \infty$ так же быстро, как для корректирующих кодов, но зато здесь оказывается возможным последовательный метод декодирования: сначала стертый символ пытаются найти, решая одно уравнение, потом, если это не удалось, решают систему двух уравнений и т. д. Вероятность того, что понадобится решать систему m уравнений, убывает показательно с ростом m и, основываясь на этом, автор показывает, что среднее число операций, нужных для декодирования, теперь равномерно ограничено по n. Этот результат получен при случайном выборе матрицы кодирования (B_{ij}), однако отсюда следует существование определенной матрицы (b_{ij}), для которой число операций, необходимых для декодирования, также ограничено равномерно по n.

Р. Л. Добрушин

7959. Задача о взвешивании монет, посимвольном кодировании без потерь для непростых оснований и т. п. Голе (Notes on the penny-weighing problem, lossless symbol coding with nonprimes, etc. Golay Marcel J. E.), LRE Trans. Inform. Theory, 1958, **4**, № 3, 103—109 (англ.)

Пусть $C^n(s)$ — совокупность последовательностей $(x_1, \ldots, x_n)$, где x_i принимают s разных значений $E_1, \ldots, E_s$. Набор $c_1, \ldots, c_N$ элементов $C^n(s)$ назовем плотно упакованным кодом для коррекции k ошибок, если для каждого $c \in C^n(s)$ можно указать, и притом единственный, элемент кода c_i, отличающийся от c не более чем в k местах (такое определение введено потому, что при передаче одного из сигналов c_i мы можем однозначно восстановить переданное сообщение, если при передаче в него вкрадывается не более k ошибок (провести коррекцию k ошибок). Название „плотно упакованный" связано с тем, что из существования плотно упакованного кода вытекает невозможность построить код для коррекции k ошибок с большим числом элементов N (при тех же n и s). Если G — группа с s элементами, то $C^n(s)$ можно отождествить с группой, являющейся прямым произведением n экземпляров группы G. Автор рассматривает случай $s=p^\alpha$, где p — простое число, а α — целое число, и выбирает в качестве G прямое произведение α экземпляров группы целых чисел по сложению по модулю p (циклической группы порядка p). Плотно упакованный код автор называет посимвольным кодом без потерь, если набор $c_1, \ldots, c_N$ образует подгруппу группы $C^{(n)}(s)$. В предыдущей работе (Proc. I. R. E., 1949, **37**, 657) автор построил посимвольные коды без потерь для коррекции одной ошибки при простых s. В реферируемой работе построенный автором код для $s=$, $n=13$ применяется к известной задаче о выделении среди 13 монет фальшивой путем 3 взвешиваний. Далее метод автора для построения кодов для коррекции одной ошибки обобщается на случаи s равных 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 3^3, 3^4, 3^5, 5^3, 5^4, 7^3 и p^2, где p — простое число. Наконец, высказываются некоторые соображения по поводу доказательства несуществования посимволь-

ных кодов без потерь для некоторых значений параметров. Р. Л. Добрушин

7960. Теория систем передачи информации с обратной связью. Чжан (Theory of information feedback systems. Chang Sheldon S. L.), IRE Trans. Inform. Theory, 1956, 2, № 3, 29—40 (англ.)

Рассматривается следующий процесс передачи информации. Пусть X — совокупность передаваемых слов на входе канала и Y — совокупность принимаемых слов на выходе канала. Множество X и множество Y разделены на A групп: $X_1, \ldots, X_A$ и $Y_1, \ldots, Y_A$. Пусть переданный сигнал на входе $x \in X_i$ в результате передачи принят как сигнал $y \in Y_j$. Тогда при помощи канала обратной связи посылается сообщение о том, что принятый сигнал принадлежит j-й группе. Из-за наличия помех в канале обратной связи на входе канала будет получено сообщение о том, что принятый сигнал принадлежит k-й группе. Если k совпадает с i, то со входа на выход посылается сигнал, подтверждающий правильность передачи, если же k не совпадает с i, то посылается сигнал, предупреждающий об ошибке, и принимаются какие-либо меры по ее исправлению. Считаются заданными вероятности перехода для посылаемых сигналов в каналах прямой и обратной связи. Исследуется выигрыш в измеряемой по Шеннону информации, возникающий в результате использования канала обратной связи (По поводу результатов подобного типа см. также РЖМат, 1959, 10, 12). Подробно разбираются более простые случаи и, в частности, случай, когда для исправления ошибки проводится повторение передачи одного и того же слова до тех пор, пока k не совпадет впервые с i. Применяются также корректирующие коды Хемминга.

Р. Л. Добрушин

7961. Декодирование списком для канала с шумами. Элайас (List decoding for noisy channels. Elias Peter), LRE WESCON Convent. Rec., 1957, **1**, № 2, 94—104 (англ.)

Рассматривается бинарный симметричный канал без памяти, заданный вероятностями q правильного приема и $p = 1 - q$ ошибки. При длине n передачи вероятность того, что слово x (последовательность из n нулей и единиц) перейдет в слово y, равна $p(y \mid x) = q^{|x-y|} p^{n-|x-y|}$, где $|x - y|$ — число совпадающих знаков в словах x и y. Предлагается, выбрав M слов $x_1 \ldots, x_M$ на входе (код), использовать следующий метод декодирования. Для некоторого фиксированного L („длина списка“) каждому слову на выходе y сопоставляется совокупность L индексов $J(y)$ („список“), принимающих значения $1, \ldots, M$, причем передача считается правильной, если переданное слово x_j перешло на выходе в слово y такое, что j входит в список $J(y)$ (т. е. $j \in J(y)$). Вероятностью ошибки называется поэтому

$$P = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M} \sum_{j \notin J(y)} p(y \mid x_j). \qquad (1)$$

Через $\overline{P}_n(M, L)$ обозначим минимум вероятности ошибки по всем ходам и методам декодирования (т. е. „спискам“) при фиксированных n, M, L. При $L = 1$ описанный метод передачи превращается в обычный и вероятность $\overline{P}_n(M, 1)$ изучалась ранее (РЖМат, 1957, 8841; 1958, 6041). Отмечается, что скорость передачи информации будет здесь равна $\frac{\log M - \log L}{n}$ и поэтому, чтобы вести передачу со скоростью R, надо положить $M = L2^{nR}$. Вводятся естественные нижняя и верхняя оценки

$$P_n^{\mathrm{opt}}(M, L) \leqslant \overline{P}_n(M, L) \leqslant P_n^{\mathrm{av}}(M, L). \qquad (2)$$

Здесь $P_n^{\mathrm{opt}}(M, L)$ определяется из предположения, что декодирование выявляет наиболее вероятные ошибки и может быть явно вычислена. Вероятность $P_n^{\mathrm{av}}(M, L)$ представляет собой среднее значение вероятности P при частном выборе кода и оптимальном декодировании. Известно, что при $L = 1$ и $M = L2^{nR}$, $n \to \infty$, отношение $P^{\mathrm{av}}/P^{\mathrm{opt}}$ стремится к конечному пределу при $R \geqslant R_0$ и стремится к бесконечности при $R < R_0$ (где R_0 может быть явно вычислено). Таким образом оценка (2) позволяет вычислить лишь логарифмическую асимптотику $\overline{P}$ и лишь при $R \geqslant R_0$. Доказывается, что при $L \to \infty$ дело обстоит иначе. А именно, для любого R (меньше пропускной способности канала) и любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших L и достаточно больших n

$$1 \leqslant \frac{P_n^{\mathrm{av}}(L2^{nR}, L)}{P_n^{\mathrm{opt}}(L2^{nR}, L)} \leqslant 1 + \varepsilon. \qquad (1)$$

Таким образом оценка (2) позволяет вычислить логарифмическую асимптотику вероятности ошибки для достаточно больших (при любом заданном R) значений L. Кроме того, отмечается, что из (3) следует, что при достаточно больших L и n почти все коды почти столь же хороши, как и наилучший код. Р. Л. Добрушин

7962. Последовательное декодирование для надежной передачи. Возенкрафт (Sequential decoding for reliable communication. Wozencraft J. M.), IRE Nat. Convent. Rec., 1957, 5, № 2, 11—25 (англ.)

Предлагается новая схема последовательного декодирования для случая бинарного симметричного канала. В отличие от известных способов декодирования, при которых объем памяти растет экспоненциально с ростом длины кодовой комбинации, предлагаемая схема обеспечивает лишь квадратичный рост объема памяти. Работа содержит систематический обзор результатов по теории оптимального кодирования для случая бинарного симметричного канала. Б. С. Флейшман

7963. Коды с разделительными знаками. Кириллов Н. Е., Электросвязь, 1959, № 6, 5—10

Рассматриваются коды, у которых после кодового обозначения передаваемого символа следует комбинация, обозначающая разделительный знак. Как отмечает автор, рассмотрение класса таких кодов интересно по двум причинам: 1) ограничено действие помехи, 2) кодирование и особенно декодирование передаваемых символов осуществляется проще сравнительно с высокоэффективными статистическими кодами. Пусть алфавит кода состоит из b элементов. За разделительный знак принимается некоторая фиксированная комбинация из T элементов. Вводятся два требования на возможные кодовые комбинации, которые позволяют однозначно декодировать. Затем, рассматривая кодовое дерево, автор получает рекуррентную формулу для числа допустимых кодовых комбинаций $\eta_j(b, T)$ из j элементов алфавита: $\eta_j(b, T) = \frac{b-1}{b}(b^j - b^{j-T} - \eta_1 b^{j-T-1} - \ldots - \eta_t b^{j-T-i})$, где $0 \leqslant j < \infty$, $j - T - i \geqslant 1$. В приложении доказывается более простая рекуррентная формула $\eta_j(b, T) = (b-1)[\eta_{j-1} + \eta_{j-2} + \ldots + \eta_{j-T}]$, которой автор и пользуется.

Проводится оценка эффективности кодирования кодами этого класса. Приводится условие наилучшего, с точки зрения эффективности, кодирования (условие на выбор b и T). Приводится пример эффективного кода с разделительным знаком. В эффективности он уступает коду Фэно — Шеннона на 4%. Э.-Г. И. Рузайкин

7964. Приближенный метод разложения на компоненты смеси плотностей типа Коши. Меддьеши (Közelítő eljárás Cauchy-sűrűségfüggyények keverékének, összetevőkre bontására. Medgyessy Pál), A magyar tud. akad. Alkalm. mat. int. közl., 1954 (1955), **3**, № 3-4, 321—329 (венг.; рез. русск., англ.)

7965. Новые исследования об основах теории вероятностей. Гермес (Neuere Untersuchungen zu den Grundlagen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Hermes H.), Sitzungsber. Berliner Math. Ges., 1957—1958, 8—11 (нем.)

7966 К. Некоторые чисто детерминированные процессы. Розенблатт (Some purely deterministic processes. Rosenblatt Murray. New York., Res. Div. Coll. Engng, New York Univ., 1956, 21 pp.) (англ.)

Автор рассматривает две спектральные плотности для чисто детерминированных стационарных стохастических процессов с дискретным параметром и в каждом случае находит скорость приближения к 0 среднеквадратичной ошибки прогноза только по предшествующим n моментам времени (а не по всему прошлому). Например, если спектральная плотность непрерывна и положительна на $\left[\frac{1}{2}\pi-\alpha, \frac{1}{2}\pi+\alpha\right]$ и обращается в нуль вне этого интервала везде в $[0,2\pi]$, то указанная ошибка прогноза имеет величину порядка $\left(\sin\frac{1}{2}\alpha\right)^{2n+1}$. J. L. Doob

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 3, 241

7967 К. Вероятность и информация. Яглом, Яглом (Probabilité et information. Yaglom A. M., Yaglom I. M. Trad. Paris, Dunod, 1959, X, 175 p., ill., 1350 fr.), Bibliogr. France, 1959, 148, № 44, 1128 (франц.)

Перевод с русского (РЖМат, 1959, 9303 К).

7968 К. Об основных теоремах теории информации. Хинчин (On the fundamental theorems of information theory. Khinchin A. Ia. Transl. from the Russ. Newtonville, Mass., 1956, 84 pp.) (англ.)

Перевод с русского (РЖМат, 1957, 2937).

7969 К. Понятие и вероятность. Нольфи (Idee und Wahrscheinlichkeit. Nolfi Padrot, Neuchatel, Griffon, 1956, 215 S., 15 fr.) (нем.)

Книга содержит эпистолярную дискуссию о природе научных теорий вообще и теории вероятностей в частности. Автор вкратце приводит некоторые концепции о природе вероятности. Значительное место отводится так называемой „игровой" (Spielraum) теории фон Криса. Подвергаются критике возражения фон Мизеса против классической теории вероятностей. По-видимому, автор склоняется к мысли, что невозможно построить универсальную теорию вероятностей, покрывающую все области приложений. O. Ore

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 7, 604.

7970 К. Теория вероятностей. Рихтер (Wahrscheinlichkeitstheorie. Richter Hans. Berlin—Göttingen — Heidelberg, Springer, 1956, xii, 435 S., 66.00 DM) (нем.)

Книга отражает современную тенденцию в учебниках по теории вероятностей: включать независимое изложение некоторых разделов теории меры. От читателя не требуется предварительных знаний меры; однако ему придется прочесть более 80 стр. чистой теории меры, чтобы дойти до самых элементарных вероятностных понятий. Несмотря на это, а также несмотря на теперь стандартные теоретико-мерные определения вероятностных понятий (случайная величина — измеримая функция и т. д.), автор, вероятно по педагогическим причинам, пытается и в обозначениях и в изложении отделить теорию вероятности от теории меры. Например, он рассматривает отдельно различные типы сходимостей последовательности измеримых функций и затем различные типы сходимостей случайных величин. В первом (втором) случае функция (случайная величина) обычно обозначается f или $g(a)$ с соответствующим индексом. Во втором случае вводится новое название „усиленная сходимость" для сходимости почти всюду и различные типы сходимости определяются независимо от первого случая. Эти типы сходимости можно перевести на язык теории меры и многие теоремы о последовательностях измеримых функций, полученных в первом случае, формулируются на языке теории вероятностей. Следует ли рассматривать это повторение как ценный педагогический прием, как способ подчеркивания тождественности между вероятностью и мерой, или же как интригующий намек, что эти два понятия тем или иным таинственным образом различаются друг от друга, — зависит от подготовленности и предрассудков читателя. Во всяком случае точка зрения автора имеет то преимущество, что он не просто определяет вероятностные понятия на языке теории меры, а придает им всегда вероятностный смысл. Семь глав охватывают следующий материал: гл. I. Основания теории меры (меры и их построение); гл. II. Понятия вероятности (интуитивной и математической); гл. III — Элементы теории вероятностей; гл. V. Случайные величины и общие вероятностные вопросы (независимость, математические ожидания, характеристические функции, сходимость последовательности функций распределения; гл. VI. Специальные вероятностные распределения (гамма, мультиномиальное, гауссово и статистические распределения, производные от гауссова); гл. VII. Сходимость случайных величин (сумм независимых случайных величин, закон ноль-один, закон больших чисел, центральная предельная теорема). Объем книги, если еще учесть и место, занятое всякого рода разъяснениями, не допускает той полноты изложения, какую, например, можно найти в книге Лоэва (Loève M., Probability theory, Van Nostrand, New York, 1955), однако все затронутые предметы получают адекватную и строгую трактовку. Дискуссионный стиль изложения облегчает чтение, однако он делает неудобным пользование книгой для справочных целей. J. L. Doob

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 9, 761—763.

7971 К. Элементы теории вероятностей и некоторые ее приложения. Крамер (The elements of probability theory and some of its applications. Cramér Harald. Stockholm, Almqvist & Wiksell, New York, John Wiley & Sons, 1954, 281 pp., ill.) (англ.)

См. РЖМат, 1959, 9324.

7972 К. Случайные процессы в автоматическом регулировании. Лейнинг, Баттин (Processus aléatoires et systèmes asservis. Laning J.-H., Jr, Battin R.-H. Trad. de l'angl. Paris, Dunod, 1959, IX, 443 p., ill., 6600 fr.) (франц.)

См. РЖМат. 1958, 8139.

7973 Д. Некоторые предельные теоремы для случайных функций. Розанов Ю. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1959

7974 Д. К теории характеристических функций стохастических распределений. Лёффель (Beiträge zur Theorie der charakteristische Funktionen stochastischer Verteilungen. Loeffel Hans.—Diss. Doct. Math., Eidgenöss. Techn. Hochschule Zürich, Bern, Stämpfli und Cie, 1956, 49 S., ill.) (нем.)

Работа посвящена элементарным следствиям из теоремы: Если $\varphi(z, \alpha)$ — характеристическая функция от z при каждом α, $V(\alpha)$ — неубывающая функция и существует $\Phi(z) = [V(b) - V(a)]^{-1} \int_a^b \varphi(z, \alpha)\, dV(\alpha)$, то $\Phi(z)$ — характеристическая функция. В частности, если $a = 0$, $b = 1$, $V(\alpha) = \alpha$, $\varphi(z, \alpha) = \varphi(\alpha z)$, так что $\Phi(z) = \int_0^1 \varphi(\alpha z)\, d\alpha = z^{-1} \int_0^z \varphi(u)\, du$ — характеристическая функция. Автор называет ее преобразованием Жиро (РЖМат, 1958, 8946 Д). Ю. В. Линник

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

7975. О классе асимметричных распределений. Саймон (On a class of skew distribution functions. Simon Herbert A.), Biometrika, 1955, **42**, № 3-4, 425—440 (англ.)

Распределения частоты слов, размеров городов, доходов и биологических родов (по числу видов) являются все весьма асимметричными. Их можно аппроксимировать, по крайней мере в концевой области, функцией

$$f(i) = (a/i^k)b^i \quad (i = 1, 2, \ldots), \qquad (1)$$

где a, b, k — постоянные, b очень близко к 1 и $k>1$.

Автор предлагает стохастическую модель некоторой степени общности, приводящую к (1), и рассматривает применения к вышеперечисленным эмпирическим распределениям. H. A. David

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 4, 380.

7976. О максимуме индекса отклонения от нормальности. Гатти (Sul massimo di un indice di anormalità. Gatti Stefania), Metron, 1956, **18**, № 1-2, 181—188 (итал.)

Доказательство неравенства

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i-\bar{a})^2 \Big/ \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|a_i-\bar{a}|\right)^2 < \frac{n}{2},$$

где $\bar{a} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_i$. Z. W. Birnbaum

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 8, 683.

7977. Асимптотическое выражение для смещения нелинейной функции несмещенных статистик конечной выборки. Онгстрём (An asymptotic expansion of bias in a non-linear function of a set of unbiased characteristics from a finite sample. Ångström Knut H.), Skand. aktuarietidskr., 1958 (1959), № 1-2, 40—46 (англ.)

Пусть $\mathbf{m}=(m_1, \ldots, m_p)$, $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_p)$ многомерные статистики выборки объема n, f — функция, определенная в p-мерном пространстве. Показывается, что если: 1) $\mathbf{x}$ сходится по вероятности к $\mathbf{m}$ $(n \to \infty)$, 2) $f(\mathbf{x})$ сходится по вероятности в $f(\mathbf{m})$, а все вторые моменты $\mu_{11}(x_i, x_j)$ сходятся по вероятности к нулю $(n \to \infty)$, 3) функция f и ее производные первого и второго порядков непрерывны в некоторой окрестности точки $\mathbf{m}$, то верно следующее асимптотическое разложение $(n \to \infty)$:

$$Ef(\mathbf{x}) = f(\mathbf{m}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{p}\frac{\partial^2 f(\mathbf{m})}{\partial x_i\, \partial x_j}\mu_{11}(x_i, x_j).$$

Этот результат является распространением при довольно широких предположениях аналогичных результатов для функций моментов (Крамер Г., Методы математической статистики, М. 1948, § 27. 7) на функции других статистик. Л. Я. Савельев

7978. О распределении крайних значений в выборке из нормального распределения. Боренiус (On the distribution of the extreme values in a sample from a normal distribution. Borenius Gustaf), Skand. aktuarietidskr., 1958 (1959), № 3-4, 131—166 (англ.)

Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ — выборка из нормально распределенной совокупности, $\bar{x}$ — выборочное среднее s^2 — выборочная дисперсия, $r_i = \dfrac{x_i - \bar{x}}{s}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Автор передоказывает результаты Томпсона (Thompson W. R., Ann. Math. Statistics, 1935, **6**, 214—19) о распределении r_i в случае, когда x_i выбрано наудачу из системы выборочных значений, и Пирсона и Чандрасекара (Pearson E. S., Chandra Sekar C., Biometrika, 1936, **28**, 308—320), показавших, что плотность распределения $f_n(r)$ величины r_n для $r > \sqrt{\dfrac{n-2}{n-1}}$ совпадает с плотностью распределения Томпсона, умноженной на n, и найденных некоторые квантили для r_n (без вывода точного распределения r_n). Выписаны явные выражения для плотностей величин r_n и $|r|_{\max}$ при $n = 3, 4, 5, 6$. Приведены кривые плотности $f_n(r)$ для $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 20, 30$.

Примечание референта. Автор ошибочно утверждает, что точное распределение величины r_n было впервые получено Граббсом (Grubbs F. E., Ann. Math. Statistics, 1950, **21** 27—58). Это ошибочное мнение разделяется авторами ряда работ по математической статистике, в частности Граббсом. В действительности рекуррентное соотношение для функции распределения величины r_n, из которого легко следует основной результат работы Граббса (а тем самым почти все результаты реферируемой работы), было получено еще в 1941 г. Н. В. Смирновым (Докл. АН СССР, 1941, **33**, 346—349). В работе Н. В. Смирнова приведена также таблица квантилей распределения величины r_n для $n=3(1)20$ и $p=0{,}1$; $0{,}075$; $0{,}05$; $0{,}025$. В. В. Петров

7979. Об обобщении Хоттелинга статистики T^2. Пиллаи, Самсон (On Hotelling's generalization of T^2. Pillai K. C. Sreedharan, Samson Pablo, Jr), Biometrika, 1959, **46**, № 1-2, 160—168 (англ.)

Пусть S_1 и S_2 обозначают матрицы, состоящие из сумм квадратов и произведений отклонений от средних для двух независимых выборок объемов n_1 и n_2 соответственно, взятых из p-мерных нормальных распределений. T_0^2, являющееся обобщением известного T^2, определяется как

$$\frac{T_0}{n_2 - 1} = \text{след}\left(S_2^{-1}S_1\right).$$

Пусть $U^{(s)}$ обозначает сумму характеристических корней матрицы $S_2^{-1}S_1$, где S — число ненулевых корней. В статье даются выражения для моментов величины $U^{(s)}$. Р. Х. Дивеев

7980. Моменты выборочной медианы. Чжу Хотеллинг (The moments of the sample median. Chu John T., Hotelling Harold), Ann. Math. Statistics, 1955, **26**, № 4, 593—606 (англ.)

Автор показывает, что при некоторых условиях регулярности центральные моменты выборочной медианы асимптотически равны соответствующим моментам асимптотического распределения, которое является нормальным. Дается общая процедура аппроксимации, включающая разложение обратной функции распределения в ряд Тейлора. Ошибка приближения может быть сделана произвольно малой использованием достаточно большого числа членов разложения. Метод применяется к нормальному, лапласову и распределению Коши.

Другая, более простая процедура дает верхние и нижние границы для дисперсии выборочных медиан из лапласова и нормального распределений. Большое практическое значение имеют подробные результаты о дисперсии выборочной медианы из нормальной генеральной совокупности. Например, пусть $\tilde{x}$ и $\tilde{\mu}_2$ — выборочная медиана и ее дисперсия при выборке объема $2n+1$ из нормальной совокупности с дисперсией 1. Если $\bar{\mu}_2 = \pi/2(2n+1)$ — дисперсия асимптотического распределения $\tilde{x}$, то

$$B_n\left(1 - \frac{1}{2n+2}\right)^{3/2} < \tilde{\mu}_2/\bar{\mu}_2 < B_n\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3/2},$$

где для $n \geqslant 4$, $B_n \sim 1 + (8n)^{-1}$. Более точную формулировку можно найти в теореме 4. B. Epstein

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 5, 502

7981. Определение предельных величин интегралов с применением к проблемам каталогизации. Гаррис (Determining bounds on integrals with applications to cataloging problems. Harris Bernard), Ann. Math. Statistics, 1959, 30, № 2, 521—548 (англ.)

Предположим, что имеется совокупность, состоящая из неизвестного и, возможно, бесконечного числа классов M_l. Производится N независимых наблюдений X_j; $P\{X_j = M_l\} = p_l$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Изучаются следующие вопросы: 1) предсказание числа различных классов, которые будут наблюдаться в повторной выборке объема αN; 2) предсказание числа дополнительных классов, которые будут наблюдены, если выборка дополнится $(\alpha-1)$ N наблюдениями; 3) оценка охвата (coverage) выборки C, который определяется как сумма вероятностей тех классов, каждый из которых наблюдался в выборке хотя бы один раз; 4) предсказание охвата повторной выборки объема αN; 5) предсказание увеличенного охвата, который должен получиться при добавлении к выборке еще $(\alpha-1)$ N наблюдений. Пусть n_r обозначает число классов, каждый из которых встретился в выборке ровно r раз, $d(\alpha)$ и $C(\alpha)$ — соответственно, число различных классов и охват выборки объема αN,

$$d = d(1)$$

Доказывается, что при $N \to \infty$ имеют место асимптотические формулы

$$Md(\alpha) \sim d + n_1 M\left\{\frac{1 - e^{-(\alpha-1)x}}{x}\right\}, \qquad (2)$$

$$MC(\alpha) \sim 1 - \frac{n_1}{N} + \frac{n_1}{N} M\left\{1 - e^{-(\alpha-1)x}\right\}. \qquad (3)$$

Здесь x представляет случайную величину с некоторой неизвестной функцией распределения F. Автор получает оценки моментов функции F:

$$\mu_r = \int_0^\infty x^r dF(x) \sim \frac{(r+1)!\,(n_{r+1})}{n_1}.$$

Последние позволяют оценивать сверху и снизу математические ожидания, фигурирующие в формулах ( ) и (3). Для этого решается задача о нахождении точной верхней (нижней) грани для выражения $\int_0^\infty g(x)\,dF(x)$ по всем функциям распределения $F(x)$, первые k моментов которых, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$, фиксированы; $g(x)$ — непрерывная, монотонная и ограниченная функция. Показывается, что указанная точная верхняя (нижняя) грань достигается на ступенчатых функциях $F(x)$; Дается методика вычисления этих точных верхней и нижней граней. Для $\kappa < 3$ получены подробные решения. В конце статьи приводятся числовые примеры. И. Р. Коваленко

7982. О точном распределении одного критерия в многофакторном анализе. Банерджи (On the exact distribution of a test in multivariate analysis. Banerjee D. P.), J. Roy. Statist. Soc., 1958, B20, № 1, 108—110 (англ.)

Автор находит точное выражение для функции распределения L-статистики Кендалла (Kendall M. G., The advanced theory of statistics, Vol. 1, 1951, London). Для этой цели используется явное выражение для моментов распределения статистики L и формула обращения для трансформации Меллина. А. А. Зингер

7983. О полном апостериорном распределении. Боев Г. П. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 5, 58—66

Пусть $F(x, \lambda)$ — функция распределения случайной величины x, зависящей от параметра λ, λ — также случайная величина с интервалом изменения (a, b) и плотностью распределения $p(\lambda)$. Функцией полного апостериорного распределения назовем:

$$F_n(x; x_1, \ldots, x_n) = \int_a^b F(x, \lambda)\, p_n(\lambda; x_1, \ldots, x_n)\, d\lambda,$$

где $p_n(\lambda, x_1, \ldots, x_n)$ — апостериорная плотность λ после выборки $x_1, \ldots, x_n$. При некоторых условиях, налагаемых на функции $F(x, \lambda)$ и $p(\lambda)$, $F_n(x; x_1, \ldots, x_n)$ при $n \to \infty$ имеет своим пределом функцию $F(x, \lambda_*)$, где λ_* — значение параметра, обеспечивающего максимум вероятности (или плотности вероятности) системы $x_1, \ldots, x_n$. Последнее позволяет рассматривать функцию $F_n(x; x_1, \ldots, x_n)$ как приближенное распределение случайной величины x, полученное из опытных данных $x_1, \ldots, x_n$. П. А. Строганов

7984. Критерии для гипотез о нижней границе экспоненциального распределения. Карлсон (Tests of hypothesis on the exponential lower limit. Carlson Phillip G.), Skand. aktuarietidskr., 1958 (1959), № 1-2, 47—54 (англ.)

Пусть $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ — упорядоченная выборка объема n из совокупности с функцией распределения

$$F(x, \alpha, \varepsilon) = 1 - e^{-\alpha(x-\varepsilon)}, \quad x \geqslant \varepsilon.$$

Для оценки ε при известном α предлагается статистика

$$h_n = \alpha n (x_1 - \varepsilon),$$

а для оценки ε при неизвестном α — статистика

$$h_n^* = \frac{x_1 - \varepsilon}{x_n - x_1}.$$

Изучены распределения статистик h_n и h_n^*. Дано выражение для среднего значения h_n^*. Получены рекуррентные соотношения для выражения абсолютных моментов k-го порядка этих статистик через моменты $(k-1)$-го порядка. Библ. 5 назв. Л. Я. Савельев

7985. О достижении границ Крамера—Рао и Бхаттачария для дисперсии оценки. Фенд (On the attainment of Cramér—Rao and Bhattacharyya bounds for the variance of an estimate. Fend A. V.), Ann. Math. Statistics, 1959, 30, № 2, 381—388 (англ.)

Рассматривается такое однопараметрическое семейство плотностей $f(x, \theta)$ случайной величины, что

$$P_\theta\{X \in A\} = \int_A f(x, \theta)\, d\mu(x)$$

для всех $\theta \in \Omega$, где μ — не зависящая от θ мера и Ω — произвольное множество действительных чисел. Пусть $d(x)$ — оценка θ, с конечной дисперсией и $\Lambda_l = E[d(x)\varphi_l]$, где

$$\varphi_l = \frac{1}{f(x, \theta)} \frac{\partial^l f(x, \theta)}{\partial \theta^l}.$$

Выражение

$$\Phi_k = \begin{vmatrix} 0 & \Lambda_1 & \ldots & \Lambda_k \\ \Lambda_1 & E\varphi_1^2 & \ldots & E\varphi_1\varphi_k \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \Lambda_k & E\varphi_k\varphi_1 & \ldots & E\varphi_k^2 \end{vmatrix}$$

называется k-й границей Бхаттачария. Φ_1 — граница Крамера — Рао.

В теореме 1 доказывается, что если $\sigma_d > 0$ и выполняются некоторые условия, налагаемые на $f(x, \theta)$ и $d(x)$,

то для того чтобы $\sigma_d = \Phi_1$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x, \theta) = \exp[d(x)\, g(\theta) + g_0(\theta) + h(x)],$$

где $g'(\theta) \neq 0$. Кроме того, если оценка максимального правдоподобия дается корнем уравнения

$$\frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta} = 0$$

и если $d(x)$ является несмещенной оценкой θ, тогда $g_0'(\theta) = -\theta g'(\theta)$ и $d(x) = \hat{\theta}$.

В теореме показывается, что если $f(x, \theta)$ выражается в форме Дармуа — Купмена и $\sigma_d = \Phi_k$, но $\sigma_d > \Phi_{k-1}$, тогда $f(x, \theta) = \exp[t(x)\, g(\theta) + g_0(\theta) + h(x)]$ и $d(x)$ есть полином от $t(x)$ порядка k. Р. Х. Дивеев

7986. Состоятельность оценки максимального правдоподобия при наличии бесконечного числа побочных параметров. Кифер, Вольфовиц (Consistency of the maximum likelihood estimator in the presence of infinitely many incidental parameters. Kiefer J., Wolfowitz J.), Ann. Math. Statistics, 1956, 27, № 4, 887—906 (англ.)

Пусть $\{X_{ij}\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, k)$ — случайные величины такие, что совместная плотность вероятностей величин $X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{ik}$ имеет вид $f(x|\theta, \alpha_i)$, где θ и α_i — параметры, причем θ одинаков для всех i. Следуя Рейману и Скотту (Neyman J., Scott E. L., Econometrica, 1948, 16, 1—32), авторы называют параметр θ структурным, а параметры α_i побочными. Предполагается, что X_{ij} независимы при любых заданных $\theta, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, а $\{\alpha_i\}$ — независимые случайные величины с одинаковой (неизвестной) функцией распределения G_0. В работе изучается задача состоятельной оценки структурного параметра θ при $n \to \infty$. Устанавливается, что при некоторых условиях регулярности метод максимального правдоподобия приводит к строго состоятельной (т. е. сходящейся с вероятностью 1) оценке θ. Попутно получена оценка для G_0, сходящаяся к G_0 во всех точках непрерывности последней с вероятностью 1. В качестве примеров применения полученных результатов исследуются оценки структурного параметра в случаях, когда плотность вероятностей $f(x|\theta, \alpha_i)$ имеет вид:

$$f(x_i|\theta, \alpha_i) = \frac{1}{\alpha_i^k} \prod_{j=1}^{k} g\left(\frac{x_{ij} - \theta}{\alpha_i}\right),$$

$$f(x_i|\theta\alpha_i) = \frac{1}{\theta^k} \prod_{j=1}^{k} g\left(\frac{x_{ij} - \alpha_i}{\theta}\right),$$

где $g(x)$ — одномерная плотность вероятностей. Рассматривается также задача об определении прямой линии по точкам плоскости, координаты которых подвержены случайным нормальным ошибкам. При предположениях, сделанных в статье, устанавливается существование решения максимального правдоподобия.

Н. П. Слободенюк

7987. Применение авторегрессии для подбора экспоненциальной кривой. Паттерсон (The use of autoregression in fitting an exponential curve. Patterson H. D.) Biometrika, 1958, 45, № 3-4, 389—400 (англ.)

Рассматривается задача выбора параметров экспоненциальной регрессивной кривой вида $y = \alpha - \beta\rho^x (0 < \rho < 1)$, $x = 0, 1, \ldots, n-1$. Для построения оценок параметра ρ автор использует простые регрессионные уравнения. Рассматривается вопрос об эффективности и смещенности получающихся оценок. Для $n = 4, 5, 6, 7$ приводятся таблицы. При этом выясняется, что с увеличением n эффективность заметно убывает. А. А. Зингер

7988. Доверительные интервалы при оценке параметров. Дороговцев (Довірчі інтервали при оцінці параметрів. Дороговцев А. Я.). Доповіді АН УРСР, 1959, № 4, 355—358 (укр.; рез. русск., англ.)

Пусть функция распределения случайной величины ξ принадлежит семейству $F(x, \theta)$, $\hat{\theta}$ — оценка максимального правдоподобия для параметра θ, а x удовлетворяет соотношению

$$P\left\{\sqrt{n}\left|\frac{\theta - \hat{\theta}}{s}\right| < x\right\} = 1 - \alpha, \qquad (1)$$

$(0 < \alpha < 1)$, где s^2 — дисперсия $\hat{\theta}$, n — число независимых наблюдений над ξ. Пользуясь асимптотическим разложением функции распределения суммы независимых, одинаково распределенных случайных величин, автор дает следующие разложения для x:

$$x = x_0 + \frac{x_1}{\sqrt{n}} + \frac{x_2}{n} + \ldots$$

$$x = x_0 + \frac{x_2}{n} + \frac{x_4}{n^2} + o(n^{-3}).$$

Дается способ определения x, x_1, x_2,.... М. К. Камалов

7989. Аналитические критерии и доверительные интервалы для среднего значения, вероятностей и процентных точек пуассонова распределения. Уолш (Analytic tests and confidence intervals for the mean value, probabilities, and percentage points of a Poisson distribution. Walsh John E.), Sankhyā, 1954, 14, № 1-2, 25—38 (англ.)

Рассматриваются критерии значимости с подходящими доверительными интервалами. Автор изучает некоторые из приближений к последним. Установленная в статье процедура приближения относится к трем случаям: 1) верхняя граница коэффициента доверия задана, нижняя — определяется по выборке; 2) нижняя граница задана, верхняя определяется по выборке; 3) задана средняя точка между границами, сами границы определяются по выборке. M. Muller

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 4, 383.

7990. Критерий согласия для многомерных распределений. Уэйсс (A test of fit for multivariate distributions. Weiss Lionel), Ann. Math. Statistics, 1958, 29, № 2, 595—599 (англ.)

Пусть X — случайный вектор, принимающий значения в k-мерном евклидовом пространстве, имеющий кусочно-непрерывную плотность распределения $f(y_1, y_2, \ldots, y_k)$. Пусть, далее, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые векторы, имеющие распределение f. Для неотрицательного числа t и неотрицательной кусочно-непрерывной функции $h(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ строятся сферы с центром в X_i и объемом $th(X_i)/n$. Такая сфера называется сферой типа s, если она содержит ровно s точек из $n-1$ точки $X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n$. Если обозначить через $R_n(t, s)$ долю точек типа s среди всех n точек, то можно доказать, что $R_n(t, s)$ при $n \to \infty$ сходится по вероятности к

$$\frac{t^s}{s!} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int h^s(y) f^{s+1}(y) \exp\{-th(y) f(y)\} dy_1 dy_2 \ldots dy_k.$$

Этот результат используется для построения критерия согласия в многомерном случае для проверки гипотезы о том, что в некоторой k-мерной области неизвестная плотность $f(y_1, \ldots, y_k)$ совпадает с данной кусочно-непрерывной функцией $g(y_1, y_2, \ldots, y_k)$. А. А. Зингер

7991. Замечания о тесте значимости для метода парных сравнений. Бок (Remarks on the test of significance for the method of paired comparisons. Bock R. Darrell), Psychometrica, 1958, 23, № 4, 323—334 (англ.)

Рассматривается следующая схема: N лиц сравнивают всевозможные пары, составленные из объектов. Для каждой пары каждое лицо указывает, какому элементу пары оно отдает предпочтение. Предполагается, что оценка лицом h i-го объекта может быть представлена в виде случайной величины

$$Y_{hi} = \mu_i + \nu_{hi} + \varepsilon_{hi},$$

где μ_i — константа, ν_{hi} и ν_{hj} имеют совместным распределением $N(0, 0, \xi, \xi, \rho)$, а ξ_{hi} распределены по $N(0, \sigma)$. Предпочтение лицо h отдает объекту i перед объектом j, если $X_{hij} = Y_{hi} - Y_{hj} > 0$. Вводится случайная величина t_{ij}, принимающая значение 1 и 0 в зависимости от того, отдано ли предпочтение объекту i или j при сравнении этой пары. Пусть $p\{t_{ij} = 1\} = P_{ij}$, несмещенной оценкой для P_{ij} служит величина $p_{ij} = \frac{1}{N}\sum t_{ij}$. Для статистических целей автор рекомендует приближенную формулу для P_{ij}. Далее рассматривается случайная величина $x_{ij} = 2 \arcsin \sqrt{p_{ij}} - \frac{\pi}{2}$. Приводятся ее моменты первого и второго порядков. Подсчитываются выражения для математических ожиданий величин $\frac{1}{n}\sum_i x_{i.}^2$, $\frac{1}{n}\sum_j x_{.j}^2$, $\sum_i \sum_j \left(x_{ij} - \frac{x_{i.}}{n} - \frac{x_{.j}}{n}\right)^2$, где $x_{i.} = \sum_j x_{ij}$, $x_{.j} = \sum_i x_{ij}$. Результаты используются для исследования вопроса о применимости χ^2 теста к указанной схеме. Б. В. Финкельштейн

7992. О подвижных совокупностях. Перкаль (O populacjach ruchomych. Perkal J.), Zastosow. mat., 1957, **3**, № 2, 164—181 (польск.; рез. русск., англ.)

Рассмотрены схемы полевых опытов с подвижными совокупностями (например, совокупность рапсовых цветоедов). Опыты производятся на поле, разделенном на квадратные участки. Требуется настолько рассредоточить эти участки, чтобы за время эксперимента результаты опытов на различных участках не искажались вследствие возможности перемещения цветоедов с одних участков на другие. Для математического решения этой задачи делается предположение, что подвижная совокупность подчиняется закону броуновского движения. Предлагается методика для экспериментальной оценки параметров, определяющих это броуновское движение. На основании этого становится возможным определить расстояние между опытными участками. И. Н. Коваленко

7993. Некоторое замечание о простой корреляции. Фреше (A note on simple correlation. Fréchet Maurice), Math. Mag., 1959, **32**, № 5, 265—268 (англ.)

Рассматривается вопрос об использовании различных мер корреляции. Формулируются четыре условия на меру корреляции. Обсуждается вопрос о преимуществе использования в смысле большей чувствительности к группированию данных корреляционного отношения перед классическим коэффициентом корреляции. В. И. Бабкин

7994. Точные формулы для распределений Колмогорова-Смирнова. Кемперман (Some exact formulae for the Kolmogorov-Smirnov distributions. Kemperman J. H. B.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1957, **A60**, № 5, 535—540; Indagationes math., 1957, **19**, № 5, 535—540 (англ.)

Предполагая, что независимые величины $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ и $y_j (j = 1, 2, \ldots, kn)$, $k \geqslant 1$, подчинены непрерывному закону распределений $F(x)$, автор устанавливает совместное распределение критериев:

$$\sup_s (F_n(s) - G_{nk}(s)) \text{ и } \inf_s (F_n(s) - G_{nk}(s)),$$

где $F_n(s)$ и $G_{nk}(s)$ — соответствующие эмпирические функции распределения в двух независимых выборках, и затем переходом к пределу при $k \to \infty$ получает совместное распределение для критериев

$$\sup_s (F_n(s) - F(s)) \text{ и } \inf_s (F_n(s) - F(s)).$$

Для распределения указанных критериев в отдельности получены формулы, тождественные (хотя несколько отличающиеся по структуре) с ранее установленными Королюком, Блэкманом и Гнеденко. Совместные распределения, полученные автором, выражаются сложными формулами, установленными на основе введенных им и сравнительно просто выражающихся производящих функций рассматриваемых вероятностей. Н. В. Смирнов

7995. Критерий Колмогорова — Смирнова при испытаниях продолжительности жизни. Исии (Kolmogorov — Smirnov test in life test. Ishii Goro), Ann. Inst. Statist. Math., 1958, **10**, № 1, 37—46 (англ.)

При испытаниях на продолжительность функционирования каких-либо приборов, ламп, механизмов и пр. часто испытания продолжаются до тех пор пока из начального множества испытуемых экземпляров прекратит работу определенный и заранее установленный процент их. Желая к результатам этих испытаний применить непараметрические критерии, основанные на максимуме отклонения двух эмпирических функций распределения или отклонения от теоретической функции, автор рассматривает критерии следующего типа: $\Delta_2' = \sup_{-\infty < x < x_p} (F(x) - F_n(x))$; $\Delta_3' = \sup_{-\infty < x < z_m} (G_{nk}(x) - F_n(x))$; $\Delta_3'' = \sup_{-\infty < x < z_m} |G_n(x) - F_n(x)|$; здесь $F(x)$ — теоретическая (непрерывная) функция распределения продолжительности жизни, $F_n(x)$ и $G_{nk}(x)$ — эмпирические функции распределения в двух независимых выборках объема n и nk ($k \geqslant 1$), z_m — m-ый член упорядоченной в порядке возрастания объединенной совокупности экземпляров первой и второй выборки. Для критериев Δ_2', Δ_3', а также соответствующих критериев Δ_2'' и Δ_3'', отвечающих минимумам отклонений и критерия Δ_3''', автором найдено точное распределение при конечных объемах выборки. При этом автор использовал методы, развитые в работах Б. В. Гнеденко, В. С. Королюка и др. Отметим, что асимптотическая теория рассматриваемых критериев была дана в работе Г. М. Мания (Уч. зап. Моск. гор. пед. ин-та, 1951, **15**, № 3, 17—63) Н. В. Смирнов

7996. Непараметрические оценки при неполных наблюдениях. Каплан, Мейер (Nonparametric estimation from incomplete observations. Kaplan E. L., Meier Paul), J. Amer. Statist. Assoc., 1958, **53**, № 282, 457—481 (англ.)

Рассматривается случайная величина T, названная продолжительностью жизни. Выборка объема N называется полной, если она состоит из наблюденных значений $T_1, T_2, \ldots, T_N$ этой случайной величины, и называется неполной, если вместо значений T_i берутся величины $t_i = \min(T_i, L_i)$, где L_i — постоянные или случайные, но не зависящие от T_i границы наблюдения. Для каждого i известно, будет ли $t_i' = T_i$ (этот случай называется смертью) или $t_i = L_i$ (этот случай называется потерей). Оценивается доля $P(t)$ индивидуумов совокупности, продолжительность жизни которых превышает t. Если выбранные продолжительности жизни расположить в порядке возрастания ($0 < t_1' < t_2' < \ldots < t_N'$), то произведение $\hat{P}(t) = \Pi_r [(N - r)/(N - r + 1)]$, взятое по тем r, для которых $t_r' < t$, оказывается оценкой максимального правдоподобия для $P(t)$. Найдено ее среднее

значение и дисперсия. Рассматриваются еще некоторые другие оценки для $P(t)$. Все они в случае, когда $L_i > t$ при $i = 1, 2, \ldots, N$, сводятся к наблюденной доле оставшихся в живых. Б. Н. Гартштейн

7997. О распределении D- статистики Колмогорова — Смирнова. Эжидиу, Карвалью (On the distribution of the Kolmogorov-Smirnov D-statistic. Egydio Pedro, Carvalho Oliveira de), Ann. Math. Statistics, 1959, **30**, № 1, 173—176 (англ.)

Рассматривается простейшая схема одномерного блуждания на оси x-ов с переходами за один шаг на ± 1. Пусть O_n — множество всех путей длины $2n$, выходящих и заканчивающихся в начале координат (число таких путей, очевидно, равно $C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$); и пусть $A_n(k)$ — число путей из O_n, достигающих экрана в точке $x = k$ (легко понять, что $A_n(k) = C_{2n}^{n+k}$); $B_n(r, k)$ — число путей из O_n, достигающих сначала экрана $x = r$ и затем экрана $x = -k$. Устанавливается рекуррентное соотношение ($i = 2, 3, \ldots, [n/k]$):

$$A_n(ik) - B_n(ik, k) = B_n((i-1)k, k),$$
$$B_n(k[n/k], k) = 0,$$

из которого определяется

$$B_n(k, k) = \sum_{i=2}^{[n/k]} (-1)^i C_{2n}^{n+ik}.$$

Этот результат может быть использован для получения известного распределения статистики Колмогорова — Смирнова в случае равночисленности двух выборок.

В. С. Королюк

7998. Некоторые результаты в теории последовательных выборок из временных рядов с частичной заменой членов выборочной совокупности. Сайто (Some results in the theory of sampling on successive occasions with partial replacement of units. Saito Kinichiro), Repts Statist. Applic. Res., Union Japan, Scientists and Engrs, 1957, **4**, № 4, 125—131 (англ.)

Если изучаемая совокупность изменяется во времени и эти изменения должны изучаться по выборкам, исследования должны периодически повторяться. Из ряда возможных методов, указанных Йейтсом, автор рассматривает план, при котором при каждой следующей выборке часть членов выборочной совокупности остается такой же, как в предыдущей выборке, а часть заменяется. Излагаются результаты Йейтса, Петтерсона, давших формулы для наилучших оценок среднего вида

$$\hat{\mu}_m = \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{n_i} \omega_{ij} y_{ij}$$

для моментов $1, 2, \ldots m \leqslant h$, где h — число уже проведенных выборок (и оценку дисперсии этих средних), в предположении что коэффициент корреляции между показателями одного и того же члена совокупности в моменты k и $e > k$ равен ρ^{e-k}. Обобщая эти результаты, автор получает более общие формулы, для случая, когда коэффициенты корреляции между показателями одного и того же члена совокупности будут $\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_h$ (но $\rho_2 \neq \rho^2$ и т. д.), а также учитывает что в практических применениях вместо ρ придется брать эмпирическое (выборочное) значение r. Кроме того, автор рассматривает случай двухстадийных выборок в каждой из моментов учета, т. е. случай, когда из совокупности отбирают несколько групп, а в каждой группе некоторое число единиц. Во всех рассматриваемых случаях описывается процедура, минимизирующая стоимость выборки.

М. И. Эйдельнант

7999. К оценке регрессионных коэффициентов векторнозначного временного ряда со стационарным остатком. Розенблат (On the estimation of regression coefficients of a vector-valued time series with a stationary residual. Rosenblatt Murray), Ann. Math. Statist., 1956, **27**, 99—121 (англ.)

Рассматриваются временные ряды, представляющие реализации векторнозначного двумерного стохастического процесса со стационарными возмущениями. Изучаются различные линейные оценки регрессионных коэффициентов временных рядов, в частности оценка Маркова и оценка наименьших квадратов. Известно, что оценка Маркова, вообще говоря, лучше, чем оценка наименьших квадратов. Устанавливаются условия, при которых оценка наименьших квадратов асимптотически эквивалентна оценке Маркова, т. е. асимптотически эффективна в классе линейных несмещенных оценок. Аналогичные результаты выполняются и для размерности, большей 2. Из резюме автора

8000. Об одном классе оптимальных решающих функций для биномиального семейства распределений. Коваленко И. Н., Теория вероятностей и ее применения, 1959, **4**, № 1, 101—105 (рез. англ.)

Пусть $\{\tau_i\}$ — последовательность независимых случайных величин, $P(\tau_i = 1) = p$ и $P(\tau_i = 0) = 1 - p$, R — решающая функция с возможными решениями d_1 и d_2; $0 \leqslant p_1 < p_0 < p_2 \leqslant 1$, $x > 0$ и $y > 0$ — заданные константы. Для принятия решения применяется процедура последовательных тестов. Автор доказывает существование и выводит способ построения решающей функции, которая минимизирует сумму среднего числа наблюдений до принятия решения при $p = p_0$ и взвешенную сумму вероятностей ошибок первого и второго рода с весами x и y при $p = p_1$ и $p = p_2$. Б. В. Финкельштейн

8001. Сравнение средних k нормальных совокупностей. Бхаттачария (Comparison of the means of k normal populations. Bhattacharyya P. K.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1956, **7**, № 25, 1—16 (англ.)

Пусть имеются k нормальных совокупностей $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ с математическими ожиданиями $\mu + \theta_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$ и одинаковыми дисперсиями σ^2. Величины μ и σ^2 предполагаются известными, а θ_j неизвестными. Область изменения θ_j, $-\infty < \theta_j < +\infty$, разбивается на три непересекающиеся интервала: $R(1) = (\delta \leqslant \theta_j < \infty)$, $R(2) = (-\delta < \theta < \delta)$ и $R(3) = (-\infty < \theta_j \leqslant -\delta)$, где δ — заданное положительное число. Из каждой совокупности производится выборка объема n. Требуется по результатам наблюдений для каждого j принять решение: $\theta_j \in R(1)$, либо $\theta_j \in R(2)$, либо $\theta_j \in R(3)$. Для простой функции убытка в работе строится допустимая минимаксная решающая функция задачи

$$D_\lambda(E) = (d_1, d_2, \ldots, d_k),$$

где $d_j = 1$, если $\bar{x}_j - \mu \geqslant \lambda$, $d_j = 2$, если $|\bar{x}_j - \mu| < \lambda$ и $d_j = 3$, если $\bar{x}_j - \mu \leqslant -\lambda$; $\bar{x}_j$ — выборочное среднее совокупности π_j; E — выборочная точка; $d_j = i$ приводит к решению $\theta_j \in R(i)$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \ldots, k$; λ — положительная постоянная, являющаяся решением уравнения

$$\int_{(\lambda-\delta)/\sigma}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt = \int_{(-\lambda-\delta)/\sigma}^{(\lambda-\delta)/\sigma} e^{-t^2/2}\, dt.$$

Функция убытка имеет вид:

$$L(d_1, d_2, \ldots, d_k; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) = \sum_{j=1}^{k} L'(d_j, \theta_j),$$

где $L'(d_j, \theta_j) = 0$, если $\theta_j \in R(d_j)$ и $L'(d_j, \theta_j) = 1$ в противном случае. Н. П. Слободенюк

8002. Дискретные проблемы разрешений. Судзуки (Discrete decision problems. Suzuki Yukio), Ann. Inst. Statist. Math., 1958, **9**, № 3, 131—148 (англ.)

Рассматривается класс $\{p_i\}$ $(i=1, \ldots, m)$ вероятностных мер, заданный на конечном множестве. Используя концепции линейного программирования, в четырех теоремах приводятся оптимальные решающие правила для разыскания истинной вероятностной меры $p_j \in \{p_i\}$ случайной величины X. Полученные результаты являются аналогами фундаментальной леммы Неймана — Пирсона и ее обобщающих трех лемм. Р. Х. Дивеев

8003. Сравнение оптимальных свойств критериев Неймана — Пирсона и Вальда. Айвазян С. А., Теория вероятностей и ее применения, 1959, **4**, № 1, 86—93 (рез. англ.)

Пусть l — мерный случайный вектор ξ имеет плотность распределения $f(x; \theta)$, где p-мерный вектор θ — неизвестный параметр. Проводятся испытания с целью выбора одной из гипотез $H_0(\theta = 0)$ и H_θ. При некоторых ограничительных условиях исследуется вопрос о числе необходимых наблюдений при заданных вероятностях ошибок первого и второго родов α и β. Основные результаты работы:

1. В случае применения критерия Неймана — Пирсона

$$n \sim \frac{(t_\alpha + t_\beta)^2}{\rho(0, \theta)},$$

где t_γ определяется уравнением $1 - \Phi(t_\gamma) = \gamma$, $\Phi(t)$ — нормальная $N(0, 1)$, функция распределения

$$\rho(0, \theta) = \int (f(x, \theta) - f(x, 0)) \log \frac{f(x, \theta)}{f(x, 0)}\, dx.$$

2. В случае применения критерия Вальда

$$M_0(n) \sim \frac{2}{\rho(0, \theta)}\, \omega(\alpha, \beta),\ M_\theta(n) \sim \frac{2}{\rho(0, \theta)}\, \omega(\beta, \alpha).$$

Здесь $M_0(n)$ и $M_\theta(n)$ означают соответственно м. О. n при условиях $\theta = 0$ и θ

$$\omega(\alpha, \beta) = (1 - \alpha) \log \frac{1 - \alpha}{\beta} + \alpha \log \frac{\alpha}{1 - \beta}.$$

Приводится таблица значений

$$\tilde{\omega}(\alpha, \beta) = \frac{\omega(\alpha, \beta)}{(t_\alpha + t_\beta)^2}$$

для употребительных значений величин α и β. Из таблицы видно, что применение критерия Вальда дает обычно возможность уменьшения числа наблюдений примерно в 2—3 раза. Б. В. Финкельштейн

8004. Три высказывания. Фабиан, Крысицкий, Штейнхаус (Trzy glosy dyskusyjne. Uwaga o pracy W. Krysickiego «o polaczonym zagadnieniu Bayesa i Bernoulliego». Fabián Z.—Replika. Krysicki W.—Na marginesie polemiki. Steinhaus H.), Zastosow. mat., 1956, **3**, № 1, 100—104 (польск.; рез. русск., англ.)

Три высказывания по поводу статьи Крысицкого (РЖМат, 1956, 4701).

8005. Оптимальное размещение при гнездовом выборе. Вен (Het optimaliseren van vertakte bemonsteringsschema's. Veen B.), Statist. neerl., 1959, **13**, № 2, 171—186 (гол., рез. англ.)

8006. Таблицы коэффициентов доверия для нормальных совокупностей. Тагути (Tables of tolerance coefficients for normal populations. Taguti G.), Repts Statist. Applic. Res., Union Japan. Scientists and Engrs., 1958, **5**, № 3-4, 73—118 (англ.)

8007. Планирование и анализ промышленных экспериментов. Дейвис, Дюн, Хамакер (Design and analysis of industrial experiments. Davies O. L., Dun van F. J., Hamaker H. C. Statistica, Neerlandica, 1955, **9**, 189—207) (гол., рез. англ.)

8008. Вклад в теорию частично сбалансированных неполных блоков с двумя ассоциированными классами. Клатуэрти (Contributions on partially balanced incomplete block designs with two associate classes. Clatworthy Willard H. Nat. Bur. Standards. Appl. Math. Ser., 1956, № 47, iv, 70 pp., ill.) (англ.)

8009 К. Непараметрическая статистика для наук о поведении. Сигел (Nonparametric statistics for the behavioral sciences. Siegel Sidney. New York—Toronto—London, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1956, XVIII, 312 pp., ill.) (англ.)

За последнюю четверть века в математической статистике широкое развитие получили новые методы проверки гипотез, использующие неполную информацию, доставляемую экспериментом. Автор книги американский психолог Сигел, не касаясь чисто математических проблем и имея в виду читателя, владеющего элементами алгебры и математической статистики, по хорошо продуманной системе излагает применение разнообразных непараметрических методов к задачам опытной психологии, точнее говоря, к тому кругу вопросов, который разрабатывается доминирующим в американской психологии течением «бихевиоризма». Не имея возможности дать строгое обоснование излагаемым методам, автор сделал, однако, все от него зависящее, чтобы дать им опирающееся на интуицию и здравый смысл истолкование и показать их конкретное применение в практике научной работы, вплоть до выполнения необходимых вычислений. Из 9 глав первые 3 излагают общие понятия теории проверки статистических гипотез, принципы выбора наиболее эффективных критериев. Заслуживает внимания заключительный параграф гл. 3, в котором автор производит сравнение непараметрической и параметрической (классической) методики. Он отдает явное предпочтение первой, потому что она во многих случаях позволяет обрабатывать данные, или вовсе не имеющие количественного выражения (хотя допускающие упорядоченность по величине), или допускающие количественную оценку лишь по условной шкале; именно это обстоятельство, по мнению автора, играет в его области решающую роль, заставляя предпочесть новые методы классическим. В гл. 4 рассматриваются тесты о принадлежности изучаемой величины тому или иному закону распределения по данным одной выборки. В гл. 5 и 6 рассматриваются критерии существенности различий, наблюдаемых в двух связанных между собой (гл. 5) или совсем независимых (гл. 6) выборках. В гл. 7 и 8 результаты гл. 5 и 6 обобщаются на случай связных или независимых выборок. В последней, гл. 9 рассматриваются непараметрические методы измерения корреляции. В конце приложены обширные и ценные таблицы, собранные из разных источников и необходимые для применения на практике многочисленных тестов, изложенных в книге. Н. В. Смирнов

Из бюллетеня «Новые книги за рубежом», 1958, 3 марта, серия А.

8010 К. Теория вероятностей и математическая статистика. Фиш (Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Wyd. 2 popr. i rozsz. Fisz Marek. Warszawa, PWN, 1958. 531 s., il., 45 zł.), Przew. bibliogr., 1958, **14**, № 46, 580—581 (польск.)

Книга представляет университетский учебник по теории вероятностей и математической статистике. Изложение, состоящее из двух частей—теории вероятностей и статистики, сопровождается примерами, упражнениями, таблицами, библиографией. Теория вероятностей

излагается на основе аксиоматики А. Н. Колмогорова. Содержание глав: гл. I, Основные понятия (случайные, достоверные, невозможные события), аксиоматика Колмогорова; гл. II, Случайные величины (одно- и многомерное) и их распределения; гл. III, Основные характеристики распределений; гл. IV, Характеристические функции; гл. V Основные распределения, как-то: биномиальное, Пойа, Пуассона, нормальное и др.; гл. VI, Локальные и глобальные предельные теоремы, закон больших чисел и усиленный закон; гл. VII, Точные распределения статистик, как-то: χ^2, t, z и др.; гл. VIII, Асимптотические распределения, особое внимание уделяется порядковым статистикам; гл. IX, Параметрические и непараметрические методы; гл. X, Точечные и интервальные оценки; гл. XI, Выборочные методы и схемы; гл. XII, Дисперсионный анализ; гл. XIII, Общая теория проверки гипотез; гл. XIX, Основы последовательного анализа Вальда.

Содержание книги включает все основные разделы теории вероятностей и математической статистики. Автор везде соблюдает необходимую строгость изложения; некоторые понятия, которые обычно точно не формулируются (как, например, случайная выборка, статистика и т. д.), получают строгое определение. Тот факт, что существует немного книг по теории вероятностей и математической статистике, рассчитанных для студентов-математиков, а также обширность содержания ставят книгу на весьма видное место в учебной литературе.

W. Sadowski

Из Zbl. Math., 1955, 56, № 1-5, 122—123.

8011 К. Математическая статистика. Ван-дер-Варден (Mathematische Statistik. Van der Waerden B. L. Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer, 1957, IX, 360 S., 46.00 DM) (нем.)

Книга предназначена в качестве вводного учебника по статистике для студентов со значительным математическим запасом знаний, включающим: интеграл Лебега, теорию матриц и некоторые сведения по теории функций комплексного переменного. Однако книга производит впечатление набора весьма хорошо изложенных глав, в каждой из которых автор более или менее забывает о предшествующих и вдобавок мало использует предполагаемые у читателя знания. Иногда все же используются важные теоремы. Доказательства некоторых теорем, которые можно было бы легко провести на основе предполагаемых у читателя знаний, часто опускаются; так, например, для строгого доказательства асимптотического распределения оценок максимального правдоподобия (стр. 180—181) потребовалось бы еще только несколько шагов; можно было бы привести и доказательство некоторых предельных теорем.

Главы: общие основания; вероятность и частота, математический аппарат; эмпирическое определение распределений; интегралы Фурье и предельные теоремы; гауссовы величины и критерий Стьюдента; наименьшие квадраты; оценивание, вычисление наблюденных частот, биологические эксперименты, проверка гипотез, ранговые критерии; корреляция. Большая часть текста отводится под примеры и набор таблиц. Однако теория изложена неадекватно и текст решительно уступает изложению Муда (Mood A. M., Introduction to the theory of statistics, McGraw-Hill N. Y., 1950). Поэтому референт считает, что, несмотря на педагогические достоинства и ясность изложения, книга не достигает своей цели.

H. Rubin

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 9, 771.

8012 К. Введение в статистический анализ. Диксон, Масси (Introduction to statistical analysis. 2nd ed. Dixon Wilfrid J., Massey Frank J., Jr. New York-Toronto-London, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1957, XIV, 488 pp., ill.) (англ.)

8013 К. Некоторые аспекты многомерного анализа. Рой (Some aspects of multivariate analysis. Roy S. N. New York, John Wiley and Sons, Inc.; Calcutta, Indian Statist. Inst., 1957, VIII, 214 pp.) (англ.)

8014 К. Вероятность и статистика. Вранич (Vjetojatnost i statistika. Vranić Vladimir. Zagreb, «Tehn. knjiga», 1958, 320 s., il.), Bibliogr. Jugosl., 1958, 9, № 20, 861 (сербо-хорв.)

ТЕОРИЯ ИГР, ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

8015. Заметка о полиномиальных и вырожденных играх. Гейл, Гросс (A note on polynomial and separable games. Gale David, Gross Oliver), Pacif. J. Math., 1958, 8, № 4, 735—741 (англ.)

Антагонистическая игра Г называется вырожденной, если ее функция выигрыша имеет вид

$$M(x, y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y), \qquad (1)$$

где $x \in X$ и $y \in Y$ — стратегии первого и второго игроков. Доказываются две теоремы:

Теорема 1. Если X и Y — метрические пространства, содержащие бесконечно много точек, а μ и ν — любые вероятностные распределения на любом конечном числе точек из соответственно X и Y, то существует такая ограниченная, непрерывная функция выигрыша M вида (1), что в соответствующей игре единственными оптимальными стратегиями являются μ и ν.

Теорема 2. Если X и Y — ограниченные подмножества евклидова пространства, замыкания которых содержат бесконечно много точек накопления, то для любых вероятностных распределений μ и ν на любом конечном числе точек из X и Y существует функция выигрыша M вида (1), для которой соответствующая игра имеет в качестве единственных оптимальных стратегий μ и ν.

В Н. Комлева

8016. Оптимальные свойства стратегии обороны при равном числе атак на все цели. Уолш (Optimum properties for defense strategy of equal attack against all targets. Walsh John E.), Operat. Res., 1959, 7, № 2, 249—255 (англ.)

В условиях налета однородных целей (однородных в смысле вооружения и объекта назначения) с точки зрения теории игр оптимальной стратегией обороны является назначение равного числа атак на все цели. На группу целей m_g из общего количества M воздействует потенциал обороны n_g — часть общего потенциала N. Пусть $S(a_g)$ — „среднее выживание" цели, где $a_g = n_g/m_g$ и $W_g[m_g S(a_g)]$ — величина ущерба для обороны. Предполагается: 1) $W_g[y]$ — дифференцируемая и возрастающая функция $y > 0$, 2) $S(x) > 0$ и логарифмическая производная $S(x)$ строго монотонна для $x > 0$, 3) выбирая стратегии $m_1, \ldots, m_g$ и $a_1, \ldots, a_g$ противники имеют сведения только о собственных выборах. Доказывается, что если мерой эффективности служит $\sum W_g[m_g S(a_g)]$ и существует оптимальная стратегия обороны такая, что все $a_1 > 0, \ldots, a_g > 0$, то $a_1 = \ldots = a_g$.

Ю. Г. Епишин

8017. Замечание о точках оптимума. Буцано (Considerazioni sui punti di «optimum». Buzano Piero), Giorn. econ. e ann. econ., 1958, 17, № 9—10, 509—518 (итал.)

Пусть в некоторой области функции $\varphi_1(x_1, \ldots, x_q), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_q)$ являются непрерывными вместе с первыми и вторыми производными. Точка $(x_1, \ldots, x_q)$ называется точкой оптимума системы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, если невозможно удалиться от этой точки, не уменьшив значения хотя бы одной функции. В работе выводятся необходимые условия в точках оптимума. Рассмотрение разгра-

ничивает случаи $n<q$, $n>q$. Н. М. Митрофанова

8018. Конечные бескоалиционные игры. Воробьев Н. Н., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 4, 21—56

Обзор основных результатов теории конечных бескоалиционных игр. Рассматривается существование ситуаций равновесия для конечных игр и дается изложение теории матричных и позиционных игр. Библ. 36 назв.

Е. Б. Яновская

8019. Решение обобщенных ненулевых игр. Гиллис (Solutions to general non-zero sum games. Gillies Donald B.), Ann. Math. Studies, 1959, **4**, № 40, 47—85 (англ.)

Рассматриваются ненулевые коалиционные игры n лиц. Характеристическая функция $V(S)$ (S — любое подмножество множества игроков — коалиция), множество разделов (imputations) и решения определяются согласно Нейману (РЖМат, 1955, 1897К). В § 1 при минимальных предположениях относительно $V(S)$ и множества разделов доказываются некоторые теоремы, касающиеся решения. В § 2 рассматриваются некоторые специальные множества разделов. В § 3 доказывается, что любая игра эквивалентна игре с супераддитивной характеристической функцией, и указываются некоторые классы игр, имеющих решение. § 4 содержит подход к доказательству общей теоремы существования через введение специального класса игр, названных автором пирамидальными. О. Н. Бондарева

8020. Решение, содержащее произвольную замкнутую компоненту. Шапли (A solution containing an arbitrary closed component. Shapley L. S.), Ann. Math. Studies, 1959, **4**, № 40, 87—93 (англ.)

Рассматривается игра n лиц с множеством игроков $N=\{1, 2,\ldots,n\}$, $n\geqslant 4$, и выигрывающими коалициями $N\setminus\{1\}$, $N\setminus\{2\}$, $N\setminus\{3\}$ и N. В множестве всех разделов $A=\{a\}$ $(a=(a_1,\ldots,a_n);\ a_i\geqslant 0;\ \sum_{i=1}^{n} a_i=1)$ выделяется симплекс U, состоящий из $(n-3)$-мерных векторов $u=(u_4,\ldots,u_n)$, $\sum_{i=4}^{n} u_i\leqslant 1$. В $U\setminus U_0$ (где $U_0=\{u:\sum_{i=4}^{n}=1\}$ берется произвольное замкнутое множество C и из его образа, полученного одно-однозначным отображением U в A, строится решение игры. В замечаниях к статье ставится несколько интересных вопросов. О. Н. Бондарева

8021. Симметрические нулевые игры n лиц. Гелбаум (Symmetric zero-sum n-person games. Gelbaum B. R.), Ann. Math. Studies, 1959, **4**, № 40, 95—109 (англ.)

Рассматриваются нулевые, симметрические игры n лиц и доказывается, что для любого четного n, а также для n вида $n=3m+1$ и $n=3m+2$ существует симметрическая нулевая игра n лиц, которая имеет симметрическое решение, являющееся для первых двух случаев еще и конечным. О. Н. Бондарева

8022. Некоторые теоретико-игровые аспекты паразитизма и симбиоза. Рапопорт (Some game-theoretical aspects of parasitism and symbiosis. Rapoport Anatol), Bull. Math. Biophys., 1956, **18**, № 1, 15—30 (англ.)

Рассматривается ненулевая непрерывная игра двух лиц с функциями выигрыша $S_1=\log(1+px+qy)-\beta x$, $S_2=\log(1+qx+py)-\beta y$, $x\geqslant 0$; $y\geqslant 0$; $p+q=1$; $\beta<p$.

Линии $\frac{\partial s_1}{\partial x}=0$ и $\frac{\partial s_2}{\partial y}=0$ называются оптимальными линиями, а точка их пересечения — ситуацией равновесия. Определяется движение точки (x, y) следующим образом: первый из игроков выбирает стратегию x_1, второй — соответствующую ей стратегию y_1 на своей оптимальной линии, после чего первый игрок по y_1 находит x_2 на своей оптимальной линии, и т. д. Если в окрестности ситуации равновесия это движение происходит по направлению к ней, то такая ситуация равновесия называется стабильной.

Рассматривается линейное преобразование функций S_1 и S_2: $S_1'=AS_1+BS_2$, $S_2'=CS_1+DS_2$ и решается проблема стабильности для различных матриц этого преобразования.

Если рассматривать x и y как какой-то продукт, выделяемый двумя существами и поглощаемый затем ими в некоторых пропорциях, то полученные математические выводы могут быть использованы как критерии симбиоза или паразитизма двух, зависящих друг от друга, организмов. О. Н. Бондарева

8023. Паразитизм и симбиоз в терминах непрерывных игр N лиц с ненулевой суммой. Фостер, Рапопорт (Parasitism and symbiosis in an N-person nonconstant-sum continuous game. Foster Caxton, Rapoport Anatol), Bull. Math. Biophys., 1956, **18**, № 3, 219—231 (англ.)

Статья является обобщением результатов Рапопорта (реф. 8022). Рассматриваются игры N лиц с выигрышами

$$S_i=\log\left(1+\sum_{j=1}^{N}a_{ij}x_j\right)-\beta_i x_i\quad (i=1,\ 2,\ldots,N)$$

и для них — оптимальные гиперплоскости $\frac{\partial s_i}{\partial x_i}=0$. Ставится проблема стабильности их точки пересечения (ситуации равновесия) относительно различных пар игроков, которая решается для случая игр 3 лиц. Рассматривается также проблема стабильности для линейного преобразования функций выигрыша. В биологической интерпретации делаются соответствующие выводы по поводу характера сосуществования 3 организмов. Описывается механизм, построенный в Мичиганском университете и являющийся физической реализацией описанной выше математической модели.

О. Н. Бондарева

8024. Контролируемые блуждания. Блекуэлл (Controlled random walks. Blackwell David), Proc. Internat. Congr. Mathematicians, 1954, Vol. **3**, Groningen—Amsterdam, 1956, 336—338 (англ.)

Излагаются результаты другой работы автора (РЖМат, 1959, 705), а также ряд интересных нерешенных проблем. И. В. Романовский

8025. Библиография по теории игр. Томпсон, Томпсон (A bibliography of game theory. Thompson Dorothea M., Thompson Gerald L.), Ann. Math. Studies, 1954, **4**, № 40, 307—453 (англ.)

Библиография для четвертого (последнего) выпуска Исследований по теории игр. Включает 1009 названий. Библиография собиралась по инициативе проф. Моргенштерна и будет печататься отдельно в дополненном виде. И. В. Романовский

8026. Подход к линейному программированию в условиях неопределенности. Салах-эль-Маграби (An approach to linear programming under uncertainty. Salah Elmaghraby E.), Operat. Res., 1959, **7**, № 2, 208—216 (англ.)

Рассматривается задача нахождения экстремума

$$C(x)=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j+\sum_{j=1}^{N}c_{1j}\sum_{k}{}'(x_j-d_{jk})\,p(d_{jk})+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}c_{2j}\sum{}'(d_{jk}-x_j)\,p(d_{jk}),\qquad (1)$$

где c_j — стоимость изготовления единицы j-го продукта, c_{1j} — стоимость хранения единицы j-го продукта, c_{2j} — стоимость потерь из-за отсутствия единицы j-го продукта, $p(d_{jk})$ — вероятность получения заказа на j-й продукт

в размере d_{jk} $(k = 1,\ldots,n_j)$, Σ' означает, что рассматривается сумма только положительных слагаемых при условии

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1,\ldots,m). \qquad (2)$$

Введем новые переменные $x_{jk} \geqslant 0$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{n_j+1} x_{jk} = x_j \quad (j = 1,\ldots,n), \qquad (3)$$

$$\sum_{q=1}^{k} x_{jq} \leqslant d_{jk} \quad (j = 1,\ldots,n;\ k = 1,\ldots,n_j+1), \qquad (4)$$

где $d_{jn_j+1} = +\infty$. Подставив (3) в (1) и (2) и обозначая получившиеся равенства через (1′) и (2′) соответственно, получим следующую теорему, с помощью которой решение данной задачи приводится к решению задачи линейного программирования.

Теорема. Если $\{x^0_{jk}\}$ доставляет экстремум (1′) при условиях (2′) и (4), то $\{x^0_j\} = \{\sum_{k=1}^{n_j+1} x^0_{jk}\}$ доставляет экстремум (1) при условии (2). Приводится численный пример. Л. И. Горьков

8027. **Первое допустимое решение для задачи линейного программирования. Гасс** (A first feasible solution to the linear programming problem. Gass Saul I.), Proc. 2nd Sympos. Linear Programm. Washington, 1955, Vol. 2, s. a., 495—508 (англ.)

Описываемый процесс получения первого допустимого решения отличается от метода Ордена в книге автора (РЖМат, 1959, 10293К) тем, что при дальнейшем решении задачи симплекс-методом требуется меньшее число итераций. Л. И. Горьков

8028. **Решение больших задач о бродячем торговце. Данциг, Фулкерсон, Джонсон** (Solution of a large-scale traveling-salesman problem. Danzig G., Fulkerson R., Johnson S.), J. Operations Res. Soc. Amer., 1954, 2, № 3, 393—410 (англ.)

Задачу о бродячем торговце можно описать следующим образом. Пусть задана матрица $D = \|d_{ij}\|$ порядка $n \times n$, где d_{ij} обозначает расстояние от пункта i до пункта j. Нужно указать такую циклическую перестановку чисел $1, 2, \ldots, n$, чтобы сумма d_{ij} между последовательными целыми числами была минимальной (разумеется, в задачах о реальном торговце матрица D симметрична). Было предпринято много безуспешных попыток поставить эквивалентную задачу линейного программирования. В настоящее время это сделано только для $n \leqslant 5$ и, в случае симметричной матрицы, для $n \leqslant 7$. Число ограничений с ростом n увеличивается очень быстро (см. неопубликованную работу И. Хеллера, Р. Нормана и референта). В настоящей работе показано, что некоторый конкретный порядок объезда 49 городов США (по одному городу в каждом штате, включая Вашингтон) дает кратчайшее расстояние. Используемый алгорифм — симплекс-метод, примененный для случайного выбора ограничений. Поскольку полученный ответ удовлетворяет ограничениям, которые не используются, предлагаемый порядок объезда является оптимальным. H. W. Kuhn

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 1, 58.

8029. **Задача о бродячем торговце. Флад** (The traveling-salesman problem. Flood Merrill M.), Operat. Res., 1956, **4**, № 1, 61—75 (англ.)

Обзорная статья, посвященная истории и современному состоянию решения задачи о бродячем торговце, ее связи с транспортной задачей и с задачей о назначениях, а также некоторым путям подхода к ее решению.

Задача (поставленная Уитни на семинаре в Принстонском университете в 1934 г.) заключается в нахождении кратчайше.о пути для коммивояжера, отправляющегося из некоторого пункта, посещающего ряд других пунктов и возвращающегося в исходный (расстояния между пунктами заданы). Математически она сводится к нахождению перестановки $P = (1, i_2, i_3, \ldots, i_n)$ чисел от 1 до n, минимизирующей $a_{1i_2} + a_{i_2 i_3} + \ldots a_{i_s i_t} + \ldots + a_{i_n 1}$, где a_{pq} — данные числа.

Отмечается, что до сих пор не только не создано удовлетворительных методов решения этой задачи, но не предложено и достаточно эффективного подхода к ней. Изложен «венгерский метод» Куна для решения задачи о назначениях (РЖМат, 1958, 4002), который можно использовать для первичной подготовки задачи о бродячем торговце к вычислениям. Обсуждены также некоторые методы приближенного решения (в частности, для случая симметричной матрицы расстояний) и метод, предложенный Данцигом, Фулкерсоном и Джонсоном (реф. 8028). Приведены примеры. А. А. Корбут

8030. **К задаче о бродячем торговце. Хеллер** (On the travelling salesman's problem. Heller I.), Proc. 2nd Sympos. Linear Programm. Washington, 1955, Vol. 2, s. a., 643—665 (англ.)

Статья посвящена изучению двух математических проблем, возникающих в связи с задачей о бродячем торговце (см. §§ 2 и 3).

§ 1 содержит основные определения, обозначения и сводку некоторых результатов. Пусть P — множество всех матриц перестановок n элементов, $Q = P$ — множество всех циклических перестановок, $C(P)$ и $C(Q)$ — их многогранные выпуклые оболочки, R — пространство всех квадратных матриц $x = \|x_{ij}\|$ порядка n, $\bar{R}$ — его подпространство, состоящее из матриц с $x_{ii} = 0$. Задача о бродячем торговце сводится к минимизации по всем $q \in Q$ скалярного произведения (d, q), где d — заданная квадратная матрица порядка n. Пусть $E(P)$ и $E(Q)$ — наименьшие линейные многообразия, содержащие соответственно P и Q,

$$\bar{V}(P) = \{x \mid \Sigma_i x_{ij} = \Sigma_j x_{ij} = 0\},$$

$$\bar{V}(Q) = \{x \mid x \in \bar{V}(P),\ \ x_{ii} = 0\}.$$

Указаны размерности $E(P)$, $E(Q)$, $\bar{V}(P)$, $\bar{V}(Q)$. Дана классификация ограничений в задаче о бродячем торговце (являющихся попросту ограничениями, определяющими многогранник $C(Q)$).

§ 2 посвящен изучению практически важного случая симметричной матрицы расстояний d. В этом случае $d \in M$, где M — подпространство $\bar{R}$:

$$M = \{x \in \bar{R} \mid x = x^T\}.$$

Ортогональным дополнением M в $\bar{R}$ является подпространство N кососимметрических матриц. Теперь

$$\min_{q \in C(Q)} (d, q) = \min_{q \in C^*(Q)} (d, q),$$

где $C^*(Q)$ — ортогональная проекция $C(Q)$ на M. Поэтому важно выяснить, как ведут себя грани $C(Q)$ при ортогональном проектировании.

Теорема. Пусть ограничение $gx \geqslant \alpha$ определяет собственную грань F многогранника $C(Q)$, h — ортогональная проекция g на $\bar{V}(Q)$. Для того чтобы F проектировалась на некоторую собственную грань многогранника $C^*(Q)$, необходимо и достаточно, чтобы матрица h была симметричной.

В § 3 изучаются отношения соседства вершин на многограннике $C(P)$. Вводится понятие k-соседних вершин: две вершины $C(P)$ называются k-соседними, если у них имеется общая грань размерности k, но нет общих граней меньшей размерности. Оказывается, что каждая вершина $C(P)$ имеет много 1-соседних, но совсем не имеет k-соседних $(k \geqslant 2)$. Дается критерий k-соседства

двух вершин. Отметим также следующие результаты: 1) Если грань F_k содержит пару k-соседних вершин, то она содержит ровно 2^k вершин.

2) Если две вершины k-соседние, то их можно соединить путем, состоящим из k одномерных ребер.

3) Две произвольные вершины многогранника $C(P)$ можно соединить путем, состоящим не более чем из $m/2$ (точнее, $[m/2]$ — *реф.*) одномерных ребер.

§ 4 содержит доказательства утверждений предыдущего параграфа. А. А. Корбут

8031. Матрицы ограничений задач транспортного типа (резюме). Хеллер (Constraint matrices of transportation-type problems (abstract). Heller I.), Naval Res. Logist. Quart., 1957, **4**, № 1, 73—76 (англ.)

Заметка посвящена изучению классов матриц, которые будучи интерпретированы как матрицы задач линейного программирования, приводят к целочисленным решениям. Рассматриваемые вопросы тесно связаны с результатами статей Гофмана и Краскала (РЖМат, 1958, 4228) (о свойстве унимодулярности для матриц), а также Хеллера и Томпкинса (РЖМат, 1957, 4251 К; русский перевод М., Изд-во ин. лит., 1959). Автор формулирует пять теорем о свойстве унимодулярности для систем векторов в линейном пространстве, дает краткое обсуждение их значения и геометрическую интерпретацию. А. А. Корбут

8032. Об одном обобщении транспортной задачи. Абрам (O jistém zobecnění dopravního problému. Abrham Jaromír). Časop. pěstov. mat., 1959, **84**, № 2, 183—187 (чешск.; рез. русск., нем.)

Рассмотрено следующее обобщение обычной транспортной задачи (заключающейся в минимизации линейной формы $\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$ при условиях $\sum_j x_{ij} = a_i$, $\sum_i x_{ij} = b_j$, $x_{ij} \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, где $\sum_i a_i = \sum_j b_j$); минимизировать $\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$ при условиях $\sum_j x_{ij} \leqslant a_i$, $\sum_i x_{ij} = b_j$, $x_{ij} \geqslant 0$, причем $\sum_i a_i > \sum_j b_j$. Последняя задача сводится к обычной транспортной. А. А. Корбут

8033. Транспортная задача с пересадками. Орден (The transhipment problem. Orden Alex), Manag. Sci., 1956, **2**, № 3, 276—285 (англ.)

Рассматривается следующее обобщение транспортной задачи: транспортировка из пунктов производства в пункты потребления может производиться с заходами в промежуточные пункты (пункты перегрузки). Имеется m пунктов; заданы количества груза $g_1, \ldots, g_m$, которые нужно обработать в каждом пункте ($g_i > 0$ соответствуют отправке, $g_i < 0$ — получению), и стоимости перевозок между пунктами $c_{ij} > 0$ (причем $c_{ij} = 0$). Эта задача сводится к обычной транспортой задаче с матрицей $m \times m$ следующим образом. Находятся a_i, $b_i \geqslant 0$ (объемы отправления из каждого пункта и объемы доставки в каждый пункт, включая перегрузку), удовлетворяющие условию $g_i = a_i - b_i$ (например, $a_i^0 = g_i$, $b_i^0 = 0$ для $g_i > 0$ и $a_i^0 = 0$, $b_i^0 = |g_i|$ для $g_i < 0$). В каждом пункте устраивается постоянный фиктивный запас s, позволяющий выполнить все операции перегрузки. Затем решается транспортная задачи с с коэффициентами c_{ij}, $a'_i = a_i^0 + s$ $b'_i = b_i^0 + s$.

Доказано, что предлагаемый метод действительно дает решение с минимальными издержками. Приведен пример, сравнены решения обычной транспортной задачи и задачи с перегрузками. В заключение рассмотрена задача нахождения оптимальных путей в транспортных сетях. Их нахождение целесообразно, в частности, при решении больших серий „задач с пересадками" с одинаковыми матрицами c_{ij}. А. А. Корбут

8034. Максимальное число итераций в транспортной задаче. Симоннар, Хадли (Maximum number of iterations in the transportation problem. Simonnard Michel A., Hadley G. F.), Naval Res. Logist. Quart., 1959, **6**, № 2, 125—129 (англ.)

Показано, что максимальное число итераций в решении транспортной задачи, имеющей m пунктов потребления и n пунктов производства, равно $n^{m-1} m^{n-1}$. Эта величина меньше, чем $(mn)!/(m+n-1)!(mn+1-m-n)!$ — число, получающееся из комбинаторных соображений. Л. И. Горьков

8035. Линейное программирование. Персон (Lineaer programmering. Pehrson Christen Robert), Tekn. ukebl., 1959, **106**, № 23, 504—505 (норв.)

На элементарном примере иллюстрируется постановка задачи линейного программирования.

8036. Об одном практическом использовании линейного программирования в горнодобывающей промышленности. Вильямс, Хейли (A practical application of linear programming in the mining industry. Williams K. B., Haley K. B.), Operat. Res. Quart., 1959, **10**, № 3, 131—137 (англ.)

Речь идет о перевозке коксующегося угля.

8037. Применение анализа межотраслевых связей и линейного программирования к планированию общественных работ. Судзуки, Кавакита (Suzuki Masatsugu, Kawakita Yoneo), Добоку гаккайси, J. Japan Soc. Civil Engrs, 1959, **44**, № 4, 7—15 (японск.; рез. англ.)

8038. Распределения решений системы линейных уравнений (с приложением к линейному программированию). Баббар (Distributions of solutions of a set linear equations (with an application to linear programming. Babbar M. M.), J. Amer. Statist. Assoc., 1955, **50**, № 271, 854—869 (англ.)

8039. О распределении решений в задачах линейного программирования. Уагнер (On the distribution of solutions in linear programming problems. Wagner Harvey M.), J. Amer. Statist. Assoc., 1958, **53**, № 281, 161—163 (англ.)

Возражение к работе Баббара (реф. 8038).

8040. Вычислительные машины и линейное программирование. Шентон (Computers and linear programming. Shenton J.), Process Control and Automat., 1959, **6**, № 3, 103—106 (англ.)

Третья статья из серии статей по линейному программированию и его приложениям. (Первая статья см. РЖМат, 1959, 11352, вторая не связана с математикой). В общих чертах описаны принципы работы электронных вычислительных машин и дано представление о некоторых методах, используемых при решении задач линейного программирования. Л. И. Горьков

8041. Структура моделей со стохастическими уравнениями в конечных разностях. Браун (The structure of stochastic difference equation models. Brown Murray), Econometrica, 1959, **27**, № 1, 116—120 (англ.)

Рассматривается система уравнений в конечных разностях: $B_{i1} x_1 + B_{i2} x_2 = Y_i$, $i = 1, 2$, где B_{i1}, B_{i2} — полиномы оператора $E: Ex_{i,t} = x_{i,t+1}$, x_i — эндогенные факторы, Y_i — экзогенные. Показано, что даже если Y_i равны 0 и фазы x_i совпадают, то амплитуды x_i могут тем не менее быть различными вследствие влияния B_{ij}. С. С. Кислицын

8042. Эконометрическое исследование потребления табака в Италии. Де-Флориани (Un'indagine econometrica sul consumo del tabacco in Italia. De Floriani Walter), Econ. internaz., 1959, **12**, № 2, 277—297 (итал.)

Предполагается, что логарифмы величин потребления табака на душу населения, цены табака и дохода на душу населения за два последовательных года подчиняются обычно рассматриваемым в эконометрике линейным уравнениям, в каждое из которых внесена нормальная поправка. Методом наименьших квадратов получены оценки коэффициентов этих уравнений и дисперсий ошибок на основе данных за 40-летний период (1902—1942).

С. С. Кислицын

8043. Общее равновесие продукции и гипотеза «свободного входа». Сиротти (L'equilibrio generale della produzione e l'ipotesi della'libera entrata. Sirotti Vittorio), Econ. internaz., 1959, 12, № 2, 221—238 (итал.; рез. англ., франц., нем., исп.)

Экономическое равновесие при фиксированных технологических коэффициентах и общее равновесие продукции описываются точно так, как это сделано в книге Аллена (Allen R. G. D., Mathematical Economics, Macmillan, 1956, pp. 317—322). Относительно первого вида равновесия делается небольшое замечание, являющееся по существу решением упражнения 1 на стр. 319 указанной книги. Автор отмечает далее, что гипотеза «свободного входа» (free entry), т. е. предположение равенства суммарных затрат при производстве рыночной цены не только обеспечивает определенность системы уравнений общего равновесия, но и является причиной различий между моделями Аллена и Хикса.

С. С. Кислицын

8044. Классическая теория, теория Грэхема и линейное программирование применительно к внешней торговле. Замечания. Шуман, Тодт (Classical theory, Graham's theory, and linear programming in international trade: comment. Schumann Jochen, Todt Horst), Quart. J. Econ., 1957, 71, № 3, 464—469 (англ.)

Некоторые замечания к статье Уайтина (Whitin T. M., Quart. J. Econ., 1953, 67, ноябрь, 520—544).

И. Н. Соколова

8045. Применение математики в экономике. III. Брож (Použití matematiky v ekonomice. III. Brož Rudolf), Textil (ČSR), 1959, 14, № 5, 180—181 (чешск.)

Ч. I см. РЖМат, 1960, 6809.

8046. Нелинейная теория Гудвина экономического цикла. Решение при помощи электрической аналогии. Строц, Мак-Аналти, Нейнс (Goodwin's nonlinear theory of the business cycle. An electro-analog solution. Strotz R. H., McAnulty J. C., Naines J. B., Jr), Econometrica, 1953, 21, 390—411 (англ.)

8047. Развитие исследования операций как науки. Аккофф (The development of operations research as a science. Ackoff Russell L.), Operat. Res., 1956, 4, № 3, 265—295 (англ.)

Для каждого процесса применения исследования операций типичны следующие фазы: 1) постановка задачи (как «потребителем», так и исследователем); 2) построение математической модели, представляющей исследуемую систему (модель выражает эффективность системы через ее параметры, которые могут контролироваться субъектом, его противником или случаем); 3) решение модели (т. е. нахождение значений параметров, максимизирующих эффективность системы); 4) проверка модели и ее решения (опытная оценка параметров, сопоставление предсказываемых результатов действия системы с фактически наступающими); 5) контроль над решением (выяснение обстоятельств, при которых входящие в решение функции и параметры могут существенно изменяться и связанные с этими изменениями модификации решения); 6) осуществление решения.

Описываются модели управления запасами, распределения ресурсов, линии ожидания, конкуренции, транспортная задача, а также некоторые вопросы теории информации и теории игр. Сообщаемый материал излагается в плане его исторического развития. Библ. 153 назв.

Н. Н. Воробьев

8048. Предпосылки для исследования операций в Италии. Рикосса (Premesse per la ricerca operativa in Italia. Ricossa Sergio), Ingegneria mecc., 1959, 8, № 5, 41—46, XXXIV (итал.; рез. франц., англ., нем., эсперанто)

Автор кратко поясняет, что такое исследование операций, и отмечает недостаточность его развития в Италии. Приводится приближенное решение одного примера из области линейного программирования.

С. С. Кислицын

8049. Системы с оптимальным приобретением информации. Гаррис, Хауптшейн, Шварц (Optimum information-acquisition systems. Harris B., Hauptschein A., Schwartz L. S.), Operat. Res., 1958, 6, № 4, 516—529 (англ.)

По мнению авторов, задача проектировщика систем связи аналогична задаче компании, производящей некоторый продукт. Проектировщик должен обеспечить оптимальное соответствие между расходами (стоимость системы связи) и прибылью (значимость получаемой информации).

Стоимость системы связи складывается из двух основных стоимостей: средней стоимости связи и средней стоимости риска. Стоимость связи определяется мощностью передаваемых сигналов, шириной спектра передачи и операционным временем. Стоимость риска определяется последствиями решения, принятого в результате неверного истолкования сообщения, полученного на выходе системы связи. Относительная важность перечисленных параметров (мощность сигнала и т. д.) и форма функций стоимости определяется операционной ситуацией. Эти идеи излагаются в первой половине статьи. Во второй половине на базе этих идей исследуется бинарный канал с некоррелированной гауссовской помехой. Проделываются некоторые вычисления, позволяющие сравнить с указанной выше точки зрения 3 типа передачи информации: 1) без обратной связи; 2) с решающей обратной связью; 3) с информационной обратной связью (information feedback).

И. А. Ибрагимов

8050. Определение максимального установившегося потока движения через железнодорожную сеть. Болдырев (Determination of the maximal steady state flow of traffic through a railroad network. Boldyreff Alexander W.), J. Operat. Res. Soc. Amer., 1955, 3, 443—465 (англ.)

Автор указывает эмпирический метод сведения задачи о потоке в двух направлениях в сложной железнодорожной сети к задаче о потоке в одном направлении. Для трех типов пунктов (пункты отправления, узловые станции и конечные пункты) требуется выполнение следующих условий: 1) из пунктов отправления все поезда выходят и ни один поезд в них не прибывает; 2) на конечные пункты все поезда прибывают и ни один из них не выходит; 3) на каждой узловой станции число прибывающих поездов равно числу убывающих. Затем приводится краткое обсуждение сведения сети со многими начальными и конечными пунктами к эквивалентной сети с единственным начальным и конечным пунктами. Используются следующие полезные упрощения:

1. Поток по двум параллельным линиям не может превысить минимума (суммы) пропускных способностей двух линий.

2. Пусть две точки сети P_1 и P_2 связаны линией с пропускной способностью C, а S_1 и S_2 — суммы пропускных способностей всех линий, выходящих из P_1 и P_2 соответственно. Тогда, если $\min(S_1 - C, S_2 - C) < C$, то линия, соединяющая P_1 и P_2, может быть опущена, при этом точки P_1 и P_2 следует считать за одну.

Получающаяся сеть эквивалентна первоначальной и имеет на одну линию и одну узловую станцию меньше. Этот метод применяется к простой, но интересной модели, направленной на устранение «узких мест» благодаря организации движения, и тем самым способствует увеличению общего потока. T. L. Saaty

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 10, 1103—1104.

8051. Неполноценность «стоимости поражения цели» как меры эффективности. Уолш (Inadequacy of cost per «kill» as measure of effectiveness. Walsh John E.), Operat. Res., 1957, **5**, № 6, 750—764 (англ.)

Строится математическая модель, с помощью которой показывается, что в случае взаимодействия компонент оборонительной системы стоимость поражения цели не всегда является приемлемой мерой для определения относительной значимости компонент. Приводятся примеры. Н. М. Митрофанова

8052. Теория конвейеров. Го (A theory of conveyors. Kwo T. T.), Mang. Sci., 1958, **5**, № 1, 51—71 (англ.)

При некоторых упрощающих предположениях изучается ряд параметров, связанных с нормальной работой конвейера, а также соотношений между ними. Предлагаются методы контроля работы конвейера. Приводится несколько общих замечаний, полезных для практиков. Н. М. Митрофанова

8053. Правила линейного решения и грузовые операции на сортировочных станциях. Мансфилд, Уэйн (Linear decision rules and freight yard operations. Mansfield Edwin, Wein Harold H.), J. Industr. Engng., 1958, **9**, № 2, 93—98 (англ.)

Рассматривается задача о планировании количества вагонов, сортируемых на станции, и составлении расписания работы бригад. Л. А. Кораблева

8054. Транспортные задачи. Берр (Transport problems. Burr E. J.), Math. Gaz., 1958, **42**, № 342, 307—309 (англ.)

Несколько элементарных задач теории массового обслуживания.

8055. Теория очередей в организационном планировании. Малколм (Queueing theory in organization design. Malcolm D. G.), J. Industr. Engng, 1955, **6**, № 6, 19—26 (англ.)

8056. Использование математических методов в исследовании операций. Гибл (Použití matematických metod při operačním průzkumu. Hýbl Jaroslav), Textil (CSR), 1959, **14**, № 7, 257—258 (чешск.)

Несколько элементарных примеров.

8057. Теория поиска. II. Обнаружение цели. Купман (The theory of search. II. Target detectiun. Koopman B. O.), Operat. Res., 1956, **4**, № 5, 503—531 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1957, 8851.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

8058. Теория достоверности. II. Применение в метрологии. Кастаньс-Камарго (Una teoria de la certidumbre. II. Aplicación a la metrologia. Castañs Camargo Manuel), An. Real soc. esp. fis. y quim., 1956, **A52**, № 1-2, 43—58 (исп.; рез. англ.)

Ч. I см. РЖМат, 1958, 309 .

Пусть производится n измерений некоторой величины и f_i $(i = 1, \ldots, n)$ — частоты появления отклонений x_i $(i = 1, \ldots, n)$ от среднего значения. Число q, которое определяется из уравнения

$$\log q = -\sum_{i=1}^{n} f_i \log f_i, \qquad (1)$$

называется индексом недостоверности измерения. Если s — среднее значение разностей $x_{i+1} - x_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, то $\gamma_e = qs/2$ называется показателем экспериментальной недостоверности. Дается непрерывный аналог. Имея в виду, что при данной дисперсии мера недостоверности Г (см. ч. I) имеет наибольшее значение Γ_e для нормального распределения, $\delta = \Gamma_e - \Gamma$ автор рассматривает как меру „отличия" какого-либо распределения от нормального. В некоторых частных случаях производятся вычисления.

Примечание референта. 1) На стр. 47 ошибочно утверждается, что q — всегда натуральное число и с этим связывается его интерпретация: мера недостоверности поля f_i $(f = 1, \ldots, n)$ (РЖМат, 1958, 3092) равна мере недостоверности поля из q равновероятных событий и $n - q$ событий нулевой вероятности). 2) Число q, определенное уравнением (1), имеется у Виля (РЖМат, 1960, 1946), который его называл „разбросом" (diversite) вероятностного поля. Виль получает интересные результаты, связанные с числом q. Автор настоящей статьи не цитирует работу Виля, вышедшую на два года раньше. M. Rosenblatt-Rot

8059. Теория достоверности. III. Основные идеи применения к принципу неопределенности Гейзенберга. Кастаньс-Камарго (Una teoria de la certidumbre. III. Ideas básicas de aplicación al principio de indeterminación de Heisenberg. Castañs Camargo Manuel), An. Real soc. esp. fis. y quim., 1957, **A53**, № 5-6, 101—108 (исп.; рез. англ.)

Высказывается догадка, что принцип неопределенности Гейзенберга, который обычно интерпретируется в терминах стандартных отклонений, может быть истолкован и в терминах теории информации Шеннона—Винера. Здесь, например, Δx означает широту равномерного распределения, которое обладает такой же информацией, что и действительное распределение измерений некоторой физической величины x, участвующей в неравенстве Гейзенберга. Приводится несколько примеров, чтобы подтвердить эту догадку. L. J. Savage

Перевод из Math. Revs, 1958, **19**, № 6, 625—722.

8060. Применение логарифмической корреляции в физических экспериментах. Кастаньс-Камарго, Медина-и-Исабель (Aplicacion de la correlacion logaritmica al experimento fisico. Castañs Camargo M., Medina e Isabel M.), An. Real soc. esp. fis. y quim., 1958, **A54**, № 11-12, 363—372 (исп.; рез. англ.)

Индекс и коэффициенты корреляции, определенные в предыдущей статье (РЖМат, 1958, 1382), обобщаются на непрерывный случай. Применение этих характеристик в физических экспериментах позволяет различить функционально и стохастически зависимые переменные и учесть неточность инструментов. Резюме авторов

8061. Об одном выводе формулы закона распределения вероятностей случайных ошибок результатов измерений. Кемниц Ю. В., Тр. Моск. ин-та инж. землеустройства, 1959, вып. 3, 97—101

Со времени Гаусса и Лапласа и до наших дней многие авторы стараются объяснить появление нормального распределения для ошибок физических, биологических и иных измерений из каких-либо «всеобщих» свойств и «очевидных» аналогий, используя минимум теоретико-вероятностных соображений. В заметке выражается неудовлетворенность одним из таких объяснений. О. В. Шалаевский

8062. Обобщенные законы Гаусса. Крутой Б. Ф., Изв. Томского политехн. ин-та, 1958, **93**, 208—218

Для практических измерений автор предлагает закон распределения, близкий к нормальному, но отличающийся от него тем, что все наблюдения считаются сосредоточенными на конечном интервале (этот закон и назван обобщенным законом Гаусса). Представлена таблица, показывающая, в какой степени вероятности, подсчитанные по этому обобщенному закону, близки к вероятностям, вычисленным по нормальному закону. В. И. Бабкин

8063. Случайное блуждание, в котором шаги появляются случайно по времени. Мерсер Смит (A random walk in which the steps occur randomly in time. Mercer A., Smith C. S.), Biometrika, 1959, **46**, № 1-2, 30—35 (англ.)

Рассматривается математическая модель изнашивания передаточного ремня (конвеера) как случайное блуждание. Шаги блуждания появляются случайно, но с фиксированной средней частотой. Длины шагов — положительные, независимые, имеют одинаковые распределения. Найдено распределение времени, за которое достигается барьер, фиксированный и движущийся. Также указываются асимптотические оценки среднего, стандарта отклонения и третьего центрального момента этого распределения. Э. И. Вилкас

8064. Метод решения основного интегрального уравнения статистической теории оптимальных систем в конечной форме. Пугачев В. С., Прикл. матем. и механ., 1959, **23**, № 1, 3—14

Общая задача определения оптимальной (в смысле какого-либо определенного критерия) системы состоит в нахождении оператора, применение которого к заданной на отрезке времени $s-T \leqslant t \leqslant s$ некоторой случайной функции $Z(t)$ дает результат, наилучшим образом аппроксимирующий другую случайную функцию $W(s)$, статистически связанную с первой. Для широкого класса случаев эта задача сводится к нахождению линейного оператора A_t, применение которого переводит корреляционную функцию $K(t, u)$ определенной случайной функции $X(t)$ (где $K(t, u)$ рассматривается как функция t, зависящая от параметра u) в заданную функцию $f(s, u)$ при всех значениях параметра u, принадлежащих области T.

В предыдущей работе автора (РЖМат, 1959, 1855) рассмотрен случай, когда t и s пробегают все вещественные значения, а область T совпадает с полупрямой $-\infty < u < s$, так, что задача сводится к интегральному уравнению

$$\int_{-\infty}^{s} K(t, u)\, g(s, t)\, dt = f(s, u), \quad -\infty < u \leqslant s. \quad (1)$$

При этом для ядра $g(s, t)$ было получено решение, выраженное через переходную функцию некоторой вспомогательной линейной системы, удовлетворяющей определенным физическим условиям. Показывается, что если случайная функция $X(t)$ связана с «белым шумом» $V(t)$ линейным дифференциальным соотношением

$$F_t X(t) = H_t V(t) \quad (2)$$

$$\left(F_t = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, \frac{d^k}{dt^k},\ H_t = \sum_{k=0}^{m} b_k(t)\, \frac{d^k}{dt^k},\quad m < n \right),$$

то приведенное в предыдущей работе общее решение может быть эффективно восстановлено с помощью ряда интегрирований линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. При том же условии (2) иной метод, также сводящийся к решению ряда линейных дифференциальных уравнений, может быть применен к случаю, когда t принимает значения из интервала $s-T \leqslant t \leqslant s$, а область T также определяется неравенствами $s-T \leqslant u \leqslant s$ (так что интегральное уравнение (1) обращается в уравнение

$$\int_{s-T}^{s} K(t, u)\, g(s, t)\, dt = f(s, u), \quad s - T \leqslant u \leqslant s.$$

В заключение рассмотрено два конкретных примера, первый из которых совпадает с примером, решенным иным методом в работе Долфа и Вудбери (Dolph C. L., Woodbury M. A., Trans. Amer. Math. Soc., 1952, **72**, № 3, 519—550). А. М. Яглом

8065. Линейная квадратичная фильтрация и предсказание выборочных сигналов. Ллойд, Мак-Миллан (Linear least squares filtering and prediction of sampled signals. Lloyd S. P., McMillian B., Proc. Sympos. Modern Network Synthesis, New York, Brooklyn, N. Y., Polytechn. Inst., 1956, 221—247) (англ.)

Пусть $s(t)$ (сигнал) и $r(t)$ (шум) стационарные в широком смысле и τ, $T > 0$ — фиксированные параметры. Требуется найти линейный оператор φ, заданный на $r(m\tau)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, m\tau < t$, такой, что „ошибка" $\xi(t) = \varphi(t) - s(t - T)$ минимальна в смысле

$$\tau^{-1} \int_0^{\tau} E[\xi^2(t)]\, dt.$$

Особое внимание уделяется операторам вида

$$\varphi(t) = \tau \sum\nolimits_m r(m\tau)\, K(t - m\tau), \quad (1)$$

где $K(t) = 0$, $t < 0$.

В случае, когда $n(t)$, — процесс скользящих средних, применяется метод факторизации Винера — Хопфа. Результаты особенно просто выглядят в случае рациональных спектральных плотностей, т. е. показательных автокорреляций. В разделе 7 рассматривается вопрос о реализации оператора в физической системе. E. Reich

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 3, 242.

8066. Обнаружение импульсных сигналов в шуме. Оптимальные фильтры Баттерворта третьего порядка. Хипс, Айзакс (Detection of pulsed signals in noise optimum Butterworth thirdorder filters. Heaps H. S., Isaacs A. T.), Electronic and Radio Engr, 1958, **35**, № 5, 190—193 (англ.)

Рассматривается следующая задача. На вход линейного фильтра известного вида (так называемого фильтра Баттерворта) подается сумма сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$, где

$$s(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leqslant T, \\ 0, & 0 > t,\ t > T, \end{cases}$$

а $n(t)$ представляет из себя белый шум (стационарный процесс, спектральная плотность которого — константа). Переходная функция фильтра зависит от параметра α. Требуется найти такое значение α, при котором отношение выделяющейся за некоторое время T_0 энергии сигнала к энергии шума на выходе фильтра достигало бы максимума. Авторы находят это оптимальное значение α как функцию от T и T_0 для той области значений T и T_0, которая представляет практический интерес. В. Ф. Писаренко

8067. Взвешенная и. к. м. Бедросян (Weighted pcm. Bedrosian Edward), IRE Trans. Inform. Theory, 1958, **4**, № 1, 45—49 (англ.)

Пусть сообщение на входе канала представляет собой некоторую последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\xi_t\}$, и при этом $|\xi_t| \leqslant M$. Предлагается следующий метод кодирования сообщения перед посылкой его по каналу. Весь интервал $[-M, M]$ изменения ξ_t разбивается на m равных частей, которые приводятся во взаимно однозначное соответствие с числами $1, 2, \ldots, 2m$. Если в момент t величина $\xi_t = x_t$ и если x_t принадлежит k-му интервалу, то по каналу связи передается записанное в двоичной системе при помощи символов 0, 1 число k. Числу 0 соответствует импульс отрицательной полярности, а числу 1 — положительной. Амплитуда импульса, соответствующего j-му разряду двоичной системы, равна a_j. Описанный метод кодирования в случае, когда числа a_j не равны между собой, автор называет взвешенной импульсно-кодовой модуляцией (в. и. к. м.) В предположении, что ξ_t — равномерно распределены в интервале $[-M, M]$, вероятность ошибки при приеме j-го импульса равна

$$p_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_j}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

и $p_j \ll 1$, методом неопределенных множителей Лагранжа показано, что для минимизации среднеквадратичной ошибки, возникающей после декодирования при приеме, необходимо

$$a_j^2 \approx s + \frac{s}{1+s}\left(j - \frac{n+1}{2}\right) \ln 16,$$

где $s = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j^2$ — заданная средняя энергия посылки, а n — среднее число импульсов в посылке. Вычисляется оценка для скорости передачи информации при употреблении в. и. к. м. и отношение мощности сигнала к мощности шума на выходе приемного устройства.

Б. С. Цыбаков

8068. Обобщение теоремы обращения Мак-Дональда. Робинсон (A generalization of MacDonald's inversion theorem. Robinson F. N. H.), Philos. Mag., 1958, 3, № 32, 909—911 (англ.)

Дается обобщение на случай двух функций $x(t)$ и $y(t)$ теоремы обращения Мак-Дональда (MacDonald D. K. C., Philos. Mag., 1949, 40, 561), позволяющее выразить спектр мощности произведения $x(t)\,y(t)$ в терминах временного осреднения $\overline{x_\tau y_\tau}$ (черта означает осреднение по t, $x_\tau = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} x(t)\,dt$, $y_\tau = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} y(t) \times dt$). Обсуждается случай, когда возникающие в формулах интегралы не могут быть определены в элементарном смысле.

А. А. Филиппова

8069. Теория информации и ее инженерные приложения. Рамабхадран (Information theory and its engineering application. Ramabhadran G. N.), Radio Serv. (India), 1958, 20 № 2, 15—19 (англ.)

Популярное изложение некоторых идей теории информации, связанных с логарифмической мерой информации, «объемом» сигнала и пропускной способностью каналов. Новых математических результатов работа не содержит.

Б. С. Флейшман

8070. К расчету вероятности ошибки декодирования (об одном представлении биномиального закона распределения вероятностей). Варшавер Б. А., Научн. докл. высш. школы. Радиотехн. и электроника, 1958, № 1, 51—53

Рассматривается вероятность ошибки декодирования в случае дискретного канала при использовании корректирующего кода, равная $P = 1 - \sum_{k=0}^{\Delta} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, где Δ — максимальное число ошибок, исправляемых кодом, n — число элементов кодовой комбинации, p — вероятность искажения отдельного элемента кодовой комбинации. Указывается облегчающее расчет выражение для P в виде многочлена, расположенного по степеням p.

А. А. Филиппова

8071. О кодировании длинных отрезков двоичных символов. Гармаш В. А., Радиотехника, 1959, 14, № 4, 62—64

Рассматривается способ кодирования последовательности результатов испытаний Бернулли, основанный на известной идее Шеннона об отбрасывании всех маловероятных цепочек. Проведя элементарные вычисления, автор приходит к выводу, что этот метод не применим на практике из-за сложности требуемой для его осуществления аппаратуры.

А. А. Темпельман

8072. Информационная теория интерпретации геофизических исследований. Халфин Л. А., Докл. АН СССР, 1958, 122, № 6, 1007—1010

Предполагается, что есть взаимно однозначное соответствие между доступным наблюдению геофизическим полем $\varphi_\rho(r)$ и источниками этого поля ρ. Далее предполагается наличие помех $n(r)$, так что измеренное поле $\varphi(r) = \varphi_\rho(r) + n(r)$. Рассматривается апостериорное распределение для ρ при заданном $\varphi(r)$. Указывается, что обычно распределение $n(r)$ неизвестно и поэтому лучше считать известным лишь несколько моментов этого случайного поля. После этого предполагается, что $n(r)$ имеет то из распределений с заданными моментами, для которого энтропия максимальна. Разумность этого последнего предположения кажется референту спорной, поскольку использование понятия энтропии так же как и остальных понятий шенноновской теории информации, оправдывается существующими теориями лишь тогда, когда можно выбрать оптимальный метод кодирования информации. В рассматриваемой задаче такой возможности нет и, по мнению референта, более адекватно применение обычных идей математической статистики (возможность ее применения отмечается автором).

Р. Л. Добрушин

8073. Теория информации. Сёренсен (Informationsteori. Sørensen N. A. L.), Tidsskr. ingeniørofficerer, 1958, 27, № 3, 68—82 (датск.)

Излагаются элементы теории информации, связанные с понятием энтропии. Приводятся частоты букв датского текста и вычисляется их энтропия.

Б. С. Флейшман

8074. Математическое соотношение между индексом языковой неоднородности Гринберга и характеристикой Юла. Хердан (The mathematical relation between Greenberg's index of linguistic diversity and Yule's characteristic. Herdan G.), Biometrika, 1958, 45, № 1-2, 268—270 (англ.)

Гринберг в 1956 г. предложил в качестве меры языковой неоднородности данного населения пользоваться числом A, получающимся вычитанием из единицы суммы квадратов вероятностей различных языков среди его представителей (вероятность того, что два случайно взятых индивидуума говорят не на одинаковом языке). Юл в 1944 г. предложил характеризовать частоту повторяемости слов какого-либо текста числом $K = 10^4 \times (S_2/S_1^2 - 1/S_1)$, где $S_1 = \sum_x f_x x = \sum_i X_i$ и $S_2 = \sum_x f_x x^2 = \sum_i X_i^2$ — первый и второй статистические моменты распределения частоты слов текста (f_x — число слов, встречающихся x раз, X_i — сколько раз встречается i-е слово), что при больших текстах (т. е. при больших значениях S_1) равносильно использованию более простой характеристики $K^* = S_2/S_1^2$. Автор отмечает, что при $S_1 \to \infty$ K^* и $10^{-4}K$ стремятся к $1-A$ и что, как вытекает из результатов Гуда (РЖМат, 1955, 5988), $10^{-4}K\,(1-1/S_1)$ представляет несмещенную оценку для $1-A$ (при замене одинаковых слов текста жигелями, говорящими на одном языке).

М. Ф. Бокштейн

8075. Сети с взаимным влиянием. Рапопорт (Nets with reciprocity bias. Rapoport Anatol), Bull. Math. Biophys., 1958, 20, № 3, 191—201 (англ.)

Под сетью понимается система точек, из каждой из которых выходит фиксированное число линий («аксонов», в терминологии автора). Каждая линия кончается в некоторой случайно выбранной точке. Линия называется «взаимной», если ее начало является концом некоторой другой линии, начинающейся в конце первой линии. Рассматривается случай, когда число линий велико. Предполагается, что вероятность каждой линии оказаться «взаимной» равна $x > 0$. Находится распределение вероятностей для числа линий, кончающихся в заданной точке. Математические предпосылки четко не сформулированы. Полученные вероятности исследуются на монотонность при малых x, а в некоторых частных случаях при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Развитая теория находит применение в социологии.

А. А. Филиппова

8076. Рассмотрение риска производителя при последовательном контроле. Моригути (A consideration about the producer's risk in sequential sampling. Moriguti Sigeiti), Repts Statist. Applic. Res., Union Japan. Scientists and Engrs, 1953, **2**, № 4, 104—107 (англ.)

Рассматривается последовательный контроль больших партий изделий. Пусть p_1 — среднее выходное качество, p_2 — допускное качество, α — риск производителя при p_1, т. е. вероятность браковки партии изделий, выходное качество которой равно p_1, β — риск потребителя при p_2, т. е. вероятность приемки партии с долей дефектных изделий, равной p_2. Автор предлагает фиксировать p_1, p_2, β и при этом минимизировать величину α. В статье рассматривается численный пример такой минимизации, где вычисления производятся на основании таблиц: Sequential analysis of statistical data, Appl. Statist. Res. Group, Columbia Univ., 1945).

И. Н. Коваленко

8077. Несмещенные оценки доли пропущенного брака при методе однократной выборки. Сираджинов С. Х., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1957, вып. 20, 89—100

Рассматривается приемочный статистический контроль по качественному признаку с применением однократной выборки объема n. Если число дефектных изделий в выборке не превосходит c, то оставшиеся изделия принимаются без контроля, в противном случае они либо подвергаются сплошному контролю (схема А), либо отвергаются окончательно (схема Б). Статья является развитием идеи А. Н. Колмогорова об использовании результатов контроля для оценки доли пропущенного брака (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1950, **14**, 303—326) и обобщением результатов автора. Пусть q^* обозначает долю дефектных изделий в принятой партии. Основываясь на предложенной А. Н. Колмогоровым (Колмогоров А. Н., Успехи матем. наук, 1951, **6**, № 3, 133—134) асимптотической формуле для оперативной характеристики, автор получает несмещенные оценки величины q^* для схем А и Б, когда $N\to\infty$. В случае схемы А несмещенной оценкой $\varphi(Y)$ для q при обнаружении Y дефектных изделий будет выражение

$$\varphi^*(Y)=\begin{cases}\dfrac{x}{n}(1-\lambda), & \text{если } Y\leqslant c,\\[2ex] \dfrac{1}{n}R_c(\lambda,b), & \text{если } Y>c.\end{cases}$$

Здесь x и X обозначают, соответственно, количества дефектных изделий в выборке объема n и во всей партии объема N,

$$\lambda=\lim_{N\to\infty}\frac{n}{N};\quad b=\frac{nX}{N};\quad R_c(\lambda,b)=\frac{K_{c+1}(\lambda,b)}{1-L_c(\lambda,b)}(1-\lambda),$$

где

$$K_m(\lambda,b)=C_M^m\lambda^m(1-\lambda)^{M-m},\quad M=\frac{b}{\lambda};$$

$$L_c(\lambda,b)=\sum_{m=0}^{c}K_m(\lambda,b).$$

В случае схемы Б несмещенная оценка $\varphi^*(x)$ величины q^* по x дается формулой

$$\varphi^*(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{n}, & \text{если } x\leqslant c+1,\\[2ex] 0, & \text{если } x>c+1.\end{cases}$$

При достаточно большом числе проконтролированных партий можно принять для схемы А $q^*_{\text{ср}}\sim\varphi^*_{\text{ср}}$; $q_{\text{ср}}\sim\varphi_{\text{ср}}$, а для схемы Б $q^{**}_{\text{ср}}=\dfrac{\sum(N-n)q^*}{\sum(N-n)}\sim\varphi^*_{\text{ср}}$; дается вероятностная оценка точности этих приближенных соотношений. В статье также указывается на необходимость табулирования функции $R_c(\lambda,b)$.

И. Н. Коваленко

8078. Оценивание, принимающее во внимание ошибки контролера. Трыбула (Estymacja z uwzględnieniem błędów kontrolera. Trybuła S.), Zastosow. mat., 1959, **4**, № 3, 249—254 (польск.; рез. русск., англ.)

Контролер совершает ошибку при сортировке изделий в выборке. Пусть p_1 и p_2 — соответственно вероятности признания им годного изделия негодным и наоборот. Изучается задача выборочной оценки процента дефектных изделий в партии. Предполагая априорное распределение равномерным, автор предлагает одну оценку, представляющую байесовское решение.

По резюме автора

8079. Применение одного метода приёмочного контроля для обеспечения надежности. Питерсон (Application of a method of inspection testing to assurance reliability. Peterson N. M.), IRE Trans. Reliabil. and Qual. Control., 1958, № 15, 19—26 (англ.)

Автор устанавливает критерий для различения с заданными максимальными ошибками первого и второго рода двух сложных гипотез H_0 и H_1 относительно параметра T пуассоновского процесса.

Гипотеза H_0: $T\geqslant T_1$.

Гипотеза H_1: $T\leqslant T_2$ $(0<T_2<T_1)$.

Результаты применяются для статистического контроля надежности оружия.

А. А. Темпельман

8080. Относительно единой теории движения на дорогах. Хейт (Towards a unified theory of road traffic. Haight Frank A.), Operat. Res., 1958, **6**, № 6, 813—826 (англ.)

Строится теория движения машин по дороге в зависимости от интенсивности движения. Предполагается, что обгон не допускается и движение происходит в одну линию. Изучается возможность использования теории массового обслуживания. Автор считает, что действительная скорость движения есть случайная величина y, зависящая от параметра потока и от желательной водителю скорости x. В качестве плотности распределения y предложено распределение Пирсона 1-го типа. Математических выводов нет. Предложена система осуществления наблюдений за реальным движением. Дан достаточно полный обзор существующих работ. Библ. 35 назв.

Б. В. Гнеденко

8081. О многоканальном процессе образования очереди при частном предположении о характере её становления. Хомма (On the many server queuing process with a particular type of queue discipline. Homma Tsuruchiyo), Repts Statist. Applic. Res., Union Japan Scientists and Engrs, 1956, **4**, № 3, 90—101 (англ.)

Рассматривается общий входящий поток требований с ограниченным последействием, длительность обслуживания распределена по показательному закону с параметром μ, s обслуживающих приборов. Требование остается в системе с вероятностью 1, если имеется хотя бы один свободный прибор; вероятность остаться в очереди не возрастает с увеличением числа требований уже находящихся в очереди. Исследование проводится методом вложенных цепей Маркова. Найдены условия эргодичности этих цепей, транзитивности и периодичности.

Б. В. Гнеденко

8082. О системе обслуживания со временем обслуживания, распределенным по смешанному хи-квадрат распределению. Уишарт (A queuing system with service-time distribution of mixed Chi-squared type. Wishart David M. G.), Operat. Res., 1959, **7**, № 2, 174—179 (англ.)

Рассматривается произвольный входящий поток с ограниченным последействием, обслуживаемый одним прибором. Поступившие требования остаются в очереди до конца обслуживания. Относительно распределения времени обслуживания предполагается, что оно может быть представлено как сумма случайного числа независимых одинаково распределенных слагаемых, каждое из которых распределено по показательному закону с постоянным параметром μ. Вероятность того, что слагаемых будет s, равна c_s; $\sum_{s=1}^{k} c_s = 1$. Такая схема была предложена Лучаком (РЖМат, 1959, 8310). В работе найдены предельные вероятности того или иного состояния очереди, а также распределение времени ожидания. В заключение рассмотрен пример Бэйли, относящийся ко времени ожидания обслуживания в больницах Англии. Б. В. Гнеденко

8083. Решение одной системы бесконечных линейных уравнений. Лебедева Э. Н., УзССР Фанлар Акад. ахбороти, Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем. н., 1959, № 2, 7—13 (рез. узб.)

Для телефонной системы с ожиданием из n линий простейшего входящего потока вызовов с параметром γ и показательного распределения длины l разговор ($P\{l > t\} = e^{-\rho t}$) вероятность $P_k(t)$ того, что имеется k вызовов (при $k \leqslant n$ все они обслужены, при $k > n$ все линии заняты и имеется $k - n$ ожидающих), удовлетворяет следующей бесконечной системе дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} P_0'(t) &= -\lambda P_0(t) + \beta P_1(t), \\ P_k(t) &= \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + k\beta) P_k(t) + \\ &\quad + (k+1)\beta P_{k+1}(t), \quad 0 < k < n, \\ P_k'(t) &= \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + n\beta) P_k(t) + \\ &\quad + n\beta P_{k+1}(t), \quad k \geqslant n. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Как показано, например, в монографии Хинчина (РЖМат, 1957, 5032) (1) имеет единственное стационарное решение p_k — стационарную меру соответствующего марковского процесса. Применяя теперь общие теоремы о предельном поведении вероятностей перехода для марковских процессов со стационарной мерой, можно доказать, что $\lim_{t\to\infty} P_k(t) = p_k$. Автор предлагает более простое прямое доказательство этого факта с помощью матричного метода. Кроме того, рассматривается другая система, соответствующая задаче Эрланга для бесконечного пучка. Как отмечает сам автор, его доказательство не вполне строго. Р. З. Хасьминский

8084. Очередь с приоритетом или с перерывом. Уайт, Кристи (Queuing with preemptive priorities or with breakdown. White Harrison, Christie Lee S.), Operat. Res., 1958, 6, № 1, 79—95 (англ.)

Рассматривается задача обслуживания одним обслуживателем объектов, прибывающих по закону Пуассона. Предполагается, что все объекты разбиты на классы так, что первыми из очереди обслуживаются объекты высшего класса, затем из класса, следующего за высшим, и т. д. Объекты некоторого класса могут обслуживаться только при отсутствии в очереди объектов более высокого класса. Такая схема называется очередью приоритета. Обычные уравнения Феллера (стр. 389) обобщаются на случай очереди с приоритетом. Однако из-за трудности решения таких уравнений в общем виде в статье разбирается случай только двух классов, когда распределение времени обслуживания объекта из высшего класса отрицательно-экспоненциальное со средним $1/\mu_1$.

Система уравнений имеет тогда вид:

$$\frac{dP_{n,m}^{(t)}}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) P_{n,m}^{(t)} + \lambda_1 P_{n-1,m}^{(t)} + \mu_1 P_{n+1,m}^{(t)} + \lambda_2 P_{n,m-1}^{(t)} \quad (n, m > 0); \qquad (1)$$

$$\frac{dP_{0,0}^{(t)}}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2) P_{0,0}^{(t)} + \mu_1 P_{1,0}^{(t)} + \mu_2 P_{0,1}^{(t)};$$

$$\frac{dP_{0,0}^{(t)}}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1) P_{n,0}^{(t)} + \lambda_1 P_{n-1,0}^{(t)} + \mu_1 P_{n+1,0}^{(t)} \quad (n > 0);$$

$$\frac{dP_{0,m}^{(t)}}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2) P_{0,m}^{(t)} + \lambda_2 P_{0,m-1}^{(t)} + \mu_2 P_{0,m+1}^{(t)} + \mu_1 P_{1,m} \quad (m > 0),$$

где λ_1, λ_2 — параметры пуассоновского закона прибывания объектов высшего и низшего классов соответственно, $P_{n,m}^{(t)}$ — вероятность того, что в момент времени t в очереди стоят n объектов высшего и m объектов низшего классов. Дается метод вычисления всех устойчивых ($P_{n,m}^{(t)} = \text{const}$) решений системы (1). С помощью производящих функций вычисляются моменты распределения величины m. Для любого числа классов в очереди с приоритетом и любых отрицательно экспоненциальных распределений времени обслуживания подсчитывается для каждого класса среднее время обслуживания. При одном и том же отрицательно-экспоненциальном распределении времени обслуживания для всех классов получены производящие функции распределений времени задержки объекта в очереди перед началом обслуживания. Практически важным для задачи обслуживания является случай очереди с перерывом, или обслуживания очереди с остановками, например, из-за поломки обслуживателя. Показывается, что при некоторых естественных предположениях очередь с перерывом сводится к очереди с приоритетом. С. В. Ефремов

8085. Очередность с дискретным временем. Мейслинг (Discrete-time queuing theory. Meisling Torben), Operat. Res., 1958, 6, № 1, 96—105 (англ.)

Рассматривается задача обслуживания покупателей одним обслуживателем для дискретного времени. Предполагается, что: 1) за единицу времени может прибыть не более одного покупателя; 2) событие, состоящее в прибытии покупателя за единицу времени, не зависит от прибытия более ранних покупателей. Вероятность покупателя прибыть за единицу времени есть фиксированное число p; 3) покупатели обслуживаются в порядке прибывания; 4) времена обслуживания различных покупателей независимы и имеют одно и то же распределение вероятностей. В этих предположениях вычисляются средняя длина очереди и среднее время ожидания. Указывается на возможность получения аналогичных результатов для непрерывного времени путем предельного перехода. С. В. Ефремов

8086. Об одном обобщении формул Эрланга. Гнеденко (Про одне узагальнення формул Ерланга. Гнеденко Б. В.), Доповіді АН УРСР, 1959, № 4, 347—350 (укр.; рез. русск., англ.)

Рассматривается обобщение формул Эрланга на тот случай, когда приборы выходят из строя и требуют для своего восстановления затраты времени оператора. Обобщение проводится в следующих предположениях: 1) поток требований предполагается пуассоновским с параметром λ; 2) время обслуживания распределено по по-

казательному закону с параметром μ; 3) вероятность разладки прибора за время h равна $ah+o(h)$ и не зависит ни от того, когда прибор начал работу, ни от того, сколько приборов в ремонте, а также не зависит от того, обслуживает ли этот прибор требование, или свободен; если прибор сломался в тот момент, когда он был занят обслуживанием, то требование теряется; 4) время ремонта прибора распределено по показательному закону с параметром β. Пусть $p_k = \lim_{t\to\infty} P(t)$, $k = 0 \ldots n$, где n — число приборов, обслуживающих требования, и $P_k(t)$ — вероятность, что k приборов в момент t заняты обслуживанием; тогда для p_k выполнены следующие соотношения:

$$p_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\alpha+\mu}\right)^k \prod_{s=0}^{k-1}(1-\pi_{n-s})\,p_0,$$

$$\pi_k = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^k \pi_0, & 1 \leqslant k \leqslant r, \\ \dfrac{n!}{r!\,r^{k-r}\,(n-k)!}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^k \pi_0, & r \leqslant k \leqslant n, \end{cases}$$

$\sum_{s=0}^{n} \pi_s = 1$ и r — число операторов. Приводятся два частных случая этих формул: 1) приборы не могут выходить из строя; 2) вышедшие из строя приборы мгновенно восстанавливаются. Б. А. Рогозин

8087. Краткая таблица для бесконечных очередей. Комэтани (An abridged table for infinite queues. Kometani Eiji), Operat. Res., 1959, 7, № 3, 385—393 (англ.)

Приводится таблица, составленная для облегчения вычислений размеров приемной площадки на конечной станции маршрута автобуса. Предполагается, что автобусы, прибывающие на конечную станцию, распределены по закону Пуассона; распределение времени, в течение которого автобус занимает площадку для высадки пассажиров, рассматривается как показательная функция. Обозначим: b — среднее время стоянки автобуса у площадки; a — среднее число автобусов, прибывающих в единицу времени; $P(0)$ — вероятность того, что у площадки в некоторый момент времени нет ни одного автобуса; N — количество автобусов, которые могут одновременно высаживать пассажиров на площадку; $P_{>t}$ — вероятность того, что автобус ожидает больше t единиц времени. Имеем

$$P_{>t} = P(0)\,[(ab)^N/(N-ab)\,(N-1)!]\exp\{-(N-ab)\cdot t/b\}.$$

Если заданы a и b, можем определить N, задав вероятность $P_{>t}$. Вообще говоря, a и b можно получить из наблюдений, а N является проектируемым объектом. В таблице даны $P(0)$ и $P_{>t}$ при $t/b = 0;\ 0,\ 5;\ 0,5;\ 1,0$ для пятидесяти значений $(a\cdot b)$ от 0,2 до 10,0. Л. Н. Куцев

8088. Применение теории стохастических процессов к планированию инвестиций. Енсен (Application of stochastic processes to an investment plan. Jensen Arne), Metroecon., 1953, 5 129—137 (англ.)

Используя марковский процесс для описания загруженности телефонного траффика в определенном районе и предполагая, что капиталовложения в оборудование производятся, как только спрос на обслуживание превышает возможности телефонной станции, автор описывает метод вычисления размеров капиталовложений. V. E. Beneš

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 3, 241.

8089. Некоторые вопросы статистических измерений наблюденных функций периодограмманализа и практического гармонического анализа. Баров (Върху вида на статистичните мерки при наблюдения и отчети на стойностите на функциите на периодограманализа и практическия хармоничен анализ. Баров В. Б.), Годишник Софийск. ун-т. Физ.-матем. фак., 1956—1957 (1958), 51, № 1, 145—150 (болг., рез. нем.)

Приводятся формулы для математического ожидания, дисперсии, асимметрии и эксцесса для последовательности n независимых случайных величин. Рассматриваются случайные величины вида

$$y(x) = a_0 + \sum_{l=1}^{n}(a_l \cos \omega_l x + b_l \sin \omega_l x),$$

$$\omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_n,$$

где

$$a_0 = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} y_l, \quad a_l = \frac{2}{n}\sum_{l=0}^{n-1} y_l \cos lp\frac{2\pi}{n},$$

$$b_l = \frac{2}{n}\sum_{l=0}^{n-1} y_l \sin lp\frac{2\pi}{n}, \quad p = 1,2,\ldots n-1,$$

и для них вычисляются вышеуказанные характеристики распределения (на примере частных случаев). Работа носит сугубо прикладной характер. В. И. Бабкин

8090. Расчет характеристик некоторых стохастических процессов методом Монте-Карло. Голенко Д. И., Вычисл. математика, сб. 5, 1959, 93—108

Изложены методы моделирования на электронной цифровой машине «Стрела» жизни элементарных частиц с целью получения статистических характеристик этого процесса. Изучаются частицы двух видов: активные (Н-частицы) и пассивные (П-частицы). Процесс начинается с вылета первичной П-частицы с энергией β_0 из начальной точки $x_{нач}$. Расстояние, пролетаемое частицей до момента ее гибели, есть случайная величина с плотностью распределения $\omega(x) = \tau_1 e^{-\tau_1 x}$, где $\tau_1 = \tau_1(\beta)$ есть функция начальной энергии частицы. Гибель П-частицы происходит в результате ее взаимодействия со средой и приводит, в зависимости от энергии П-частицы в момент гибели, либо к образованию одной А-частицы и одной П-частицы с суммарной энергией, равной энергии первоначальной П-частицы в момент ее гибели, причем энергия новой А-частицы есть случайная величина, зависящая от энергии начальной П-частицы и параметров среды (процесс П-I); либо к образованию пары П-частиц и одной П-частицы с суммарной энергией, равной энергии первоначальной П-частицы, причем отношение энергии пары к энергии старой П-частицы есть случайная величина, плотность которой зависит от энергии старой П-частицы (процесс П-II). Гибель А-частицы приводит к одному из трех типов процесса: к образованию двух П-частиц с суммарной энергией, равной энергии А-частицы, отношение энергий новых частиц есть случайная величина, процесс зависит от параметров среды (процесс А-I), к образованию А-частицы и П-частицы, вылетающей под углом рассеяния φ, причем энергии частиц и угол φ суть случайные величины, плотности распределения которых зависят от энергии первичной А-частицы, процесс не зависит от параметров среды (процесс А-II) и к исчезновению частицы (процесс А-III).

Определению подлежат следующие параметры, характеризующие процесс: а) энергетический спектр П-частиц, достигающих соответственно глубин x_1, x_2, x_3, $x_4 = x_{кон}$ (правее $x_{кон}$ моделирование прекращает-

ся); б) энергетический спектр пар П частиц, образованных А-частицами и П-частицами на глубинах до x_1, x_2, x_3, x_4; в) энергетический спектр П-частиц, образованных в результате процесса А-П на глубинах x_1, x_2, x_3, x_4; г) количество П-частиц и пар П-частиц на определенных глубинах для фиксированных интервалов энергии. В. А. Михайлов

8091. Исследование непрерывности одной составляющей в порошковой смеси из двух компонент. Форшер (Analysis of continuity of one phase in a powder mixture of two phases. Forscher F.), J. Franklin Inst., 1955, 259, № 2, 107—114 (англ.)

Под мерой непрерывности порошка A в тщательно перемешанной смеси с порошком B понимается вероятность иметь у случайно взятой частицы порошка A соприкасающуюся с ней частицу порошка A. Для определения этой вероятности находится плотность распределения случайной величины R-расстояния до ближайшей соседней частицы порошка A. Далее в предположении, что части ы являются шарами с радиусами r, причем r является случайной величиной с известным распределением, находится распределение случайной величины $e = r_1 + r_2$, где r_1 и r_2 — независимые случайные величины с $P\{r_i < x\} = P\{r < x\}$, $i = 1, 2$, и, наконец, при несколько произвольном, но упрощающем предположении, что случайные величины R и e независимы, находят выражение для вероятности иметь у случайно взятой частицы порошка A соприкасающуюся с ней частицу того же порошка. Работа завершается обсуждением случая, когда частицы порошка A имеют вид шароз с постоянными радиусами. Б. А. Рогозин

8092. Применение некоторых теорем теории вероятностей к звездной статистике. Ониеску (Aplicatia unor teoreme din teoria probabilităților la statistica stelară. Onicescu O.), Rev. Univ. «C. I. Parhon» și Politehn. București. Ser. științ. natur., 1955, № 8, 35—38 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть $\psi_i(\xi)$ $(i = 1, 2, 3)$ с точностью до множителя вида ξ^a представляют плотности распределения видимых характеристик (светимость, величина, скорость) некоторой созокупности звезд, а $\Psi_i(\xi)$ — плотности тех же абсолютных характеристик (с такой же точностью). Тогда, если $\psi_i(\xi)$ $(i = 1, 2, 3)$ — плотность гауссова распределения, то $\Psi_i(\xi)$ — также гауссова плотность. Вывод основан на теореме Крамера о разложении нормального закона. И. Ф. Красичко

8093. Об анализе модели эпидемии. I (Теоретический подход). Сакино, Хаяси (On the analysis of epidemic model. I (Theoretical approach). Sakino Sigeki, Hayashi Chikio), Ann. Inst. Statist. Math., 1959, 10, № 3, 261—275 (англ.)

Пусть в момент $t=0$ в группу из n не зараженных некоторой болезнью индивидуумов введено a зараженных. В результате контакта зараженного с незараженными могут быть два исхода: или незараженный заболеет, или он имеет иммунитет к этой болезни и перейдет в третью группу. Третья группа пополняется также из числа выздоровевших, умерших в результате болезни или изолированных. Предположим, что к моменту времени t имелось r незараженных, s зараженных и q индивидуумов третьей группы. Ясно, что $r+s+q=n+a$. Развитие эпидемии за промежуток времени $(t, t+\Delta t)$ можно описать условными вероятностями переходов: $\beta_1 rs\Delta t$ — переход из группы незараженных в группу зараженных, $\beta_2 rs\Delta t$ — переход из группы незараженных в третью группу, $\beta_3 s\Delta t$ — переход из группы зараженных в третью группу. Пусть $P_{rs}(t)$ — вероятность в момент времени t иметь r незараженных и s зараженных. Вероятности $P_{rs}(t)$ удовлетворяют следующему дифференциально разностному уравнению:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dP_{rs}(t)}{dt} &= \beta_1(r+1)(s-1)P_{r+1,\,s-1}(t) + \beta_2(r+1)s \times \\ &\times P_{r+1,\,s}(t) - (\beta_1 rs + \beta_2 rs + \beta_3 s)P_{rs}(t) + \\ &+ \beta_3(s+1)P_{r,\,s+1}(t) \\ \frac{dP_{na}(t)}{dt} &= -(\beta_1 n + \beta_2 n + \beta_3)aP_{na}(t)\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

с начальным условием $P_{n,a}(0) = 1$. Введем производящую функцию $\pi(u, v, t) = \sum_{r,s} u^r v^s P_{rs}(t)$. Тогда система (1) преобразуется в дифференциальное уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = (\beta_1 v^2 - \beta_1 uv - \beta_2 uv + \beta_2 v)\frac{\partial^2 \pi}{\partial u\,\partial v} + \beta_3(1-v)\frac{\partial \pi}{\partial v}$$

с граничным условием $\pi(u, v, 0) = u^n v^a$. Используя метод Монте-Карло для решения последнего уравнения, приведены графики изменения средних, дисперсий и ковариации r и s в зависимости от времени.

П. А. Строганов

8094. Сравнение двух методов в микробиологии. Малый (The comparing of two methods in microbiology. Malý Vladimír), Ann. Inst. Statist. Math., 1958, 9, № 2, 109—115 (англ.)

Во многих микробиологических испытаниях исследуется вопрос наличия или отсутствия микробов двумя методами. Производится N испытаний. В каждом испытании по двум методам определяют наличие микробов. Результат испытания считают положительным, если хотя бы одним методом микробы обнаружены, в противном случае результат считают отрицательным. Даются статистические оценки вероятностей обнаружения микробов для каждого метода и вероятности присутствия микробов в исследуемой среде. Л. Н. Куцев

8095. Распределение Виллиса—Юла, относящееся к числу видов в биологическом роду. Мандельброт (La distribution de Willis—Yule, relative aux nombres d'espèces dans les genres biologiques. Mandelbrot Benoit), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 18, 2223—2226 (франц.)

Изучаются некоторые свойства встречающегося в биологии распределения Виллиса—Юла с плотностью $p(s) = Ps^{-(\alpha+1)}$ для $s > 0$ (α — параметр, лежащий между 0 и 1). В частности, показано, что при дополнительных ограничениях биологического характера распределение Виллиса—Юла с параметром $\alpha = \frac{1}{2}$ является наиболее вероятным распределением числа видов в биологическом роду. Б. Н. Гарттштейн

8096. Теоретико-вероятностные проблемы движения нейтронов в атомных реакторах. Модьороди (Neutronok atommagreaktorokban való mozgásának valószínűségszámítási problémái. Mogyoródi József), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1958(1959), 3, № 3-4, 237—250 (венг.; рез. русск., англ.)

Рассматривается бесконечная однородная среда, состоящая из атомных ядер различных типов. Движущийся в этой среде нейтрон при столкновении с ядрами рассеивается или поглощается. Предполагается, что рассеивание изотропно, т. е. что уменьшение энергии нейтрона после столкновения с ядром не зависит от величины его энергии до столкновения. Если E_0 — энергия нейтрона в начальный момент времени t_0, а E — его энергия в момент времени t, то величина $x = \log(E_0/E)$ называется летаргией нейтрона. Изучается вероятность $F(R, x, z)$ того, что при увеличении летаргии от z до x нейтрон не поглощается и проходит путь, длина которого меньше R. Для этой вероятности найдено интегральное уравнение, единственное ограниченное решение которого выражается степенным рядом. Б. Н. Гарттштейн

8097. Вероятностный метод для задач лучистого переноса. II. Проблема Милна. Уэно (The probabilistic method for problems of radiative transfer. II. Milne's problem. Ueno Sueo), Astrophys. J., 1957, **126**, № 2, 413—417 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1959, 8317.

Допускается, что при многократном рассеянии фотонов в полупространстве $t \geqslant 0$ (t — оптическая глубина) при изотропном рассеянии косинус $\mu(t)$ угла наклона траектории фотона к нормали к границе $t = 0$ образует однородный марковский случайный процесс, в котором плотность вероятности перехода из μ' в μ на интервале оптической глубины τ при $\tau \to +0$ имеет вид:

$$p(\mu \mid \mu';\tau) = \frac{p(\mu,0)\tau}{2\mu'} + \delta(\mu-\mu')\left[1 - \frac{\tau}{2\mu'}\int_0^1 p(\mu,0)\,d\mu\right].$$

Тогда плотность вероятности $p(\mu,t)$ для $\mu(t)$ удовлетворяет уравнению Колмогорова — Феллера

$$\frac{\partial p(\mu,t)}{\partial t} = -\frac{p(\mu,t)}{\mu} + \frac{1}{2}p(\mu,0)\int_0^1 p(\mu',t)\frac{\partial\mu'}{\mu'},$$

эквивалентному известному интегральному уравнению проблемы Милна; для $H(\mu) = p(\mu,0)$ получается функциональное уравнение Чандрасекхара. Точное решение проблемы Милна (так называемый закон потемнения к краю) удается получить без прямого рассмотрения интегрального уравнения. А. С. Монин

8098. Основа кинетической теории газа и уравнение Больцмана. Марке (Base de la théorie cinétique des gaz. Equation de Boltzmann. Marquet Simone), Calcul probabilités et applic. Paris, CNRS, 1959, 123—132 (франц.)

Состояние системы из n частиц характеризуется „точкой" $x = (x_1,\ldots,x_n) \in X$, где $x_k = (\alpha_k, \beta_k)$; α_k, β_k — положение и скорость k-й частицы. При воздействии на систему неслучайного поля сил ее „координата" x_t в момент t определяется при помощи некоторого оператора $m_t: x_t = m_t x_0$ (без учета столкновений между частицами); $m_0 = 1$; $m_t m_h = m_{t+h}$. Считается, что $m_t x$ является непрерывным преобразованием пространства $T \times X$ в X (T — область изменения t). Вероятность столкновения трех и более частиц в промежутке времени $(t, t+dt)$ есть $o(dt)$. Вероятность для системы перейти из точки x в точку $A_{ij}x$ (A_{ij} — некоторый оператор, характеризующий результат столкновения) за время $(t, t+dt)$ вследствие столкновения i-й и j-й частиц равна $\psi_{ij}(x)\,dt$. Оператор A_{ij} и функция $\psi_{ij}(\cdot)$ в дальнейшем задаются. Предполагается далее, что существует непрерывная положительная функция энергии $E(x)$, инвариантная относительно оператора m_t и относительно столкновений между частицами. Положение системы в начальный момент $t = 0$ задается функцией распределения вероятностей, $\varphi(x,0)$, причем предполагается, что носитель меры $\varphi(x,0)$ содержится в некотором компакте K, а сама мера симметрична относительно координат всех частиц. Целью статьи является изучение функции распределения вероятностей $\varphi(x,t)$ положения системы в момент t с учетом воздействия поля сил и столкновений. Получено дифференциальное уравнение для $\varphi(x,t)$. Его решение ищется в пространстве мер, относительно которых суммируемы 1 и $E(x)$, и проводится методом последовательных приближений. Эти приближенные решения $\varphi^{(n)}(x,t)$ сходятся к $\varphi(x,t)$ в следующем смысле. Обозначим через $\langle \varphi(x), g(x)\rangle$ интеграл $g(x)$ относительно меры $\varphi(x)$ по всему пространству. Тогда $\langle \varphi^{(n)}(x,t), g(x)\rangle \underset{n\to\infty}{\to} \langle \varphi(x,t), g(x)\rangle$ для всех $g(x)$ из соответствующим образом определенного пространства функций. Доказано, что решение единственно. Если носитель $\varphi(x,t_0)$ содержится в области $V_\rho = \{x: E(x) \leqslant \rho\}$, то оказывается, что это свойство сохраняется для всех $\varphi(x,t)$, где $t > t_0$. Отметим еще одно важное свойство решения $\varphi(x,t)$. Рассмотрим последовательность начальных функций распределения $\{\varphi_n(x,0)\}$, где $\varphi_n(x,0)$ соответствует системе из n частиц, а носитель $\varphi_n(x,0)$ содержится в области $V_n = \left\{x: E_n(x) \leqslant \frac{\rho_n^2}{2n}\right\}$; $E_n(x)$ — соответствующая функция энергии, которая предполагается возрастающей функцией n. Пусть существует такое ρ, что $\sqrt{\sum_{k=1}^n \beta_k^2} \leqslant \rho_n \leqslant \rho\sqrt{n}$, а функция $\psi_{ij}^{(n)}(x)$ (см. определение выше) пропорциональна $\frac{1}{n}$. Пусть $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\langle \varphi_n(x,0), \frac{1+E_n(x)}{2}\right\rangle = 0$ и для последовательности $\{\varphi_n(x,0)\}$ выполнено свойство Больцмана:

$$\lim_{n\to\infty}\langle \varphi_n(x,0),\ g_{n_1}(x)\,h_{n_2}(x)\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle \varphi_n(x,0),\ g_{n_1}(x)\rangle \cdot \lim_{n\to\infty}\langle \varphi_n(x,0),\ h_{n_2}(x)\rangle,$$

где $g_{n_1}(x)$ — функция, зависящая только от $x_1,\ldots,x_{n_1}$, а $h_{n_2}(x)$ — функция, зависящая только от $x_{k+1},\ldots,x_{k+n_2}$ ($k \geqslant n_1$). Тогда свойством Больцмана обладает и последовательность $\{\varphi_n(x,t)\}$ соответствующих функций распределения для всех t. Полученные результаты применяются к случаю, когда $\varphi_n(x,0) = \prod_{k=1}^n f(x_k)$. Р. Ф. Матвеев

8099. Основа кинетической теории и уравнение Больцмана. Случай, когда движение подчинено полю сил. Марке (Base de la théorie cinétique et équation de Boltzmann. Cac où le fluide est soumis à un champ de forces. Marquet Simone), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 18, 1445—1448 (франц.)

Краткое изложение результатов предыдущей статьи. Р. Ф. Матвеев

8100. Вероятность и статистики в теории электрического тока. Пошолль (Probabilités et statistiques dans la théorie du courant électrique. Pocholle Georges), Ann. télécommuns, 1959, **14**, № 3—4, 59—71 (франц.)

Изучаются с точки зрения квантовой физики вопросы сверхпроводимости. Вероятность входит в эти вопросы следующим образом. Каждой частице сопоставляется волновая функция $\psi(\cdot)$ (решение уравнения Максвелла, например). Согласно принципам квантовой физики, вероятность для частицы находиться в некотором элементарном объеме dv равна $|\psi(\cdot)^2|dv$ (Функция ψ соответствующим образом нормируется). Из физических соображений и используя элементарные правила теории вероятностей, автор получает формулу, связывающую температуру перехода проводника в состояние сверхпроводимости с нижней границей спектра его внутренних тепловых колебаний. Далее аналогичным путем доказывается, что кванты распространяющейся по проводнику электрической энергии подчинены статистике Бозе — Эйнштейна (используется линейность волновых уравнений, решениями которых являются функции $\psi(\cdot)$, связанные с различными квантами распространяющейся энергии, и, как следствие, отсутствие взаимодействия между этими частицами). Последняя часть статьи содержит лишь чисто физические рассуждения. Р. Ф. Матвеев

8101. Теоремы сравнения для оценки средних плотностей вероятности столкновений. Дреснер (Comparison theorems for the estimation of average collision probabilities. Dresner Lawrence), Nucl. Sci. and Engng, 1959, **6**, № 1, 63—65 (англ.)

Рассматривается величина (так называемая вероятность столкновения в объеме V)

$$P_V = \frac{1}{V}\int_V d^3r \int_V d^3r' \frac{e^{-|r-r'|}}{4\pi|r-r'|},$$

для которой доказывается три теоремы сравнения.

Теорема 1. Если выпуклая область V разделена плоскостью на две части V_1 и V_2, то $P_V > P_{V_1}$ и $P_V > P_{V_2}$.

Следствие 1. Если выпуклая область V_1 вписана в выпуклую область V_2, то $P_{V_1} < P_{V_2}$.

Теорема 2. Если область V^* получена из первоначальной выпуклой области V с помощью симметризации Штейнера, то $P_{V^*} \geqslant P_V$. Упомянутая симметризация относительно некоторой плоскости Q заключается в том, что симметрично относительно этой плоскости строится область V^*, так что всякая перпендикулярная плоскости Q прямая, пересекающая область V, пересекает и V^* (но только один раз), причем длины отрезков этой линии, заключенные в V и V^*, одинаковы. Такая симметризация сохраняет объем области. Из того факта, что применение такой операции бесконечное число раз относительно любых плоскостей сводит исходную область к сфере, а симметризация относительно всех плоскостей, имеющих общую линию пересечения, к круговому цилиндру, вытекает

Следствие 2. Из всех выпуклых областей максимальную вероятность столкновения имеет сфера, из всех цилиндров заданного объема — круговой цилиндр.

Теорема 3. Если область V составлена из двух перпендикулярных плоскопараллельных пластин S_1 и S_2 или из трех взаимно перпендикулярных пластин S_1, S_2 и S_3, или из цилиндра C и перпендикулярной к нему пластины S, то соответственно $P_V \geqslant P_{S_1} P_{S_2}$ или $P_V \geqslant P_{S_1} P_{S_2} P_{S_3}$, или $P_V \geqslant P_C P_S$.

Приведены физические примеры использования этих теорем в нейтронной физике. И. А. Квасников

8102. О корреляции между временными рядами и статистических индикаторах Мура. Маэр (Correlations among time series and Moore's statistical indicators. Maher John E.), Amer. Statistician, 1958, **12**, № 4, 15—18 (англ.)

Исследуется вопрос о значимости корреляции между временными рядами, предложенными Муром для предсказания циклических движений в торговле, и индексом промышленного производства, принятым за меру динамики торговли. А. П. Хусу

8103. Теория измерения смертности. Гренандер (On the theory of mortality measurement. Grenander Ulf), Skand. aktuarietidskr., 1956, № 1—2, 70—96 (англ.)

Рассматривается лишь оценка параметров α, β, γ в известной формуле Макегама. Оценка производится методами правдоподобия, моментов и методом Кинга-Харди (King-Hardy's method). Далее изучаются следующие вопросы: проверка гипотезы о том, что в двух популяциях интенсивность смертности одна и та же (проверка осуществляется на базе формулы Макегама в предположении, что для одной популяции параметры смертности известны достоверно); непараметрическая оценка структуры смертности; использование априорной информации относительно смертности, числовые исследования. Основное внимание уделено оценкам вероятностей: 1) прожить не менее чем x; 2) прожить до момента $x+z$, если лицо было живо в момент x. Для оценки используется критерий Колмогорова. На числовом примере сравниваются точности оценок, получаемые различными методами. Б. В. Гнеденко

8104. Две теоремы из математической статистики и их применение к теории ошибок в фотометрии и других измерительных науках. Халлерт (Two theorems from mathematical statistics concerning the application of the theory of errors to photogrammetry and other measuring sciences. Hallert B.), Photogramm. Rec., 1959, **3**, № 14, 160—164 (англ.)

Обсуждаются условия применимости центральной предельной теоремы и закона арксинуса. Новых результатов не содержится. Б. А. Рогозин

8105. Экономические исследования на сталелитейном заводе с применением нелинейной множественной корреляции. Штейнекке (Wirtschaftlichkeitsüberlegungen im Stahlwerk mittels mehrdimensionaler nichtlinearer Korrelationsrechnung. Steinecke Volkmar), Z. angew. Math. und Mech., 1956, **36**, № 7-8, 266—268 (нем.)

Исследовалась производительность сталелитейного завода в зависимости от нескольких факторов (продолжительность службы печей, доля легированного железного лома, время загрузки и др.). Некоторые из этих факторов входили в корреляционное уравнение во второй и в третьей степени. Подверглись обработке заводские записи за 5 месяцев, всего около 200 строк. Система 17 нормальных уравнений решалась на электронной счетной машине. Исследование дало ценные результаты (автор приводит два графика) и позволило провести необходимые организационные мероприятия. А. А. Конюс

8106. Применение методов математической статистики в химической промышленности. Феликс (Anwendung mathematisch-statistischer Methoden in der chemischen Industrie. Felix Milan), Chem. Techn., 1958, **10**, № 11, 638—645 (нем.)

Работа содержит перечисление некоторых методов математической статистики, несколько примеров и соображения по поводу целесообразности введения статистических методов при контролировании качества химической продукции, при проведении теоретических исследований и при решении экономических задач.

Б. Н. Гартштейн

8107. Нормальное распределение вероятностей. Мора-Мас (Distribución normal relativa de probabilidades. Mora Mas Francisco- J.), Dyna, 1959, **34**, № 8, 618—621 (исп.)

Анализируются причины деформации кривой Гаусса и случай практической применимости нормального закона. По резюме автора

8108. Как применяется статистика в управлении. Бот (Wat doen wij in een bedrijf met statistiek? Boot W. J.), Statist. neerl., 1959, **13**, № 3, 321—322 (гол., рез. англ.)

8109. Оценка статистических характеристик флуктуаций УКВ радиосигнала при распространении в статистически неоднородной среде. Семенов А. А., Карпеев Г. А., Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика, 1958, № 4, 52—62

8110. Обобщение теории прогноза по способу наименьших квадратов на случай выборочных входных сигналов. Блум (An extension of the minimum mean square prediction-theory for sampled input signals. Blum Marvin), IRE Trans. Inform. Theory, 1956, **2**, № 3, 176—184 (англ.)

8111. Анализ нелинейных систем контроля со случайным входом. Бутон (The analysis of nonlinear control systems with random inputs. Booton R. C., Jr), Proc. Sympos. Nonlinear Circuit Analysis, 1953, **2**, 369—391 (англ.)

8112. Прямой метод оценки риска несработки электрических детонаторов при стрельбе в полете. Суле, Тузо (La méthode directe d'évaluation du risque de raté dans le tir en volées des détonateurs électriques. Soulé J. L., Thouzeau G.), Rev. statist. appliquée, 1956, **4**, № 4, 33—56 (франц.)

8113. **Непрерывные схемы инспекции. Пейдж** (Continuous inspection schemes. Page E. S.), Biometrika, 1954, **41**, № 1, 2, 100-114 (англ.)

8114. **Контроль качества статистическими методами. Робер** (GQMS. Gestion de la qualité par les méthodes statistiques. Robert Georges), Rev. internat. horlog., 1959, № 6, 10—17 (франц.)

8115. **К вопросу о применении методов статистического качественного контроля. Килланн-Торкильсен** (Litt om anvendelsen av statistisk kvalitetskontroll, Kielland-Torkildsen N.), Ingr-og bygningsvaesen; 1959, **54**, № 16, 346—354 (датск.)

8116. **Роль математики в технологии. Корач** (A matematika szerepe a technológiai (gyakorlati) tudományokban. Korach Mór. Tud. közl. Építőanyagipari központi kutató int., 1956, № 2, 15 l., ill.) (венг.)

8117. **Интерпретация производственно-технических данных. Некоторые наводящие примеры, иллюстрирующие применение статистических методов. IV. Котрелл** (Interpretation of production engineering data. Some case studies illustrating the application of statistical techniques. Part IV. Cottrell P. J. W.), Austral. Machinery, 1958, **11**, № 116, 19—23 (англ.)
См. также РЖМат, 1959, 3039, 6146.

8118. **Гониометр Лауе и его использование в качестве пропорционального дифрактометра. Скертчли** (The Laue goniometer and its use as a proportional diffractometer. Skertchly A. R. B.), Acta crystallogr., 1956, **9**, № 3, 320—321 (англ.)

8119. **Математический метод определения нагрузки самолета в турбулентной атмосфере. Зандауэр** (Statystyczna metoda określania obciążeń samolotu w burzliwej atmosferze. Sandauer J.), Techn. lotnicza, 1959, **14**, № 4, 97—101 (польск.)

8120. **Некоторые статистические понятия и приемы для анализа надежности и прогноза. Херд** (Some statistical concepts and techniques for reliability analysis and prediction. Herd G. Ronald), Proc. 5th Nat, Sympos. Reliabil. and Qual. Control Electron. (1959, Philadelphia, Pa). New York, N. Y., Inst. Radio Engrs, 1959, 126—136 (англ.)

8121. **Основы статистики для инженера-планировщика. Дженкинс** (Basic statistics for the design engineer. Jenkins James L.), Electr. Manufact., 1958, **61**, № 5, 105—124 (англ.)

8122. **Применение статистических методов в промышленности. Стаблети** (The use of statistical methods in industry. Stubblety A. J.), Mach. Shop and Factory Plant, 1959, **10**, № 6, 33—37 (англ.)

8123. **Математическая статистика в пищевой промышленности. Дьенге, Равас** (A matematikai statisztika az élelmiszeripari minőségellenőrzésben. Gyenge Anna M., Ravasz László), Élelm. ipar, 1959, **13**, № 9, 290—297 (венг.; рез. русск., нем., англ.)

8124. **Статистика и техника. Мак-Карти** (Statistics and engineering. McCarthy M. D.), J. Instn Electr. Engrs, 1959, **5**, № 60, 700—704 (англ.)

8125. **Теория очередей и ее приложения. Кауфман** (La théorie des phénomènes d'attente et ses applications. Kaufmann A.), Automatisme, 1958, **3**, № 3, 109—114; № 5, 191—195; № 6, 229—231 (франц.)

8126. **Изучение задач хранения при непрерывном времени. Гани, Прабху** (Continuous time treatment of a storage problem. Gani J., Prabhu N. U.), Nature, 1958, **182**, № 4627, 39—40 (англ.)

8127. **Введение в теорию траффика. Ямамото** (Yamamoto Takuma), Дзидо сэйгё, Automat. Control, 1959, **6**, № 1, 35—41 (японск.)

8128. **Некоторые факты, относящиеся к социальной подвижности в Японии. Одака, Нисихара** (Some factors related to social mobility in Japan. Odaka Kunio, Nisihira Sigeki), Ann. Inst. Statist. Math., 1959, **10**, № 3, 283—288 (англ.)

8129. **К теме «Среднее значение и дисперсия производных величин» применительно к вычислению разрывной длины. Мартин** (Zum Thema «Mittelwert und Streuung von abgeleiteten Größen», angewandt auf die Berechnung der Reßlänge. Martin Heino), Faserforsch. und Textiltechn., 1959, **10**, № 4, 172—175 (нем.; рез. русск., англ.)

8130. **Двухвыборочные оценки для производственных измерений. Клейн** (Double sample estimation in work measurement. Klein Morton), J. Industr. Engng, 1959, **10**, № 3, 193—196 (англ.)

8131. **К теории статистики групп солнечных пятен. Надольский** (Contribuţii la o teorie a statisticii grupélor de pete solare. Nadolschi V.). Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi fiz., 1955, **7**, № 4, 1035—1056 (рум.; рез. русск., франц.)

8132. **Исследование разностей двойных линейных измерений и отклонений отдельных измерений от среднего арифметического. Гудкова И. А.**, Научн. тр. Моск. горн. ин-та, 1959, сб. 25, 129—139

8133. **О надежности измерений шероховатости поверхности. Дунин-Барковский И. В., Карташева А. Н.**, Научн. докл. высш. школы. Машиностр. и приборостр., 1958, № 4, 160—169

8134. **Исследование уличного движения методами математической статистики. Балог** (A közúti forgalom lefolyásának vizsgálata a matematikai statisztika módszereivel. Balogh Tibor), Közlekedéstud. szemle, 1959, **9**, № 10, 449—457 (венг.)

8135. **Математическая оценка обломочных залежей. Грожан** (L'évaluation mathématique des gisements détritiques. Grosjean Pierre-V. Mém. Inst. roy. colon belge. Sec. sci. techn. 1953, **8**, № 3, 153 p.) (франц.)

8136. **Применение теоретико-вероятностных методов при исследовании некоторых метеоропатологических явлений. Такач** (Valószínűségszámítási módszerek alkalmazasa bizonyos meteoropatológiai jelenségek vizsgálatánál. Takács Lajos), A magyar tud. akad. Alkalm. mat. int. közl., 1954(1955), **3**, № 3-4, 301—320 (венг.; рез. русск., нем.)

8137. **Эффективность и статистика. Морони** (Efficiency by statistics. Moroney M. J.), Statist. neerl., 1959, **13**, № 3, 281—294 (англ.; рез. гол.)

8138. **Доказательство отцовства. Лукашевич** (O dochodzeniu oicostwa. Łukaszewicz Józef), Zastosow. mat., 1956, **2**, № 4, 349—379 (польск.)

8139. **О показателях развития древостоев. Баттек** (O wskaźnikach rozwoju drzewostanów. Battek J.), Zastosow. mat., 1959, **4**, № 4, 281—299 (польск.; рез. русск., англ.)

8140. **Математическая модель совместной эволюции паразитов и их хозяев. Мод** (A mathematical model for the co-evolution of obligate parasites and their hosts. Mode Charles J.), Evolution, 1958, **12**, № 2, 158—165 (англ.)

8141. **Влияние стерилизованных самцов на естественную популяцию мух це-це. Симпсон** (The effect of sterilised males on a natural tsetse fly population. Simpson H. R.), Biometrics, 1958, **14**, № 2, 159—173 (англ.)

8142. **Исправления к работе «О разложении статистических рядов».** (Berichtigung zur Arbeit «Über die Zerlegung statistischer Reihen» von J. Pfanzagl), Metrika, 1958, **1**, № 3, 242—243 (нем.)
См. РЖМат, 1960, 2102.

8143. **К статистике квантовых систем. Трукса** (Příspěvek ke statistice kvantových systémů. Truksa Ladislav), Pražská univ. Moskevské univ. Sb. výročí 1755—1955, Praha, 1955, 270—274 (чешск.; рез. русск.)

8144 К. **Математические методы статистической механики. Блан-Лапьер, Казаль, Тортра** (Mé-

thodes mathématiques de la mécanique statistique. Blanc-Lapierre André, Casal Pierre, Tortrat Albert. Paris, Masson et Cie, 1959, X, 180 p., ill., 3800 fr.), Bibliogr. France, 1959, 148, № 9, 218 (франц.)

8145 К. Нелинейные задачи в теории шумов. Винер (Nonlinear problems in random theory. Wiener Norbert. Cambridge, Mass., Technol. Press; New York, John Wiley and Sons, Inc.; London, Chapman and Hall, Ltd, 1958, X, 131 pp., ill.) (англ.)

8146 К. Введение в случайные процессы; процесс Пуассона, очереди, повреждения станков. Жиро (Initiation aux processus aléatoires, le processus de Poisson, files d'attente, pannes de machines. Girault Maurice. Paris, Dunod, 1959, X, 109 p., ill., 980 fr.), Bibliogr. France, 1959, 148, № 30, 823 (франц.)

8147 К. Теория информации и ее приложения. (Сб. перев.). Ред. Харкевич А. А. М., Физматгиз, 1959, 328 стр., илл., 10 р. 85 к.

8148 К. Введение в генетическую статистику. Кемпторн (An introduction to genetic statistics. Kempthorne Oscar. New York, John Wiley and Sons, Inc.; London, Chapman and Hall, Ltd, 1957, XVIII, 545 pp., ill.) (англ.)

8149 Д. Статистический метод таксации леса. Мао Шэн-сюй.—Автореф. дисс. канд. с.-х. н., Моск. лесотехн. ин-т, М., 1959

См. также: 7131, 7132, 7135 К, 7136 К, 7144, 7348, 4385, 7528, 7530, 7768, 8150.

ГЕОМЕТРИЯ

Редакторы *С. П. Фиников, А. М. Васильев, Н. М. Остиану*

8150. Проблема иглы Бюффона в пространстве n измерений. Мараваль-Касесновес (El problema de la aguja de Buffon en el espacio de n dimensiones. Maravall Casesnoves Darío), Gac. mat., 1959, **11**, № 3-4, 74—75 (исп.)

В n-мерном евклидовом пространстве ищется вероятность P встречи случайно расположенного в пространстве отрезка длины r с равноудаленными на $d(d>r)$ гиперплоскостями. P вычисляется как вероятность того, что проекция отрезка на прямую, перпендикулярную к плоскостям, содержит точку встречи прямой с плоскостями. Простое вычисление дает

$$P = \frac{r}{d}\,\frac{4^{m-1}[(m-1)!]^2}{(2m)!}, \qquad n = 2m+1,$$

$$P = \frac{r}{\pi d}\,\frac{(m-1)!\,2^{2m-1}}{(2m-1)!}, \qquad n = 2m.$$

Г. И. Дринфельд

8151. Обобщение аффинного преобразования $\mathfrak{r}' = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y$ Дегозанг (Die allgemeine Transformation der Affinität $\mathfrak{r}' = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y$. Degosang O.), Math. und naturwiss. Unterr., 1957, **10**, № 2, 63—66 (нем.)

В преобразовании $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} - \mathfrak{K}(\mathfrak{A}'\mathfrak{r}) + \mathfrak{D} = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{L}z + \mathfrak{D}$ векторы $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{L}, \mathfrak{D}$ зависят друг от друга. Спрашивается, какие существуют преобразования, когда предполагается, что указанные векторы будут независимы. Ограничиваются рассмотрением преобразований $\mathfrak{r}' = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{D}$ на плоскости. Исследуются два случая, когда $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ взаимно перпендикулярны и когда они не перпендикулярны. В каждом случае имеется ряд подслучаев в зависимости от величины и направления векторов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Например: $\mathfrak{A} = i$, $\mathfrak{B} = -j$, $\mathfrak{D} = 0$, имеем симметрию относительно оси Ox. В. А. Маневич

8152. Общие координатные геометрии. I. Сасаяма (General coordinate geometries. I. Sasayama Hiroyoshi), J. Spat. Math. Sasayama Res. Room, 1958, **1**, № 3, 159—186 (англ.)

Курс лекций, посвященных построению аналитической геометрии в гильбертовом пространстве. И. С. Иохвидов

8153 К. От точки к четвертому измерению. Колерус (Vom Punkt zur vierten Dimension. Geometrie f. jedermann. Colerus. Egmont. Berlin — Darmstadt — Wien, Dtsch. Buchgemeinschaft, 1959, 367 S., ill.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, **B**, № 18, 1678 (нем.)

8154 Д. Об одном разделении на классы звездных тел конечного типа. Гейтманек (Über eine Klasseneinteilung der Sternkörper vom endlichen Typus. Heitmanek Johann.—Diss. phil. Wien, 1955, 32 Bl. Maschinenschr.), Oestert. Bibliogr., 1956, № 4, 21 (нем.)

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

8155. Представление вращений и отражений в трехмерном евклидовом пространстве с помощью параметров Кэйли-Клейна. I. Паула-и-Силва (Representação das rotações e reflexões no espaço euclideano tridimensional por meio dos parâmetros de Cayley-Klein. I. Paula e Silva Paulo Roberto), Gaz. mat., 1958, **19**, № 72-73, 4—12 (порт.)

Вводятся понятия о кватернионах, матрице вращения, матрицах Картана $\begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}$ и Паули $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Указаны связи между этими матрицами и вектором $x_1 i + x_2 j + x_3 k$. Вводится матрица $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \rho \end{pmatrix}$ параметров Кэйли – Клейна, указаны ее представление через матрицы Паули и применение к представлению вращений. Новых результатов работа не содержит. Г. И. Дринфельд

8156. Автоматическое регулирование трехмерных векторных величин. Часть 1. Ланг (Automatic control of three-dimensional vector quantities. Part 1. Lange A. S.), IRE Trans. Automat. Control, 1959, **4**, № 1, 21—30 (англ.)

Статья имеет целью ознакомить специалистов по автоматическому регулированию с математическим аппаратом, который может быть применен к расчету некоторых систем автоматического контроля за величинами, которые можно считать трехмерными векторами. Математическая часть статьи посвящена преобразованию координат от одной трехмерной системы координат к другой путем последовательного применения формул преобразования координат в плоском случае, что соответствует возможности совместить две пространственные системы, имеющие общее начало координат, путем последовательных поворотов одной из них вокруг координатных осей. Таким путем удается избежать использования формул сферической тригонометрии, менее знакомых инженерам. Применяется рациональная (с использованием матриц) система записи. Приведены примеры простейших электронных схем, в которых реализуется упомянутая выше последовательность операций. В. Л. Рвачев

8157. Применение дифференциальной геометрии в изучении волокон. Хага, Хёдзюнка, Standardization, 1957, **10**, № 1, 18—24 (японск.)

Работа посвящена приложениям теорем Пуанкаре, Сантало и Бляшке — Сантало в интегральной геометрии к исследованиям по определению средней длины волокна, средней толщины нити, средней площади поперечного сечения нити и т. д. Формулы Кейна (M. W. Kaine), Брэди (O. T. Brady), Бекман (A. Beckman), Альберт Берзин (Albert Berzins) и Кларк (J. d'A. Clark), касающиеся исследований волокон, получаются, таким образом, простым и естественным путем.

Hu Hou-sung

8158. О геометризации электромагнетизма. Дас (On the geometrization of electromagnetism. Das A.), Nuovo cimento, 1959, **13**, № 2, 451—452 (англ.)

Уравнения Максвелла электромагнитного поля можно получить непосредственно из уравнений Эйнштейна, не выходя за рамки обычного четырехмерного формализма. В частности, для этого достаточно считать $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x,k)$, где k — малый параметр, и ограничиться линейными членами разложения

$$g_{\mu\nu}(x,k) = \underset{(0)}{g}_{\mu\nu}(x) + k\underset{(1)}{g}_{\mu\nu}(x).$$

Необходимо еще специализировать параметр k, полагая $k = e/m$ (e — заряд, m — масса электрона), и отождествить компоненты $g_{\mu 4}$ с четырехмерным вектор-потенциалом. Уравнения движения Лоренца при этом также получаются непосредственно из уравнений геодезической. При выводе указанных результатов существенно используется условие Гильберта, накладываемое на компоненты первого приближения $\underset{(1)}{g}_{\mu\nu}$. Я. И. Пугачев

8159. К теории тензоров-девиаторов. Коларов (Към теорията на тензорите-девиатори. Коларов Д.), Годишник Инж.-строит. ин-т. Фак. строит., архитект. и гидротехн., 1957, **9**, № 1, 325—342 (болг.; рез. русск.)

Автор отмечает, что для симметричных тензоров 2-го ранга, применяемых во многих задачах механики, имеются два основных геометрических построения. Это эллипсоид Коши и круги Мора, однако эти приемы дают только картину отдельного симметричного тензора, но они не годятся для отражения взаимодействия и связей между несколькими тензорами. Автор предлагает изображать девиатор посредством вектора в трехосной системе координат на плоскости и определяет классические его инварианты через модуль a этого вектора и его наклон m к одной из осей на плоскости.

Ставится вопрос, можно ли на плоскости построить три оси так, чтобы точка (x_1, x_2, x_3) трехмерного пространства, удовлетворяющая условию

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = 0, \qquad (1)$$

изображалась вектором (a,m) на плоскости, ортогональные проекции которого на оси будут как раз (x_1, x_2, x_3). Такой выбор осей на плоскости для данного соотношения (1) возможен, и углы осей $(2,3) = \gamma_1$, $(3,1) = \gamma_2$, $(1,2) = \gamma_3$ должны удовлетворять условиям: $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 = 2\pi$; $p_1 + p_2\cos\gamma_3 + p_3\sin\gamma_2 = 0$; $-p_2\sin\gamma_3 + p_3\sin\gamma_2 = 0$. Если $p_1 = p_2 = p_3 = 1$, то $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \frac{2\pi}{3}$, и мы получаем в силу (1) девиатор, главные компоненты которого будут (x_1, x_2, x_3), и он может быть изображен вектором на плоскости. Определяются затем выражения главных компонентов девиатора и его инвариантов через параметры (a,m).

С. С. Бюшгенс

8160. Новый графический метод определения превышений и построения плана. Бонфильоли (A new graphical method of level determination and mapping. Bonfiglioli L.), Bull. Res. Council Israel, 1958, **F7**, № 2, 85—92 (англ.)

Рассматривается построение плана и определение превышений при воздушном фотографировании земной поверхности из двух центров проектирования. Заданы центры проектирования S_1 и S_2, плоскости снимков π_1 и π_2, фокусное расстояние камеры и четыре точки A, B, C, D на земной поверхности. Три точки A, B, C, образующие плоскость α, необходимы для решения задачи, а четвертая точка D — для контроля построений. Строятся две совмещенные гомологии, одна из которых между треугольником ABC и его проекцией $A_1B_1C_1$ из центра S_1 на плоскость π_1, а другая между тем же треугольником ABC и его проекцией $A_2B_2C_2$ из центра S_2 на плоскость π_2. На полученном чертеже определяется ортогональная проекция Q_0 произвольной точки Q земной поверхности на плоскость α. Элементарно определяется превышение h точки Q над плоскостью α. Выбирается обычная ортогональная система координатных плоскостей, так чтобы плоскость α была в этой системе плоскостью вертикально-проектирующей. Определив Q_0 и h, автор строит горизонтальную и вертикальную проекции точки Q в выбранной системе. Тем самым определяется плановое положение любой точки земной поверхности и ее превышение над горизонтальной плоскостью. Метод рекомендуется использовать для картографирования горной местности. В. А. Рыжова

8161. Аналитический метод оценки точности графических построений. Назаров В. Н., Уч. зап. Пермск. ун-т, 1958, **15**, № 4, 128—177

Работе предпослан критический обзор существующих графических методов оценки точности графических построений с помощью «пятен» ошибок, после чего формулируются основные теоретические положения аналитического метода оценки точности графических построений, основанного на вычислении средней квадратической ошибки в положении отдельной точки. При этом предполагается, что положение точки на чертеже определяется как пересечение прямых линий и окружностей. Выводятся формулы для вычисления оценок точности элементарных геометрических построений и строятся соответствующие им номограммы. Описываются эксперименты по проверке полученных формул и излагается методика оценки точности сложных графических построений, иллюстрируемая примерами. Даются практические рекомендации, имеющие целью увеличения точности графических построений. Автор показывает преимущества и практическую ценность предложенного им аналитического метода. И. И. Котов

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

8162. Об одном типе круговой номограммы. Копп В. Г., Матем. просвещение, вып. 4, 1959, 171—174

Рассматривается применение одной теоремы элементарной геометрии, предложенной в виде задачи З. А. Скопецом (Матем. в школе 1951, 6, задача № 95), к номографированию трех типов уравнений с тремя и четырьмя переменными. Теорема читается так: На касательной a к окружности даны две точки B и C, симметрично расположенные относительно точки касания A. Через каждую из этих точек проведена секущая, одна из них встречает окружность в точках M и L, а другая — в точках P и Q. Доказать, что прямые MQ и PL пересекают касательную a в точках E и F, симметрично расположенных относительно точки A.

Автор реферируемой заметки, считая эту теорему доказанной, использует ее чертеж, дополнив его, для полу-

чения на касательной a двух проективных прямолинейных рядов:

$$a(E, A, C, \ldots) \overline{\wedge} a(B, A, F, \ldots)$$

и устанавливает, таким образом, на прямой a проективное соответствие параболического типа с двойной точкой A.

Далее, из равенств сложных отношений автор получает уравнения

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{v}=\frac{1}{x}+\frac{1}{z}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}, \quad (2)$$

где через x, y, z, u, v обозначены отрезки на прямой a, считая от точки A. Из (1) и (2) получается уравнение:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{u}\right). \quad (3)$$

Затем автор строит круговую номограмму, при помощи которой решаются уравнения (1), (2) и (3). Номограмма состоит из окружности произвольного радиуса, касающейся прямой a в точке A, и равномерной шкалы, нанесенной на этой прямой по обе стороны от точки A. Дается численный пример решения уравнения (2) при помощи круговой номограммы.

В заключение автор отмечает, что окружность в задаче З. А. Скопеца может быть заменена произвольной кривой 2-го порядка, и доказывает это методами проективной геометрии. Н. А. Колмогоров

8163. Теорема Лемуса и комплексные числа. Любин (The theorem of Lehmus and complex numbers. Lubin C. I.), Scripta Math., 1959, **24**, № 2, 137—140 (англ.)

Используя аппарат комплексных чисел, автор доказывает следующую теорему Лемуса—Штейнера: Если два отрезка $(AP$ и $BQ)$, соединяющие две вершины треугольника ($\triangle ABC$) с точками (P и Q) на противолежащих им сторонах, равны между собой ($AP=BQ$) и делят углы треугольника ($\angle A$ и $\angle B$) на пропорциональные части

$$(\angle CAP : \angle PAB = \angle CBQ : \angle QBA),$$

то треугольник — равнобедренный. Отсюда, в частности, следует теорема Лемуса: Треугольник с двумя равными биссектрисами — равнобедренный. М. Б. Балк

8164. Несколько теорем о треугольниках. Ионеску (Cîteva teoreme despre triunghiuri. Ionescu D. V.), Gaz. mat. şi fiz., 1957, **B8**, № 3, 113—118 (рум.)

Пусть A', B', C' — основания высот треугольника ABC, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и I_0, I_1, I_2, I_3 — центры вписанных и вневписанных окружностей треугольников $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$, и ABC, а также пусть $A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$ — основания перпендикуляров, опущенных из I_0, I_1, I_2, I_3 на стороны ΔABC. Доказывается, что $\Delta \alpha_i\beta_i\gamma_i = \Delta A_iB_iC_i$, для $i = 0, 1, 2, 3$.

Пусть D_i, E_i, F_i — точки пересечения перпендикуляров, проведенных через I_i к сторонам $\Delta A_iB_iC_i$, а $D_i', E_i'F_i'$ — их симметричные относительно середин отрезков AI_i, BI_j, CI_j. Перпендикуляры к прямым AI_i, BI_j, CI_j в точках D_j, E_j', F_j' образуют $\Delta P_jQ_jR_j$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Доказывается, что: 1) радиус описанной окружности $\Delta P_0Q_0R_0$ равен $2R - r$, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей ΔABC, а центр ω описанной окружности $\Delta P_0Q_0R_0$, симметричен центру вписанной окружности относительно центра описанной окружности ΔABC; 2) радиус ρ_i описанной окружности $\Delta P_iQ_iR_i$ равен $2R + r_i$, где r_i — радиус вневписанной окружности ΔABC, противостоящей вершине A, а центр ω_i описанной окружности $\Delta P_iQ_iR_i$ симметричен центру I_i относительно центра описанной окружности ΔABC, при $i = 1,2,3$. П. С. Солтан

8165. Линия Филона. Ивс (Philo's line. Eves Howard), Scripta Math., 1959, **24**, № 2, 141—148 (англ.)

Обзорная статья, в которой собраны результаты, связанные с линией Филона — прямой, проведенной через данную точку внутри данного угла так, чтобы отрезок, образующийся при пересечении этой прямой со сторонами угла, имел минимальную длину. Рассмотрены характеристические свойства линии Филона, показана связь ее с задачей удвоения куба, приведены доказательства невозможности построения этой линии с помощью циркуля и линейки. Приведено несколько обобщений линии Филона. Г. С. Хованский

8166. Об одном замечательном свойстве подерных треугольников. Лабра-и-Фернандес (Una propiedad interesante de los triangulos podares. Labra y Fernández Manuel), Rev. Soc. cubana cienc. fís. y mat., 1955, **3**, № 4, 119—126 (исп.)

Пусть $A'B'C'$ — подерный треугольник точки P относительно треугольника ABC. Подерными прямыми точки P автор называет прямые, соединяющие середины сторон треугольника $A'B'C'$ с соответствующими серединами отрезков, определенных точкой P и каждой из вершин основного треугольника ABC. Средствами аналитической геометрии доказывается, что в каждом треугольнике три подерных прямых любой точки P пересекаются в одной точке. Последняя называется подерной точкой точки P. Устанавливаются некоторые следствия доказанной теоремы, среди которых: а) В каждом треугольнике центр вписанной окружности и его подерная точка совпадают; б) Подерная точка ортоцентра треугольника совпадает с точкой Ньютона; в) В каждом треугольнике подерные точки ортоцентра и центра описанной около основного треугольника окружности совпадают; г) Центр тяжести и точка Лемуана треугольника имеют одну и ту же подерную точку; д) Центр тяжести, точка Лемуана, их подерные точки и соответствующие точки Ньютона коллинеарны; е) В каждом треугольнике подерные точки первой и второй точек Брокара совпадают. Г. И. Глейзер

8167. Об одном замечательном свойстве подерных треугольников. Лабра-и-Фернандес (Una propiedad interesante de los triangulos podares. Labra y Fernández Manuel), Rev. Soc. cubana cienc. fís. y mat., 1956, **3**, № 5, 158—165 (исп.)

Продолжение (реф. 8166) исследования замечательных точек подерных треугольников. Доказывается: а) В каждом треугольнике две изогональные точки имеют одну и ту же подерную точку; б) Изогональные точки треугольника и их подерная точка коллинеарны; в) Подерная точка двух изогональных точек треугольника является серединой определенного ими отрезка. Последнее свойство позволяет значительно упростить построение подерной точки заданной точки. Подерная точка является таким образом центром окружности, проходящей через данные изогональные точки. Эту окружность автор называет изогональной окружностью данной точки. В частности, изогональные окружности ортоцентра и центра описанной около основного треугольника окружности совпадают, так как изогональные точки имеют в данном случае одну и ту же изогональную окружность. Центр этой изогональной окружности совпадает с центром «окружности девяти точек». Вычисляются координаты центра и радиус изогональной окружности точки Лемуана и барицентра основного треугольника, а также первой и второй точек Брокара и доказывается ряд замечательных свойств, среди которых: а) общая хорда изогональной окружности точки Лемуана — барицентра и окружности Брокара проходит через точку Лемуана основного треугольника; б) общая хорда изогональной окружности ортоцентра и окружности Брокара проходит через центр описанной около основного треугольника окружности;

в) изогональная окружность ортоцентра и «окружность девяти точек» треугольника концентричны; г) общая хорда изогональной окружности ортоцентра и окружности, описанной около основного треугольника, параллельна общей хорде первой окружности Лемуана и изогональной окружности точки Лемуана — барицентра. Г. И. Глейзер

8168. Метрические соотношения в треугольнике, основанные на метрических соотношениях в круге. Мадсен-Барбоза (Relações métricas em triângulos retângulos pelas relações métricas em círculos. Madsen Barbosa Ruy), Matemática, 1959, 4, № 13, 45—49 (порт.)

Предлагается новое изложение указанного в заглавии круга вопросов элементарной геометрии. После установления теорем о постоянстве произведения отрезков секущих или хорд окружности, пересекающихся в одной точке, и о том, что касательная является средней пропорциональной между всей секущей и ее внешней частью рассматриваются пять окружностей в связи с прямоугольным треугольником ABC ($\angle A$ — прямой): а) BC — диаметр окружности. Последняя проходит через точки A, B, C и A', симметричную с A относительно BC; б) Окружность с диаметром AC, проходящая через точку H, ортогональную проекцию вершины A на BC; в) Окружность с диаметром AB, тоже проходящую через H; г) Окружность с центром в B и радиусом BA. Сторона CA касается этой окружности в точке A; д) Центр окружности в C, радиус CA. В точке A сторона BA касается окружности.

Как простые следствия выводятся затем известные метрические соотношения в треугольниках, среди которых первая и вторая теоремы Евклида (о высоте и катете как о средних пропорциональных) и теорема Пифагора. Г. И. Глейзер

8169. Теорема Ньютона о четырехугольниках, вписанных в круг. Тёйбер (Teorema lui Newton despre patrulatere înscrise în cerc. Täuber I.), Gaz. mat. şi fiz., 1959, **A11**, № 5, 285—286 (рум.; рез. русск., франц.)

Пользуясь интерпретацией Клейна—Кэли геометрии Лобачевского, автор доказывает следующую теорему гиперболической плоскости: Общие перпендикуляры к парам непересекающихся сторон (d_1, d_2) и (d_3, d_4) полного асимптотического четырехугольника и две прямые, параллельные прямым d_1, d_3 (или d_2, d_4), соответственно d_1, d_4 (или d_2, d_3) пересекаются в одной точке. С помощью интерпретации Пуанкаре находятся другие свойства, среди которых: Пусть четыре коллинеарных точки A, B, C, D определяют на прямой две гиперболических инволюции: (A, B, C, D) и $(A, D; B, C)$; тогда инволюции $(B, B; C, C)$, $(A, A; D, D)$, $(A, B; C, D)$ и $(A, A; B, B)$, $(C, C; D, D)$, $(A, D; B, C)$ имеют по одной общей паре элементов, соответствующих друг другу в инволюции $(A, C; B, D)$.

Примечание референта. Указанная «Теорема Ньютона» устанавливается непосредственно с помощью понятия «запрадительных» прямых (Каган В. Ф., Основания геометрии, ч. I, М., Гостехиздат, 1949, стр. 183). Г. И. Глейзер

8170. Зная площадь и стороны четырехсторонника, найти остальные его элементы. Вильярдино (De un cuadrilátero se conoce su area y los cuatro lados. Calcular los demas elementos. Villardino Rogelio M.), Agrimensura, 1955, **17**, № 18, 102—117 (исп.)

Элементарными средствами устанавливаются формулы, выражающие углы четырехугольника в зависимости от его сторон и площади. Приводятся примеры практических применений и вычисления, необходимые землемерам. Г. И. Глейзер

8171. Трисекция угла. Мок (Trisecting any angle. Mock Alex J.), Math. Teacher, 1959, **52**, № 4, 245—246 (англ.)

Даны два доказательства теоремы: Если из вершины O угла AOB провести дугу AB и хорду AB, то лучи, исходящие из вершины O и делящие хорду на три равные части, не делят дугу на равные части. Дано прямое доказательство и доказательство от противного. С. И. Зетель

8172. Геометрия циркуля постоянного раствора. Халлерберг (The geometry of the fixed-compass. Hallerberg Arthur E.), Math. Teacher, 1959, **52**, № 4, 230—244 (англ.)

Статья посвящается построениям линейкой и циркулем постоянного раствора. Приводится ряд задач, решаемых при помощи этих инструментов (отыскание середины отрезка, восставление перпендикуляра, проведение прямой, параллельной данной, опускание перпендикуляра, деление отрезка на равные части, построение правильного пятиугольника по его стороне, равной раствору циркуля, деление окружности на четыре равные части, построение прямого угла, приближенное построение правильного пятиугольника, построение равностороннего треугольника. С. И. Зетель

8173. Окружность девяти точек. Уэст (The nine points circle. West M. L.), Math. Gaz., 1959, **43**, № 345, 203 (англ.)

Доказывается, что середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром треугольника, лежат на той же окружности, что и середины сторон треугольника и основания высот. В. В. Рыжков

8174. Одно общее свойство окружности девяти точек. Буйклиу (O proprietate generală a cercului celor 9 puncte. Buicliu Gh.), Gaz. mat. şi fiz., 1958, **A10**, № 7, 424—428 (рум.; рез. франц., русск.)

Пусть A', B', C' и A_h, B_h, C_h — соответствующи основания медиан и высот треугольника ABC, а A'', B'' C'' и A'_h, B'_h, C'_h — диаметрально противоположные точки для указанных на окружности девяти точек ΔABC. Доказывается методом барицентрических координат следующее: Прямые AA'_h, BB'_h, CC'_h пересекаются в некоторой точке P; это справедливо не только для окружности девяти точек, но и для некоторого класса кривых второго порядка (в дальнейшем под кривой будем понимать именно такую кривую). Достигается это доказательством предложений: 1) Если центр кризой c, проходящей через ABC, описывает кривую γ, проходящую через A', B', C', то тогда c проходит через фиксированную точку D или через одну из точек A_0, B_0, C_0, симметричных точкам A, B и C относительно A', B', C'. 2) Если A''', B''', C''' — точки, в которых кривая γ встречается вторично стороны ΔABC, тогда прямые AA''', BB''', CC''' встречаются в D. 3) Пусть точки A_1, B_1, C_1, взятые соответственно на сторонах BC, AC, AB ΔABC, удовлетворяют условиям теоремы Чевы. Кроме того, пусть A''_1 — пересечение $B'C'$ с B_1C_1, а $B'_2C'_2$ — симметричные точки для B_1 и C_1 по отношению к A''_1. Тогда пересечение BB'_2 и CC'_2 принадлежит параллели в точке A к BC. 4) Прямые $A_1A''_1$, $B_1B''_1$, $C_1C''_1$ пересекаются в некоторой точке D_1. А также, если g — кривая, проходящая через A_1, B_1, C_1 и D_1, а A_2, B_2, C_2 — диаметрально противоположные на этой кривой к точкам A_1, B_1, C_1, то прямые AA_2, BB_2, CC_2 встречаются в некоторой точке P. 5) Пусть a_1, b_1, c_1 — точки пересечения прямых MA_1, MB_1 MC_1, где M — точка пересечения прямых AA_1, BB_1, CC_1, а a_2, b_2, c_2 — диаметрально противоположные точкам a_1, b_1, c_1 на g. Если выполнено 4), то прямые Aa_2, Bb_2, Cc_2 встречаются в некоторой точке p. П. С. Солтан

8175. Применение метода Жергонна для решения задачи Аполлония. Томас-Ногера (Una deduccion

del metodo de Gergonne para resolver el problema de Apolonio. Tomas Noguera J.), Gac. mat., 1957, **9**, № 8, 229—230 (исп.)

Задача нахождения окружностей, касающихся трех данных окружностей, сводится к стереометрической задаче, решаемой с помощью преобразования инверсии. Пусть π — плоскость данных окружностей, σ_1, σ_2, σ_3 — три сферы, для которых данные окружности являются большими. Любая сфера σ с центром на плоскости π, касающаяся σ_1, σ_2 и σ_3, пересечет плоскость π по большой окружности, являющейся решением предложенной задачи, и наоборот. Таким образом задача Аполлония сводится к следующей: Найти ортогональные к плоскости π сферы, касающиеся трех данных сфер σ_1, σ_2, σ_3, тоже ортогональных к π. Пусть r — касательная плоскость к σ_1, σ_2, σ_3; T_1, T_2, T_3 — соответствующие точки касания, ω — сфера, ортогональная к плоскости r и проходящая через точки T_1, T_2, T_3. Радикальная ось e трех сфер σ_1, σ_2, σ_3 пересечет сферу ω в двух диаметрально противоположных точках P_1 и P_2. Инверсия с центром в одной из них, например P_1, оставляющая неподвижными σ_1, σ_2, σ_3, преобразует плоскость τ в сферу, ортогональную плоскости π и касающуюся σ_1, σ_2, σ_3. Обратно: любое решение σ' можно рассматривать как преобразование некоторой касательной к σ_1, σ_2, σ_3 плоскости в определенной инверсии. Итак, задача определения сфер, касающихся трех данных, равносильна задаче нахождения плоскостей, касательных к сферам. Новое решение получается, выбирая P_2 как центр инверсии. Г. И. Глейзер

8176. О треугольной инверсии. Бланшар (Sur l'inversion triangulaire. Blanchard R.), Mathesis, 1958, **67**, № 7-8, 268—269 (франц.)

Степень точки P относительно ее подерной окружности, отнесенной к треугольнику $A_1A_2A_3$, равна произведению расстояния точки P', инверсной точке P в треугольной инверсии относительно одной из вершин треугольника $A_1A_2A_3$, и расстояния точки O соответствующей стороны подерного треугольника точки O относительно $A_1A_2A_3$. Свойство получается непосредственно из теоремы о разности степеней точки относительно двух окружностей.

Рассматриваемое свойство переносится на тетраэдр: степень точки P относительно ее подерной сферы, отнесенной к тетраэдру $A_1A_2A_3A_4$, равна произведению расстояния точки P', инверсной P в треугольной инверсии относительно одной из вершин тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$, и расстояния точки P до соответствующей грани подерного тетраэдра точки P относительно $A_1A_2A_3A_4$. Частный случай. Дан тетраэдр T и точка I — центр сферы, касательной к четырем его граням, точка, инверсная точке I в треугольной инверсии в антиподерном тетраэдре T' точки I относительно тетраэдра T, есть центр O сферы, описанной около T'. Отсюда, если (Ω, ρ) — сфера, описанная около T, r и R — соответственно радиусы сферы, касающейся четырех граней тетраэдра T и сферы, описанной около T', то $I\Omega^2 = \rho^2 - Rr$, r считается положительным или отрицательным в зависимости от того, направлены ли перпендикуляры от точки I до граней тетраэдра T так же как прямые, соединяющие O с вершинами или противоположно.

Полученная формула есть обобщение известной формулы Эйлера для треугольника. С. И. Зетель

8177. Тетраэдр. Симионеску (Tetraedrul. Simionescu Ch. D.), Gaz. mat. şi fiz., 1959, **B10**, № 5, 257—273 (рум.)

Доказав, что площадь любой грани тетраэдра меньше суммы площадей трех других его граней, автор устанавливает соотношения между площадями граней и двугранными углами тетраэдра и обобщает теорему косинуса. Устанавливается соотношение, связывающее двугранные углы любого тетраэдра. Г. И. Глейзер

8178. О цилиндрах, вписанных в конус и о конусах, описанных около цилиндра. Узаи (Sui cilindri iscritti in un cono e sui coni circoscritti ad un cilindro. Usai Giuseppe), Archimede, 1959, **11**, № 3, 159—163 (итал.)

Речь идет о прямых круглых цилиндрах и конусах. Средствами анализа исследуется вопрос о максимумах и минимумах объемов, боковых и полных поверхностей конусов, описанных около цилиндров. Устанавливается: 1) Если радиус r основания конуса меньше половины его высоты h, то из всех вписанных в конус цилиндров наибольшую полную поверхность имеет тот, высота которого x (расстояние от нижнего основания конуса) удовлетворяет равенству

$$x = h(2r - h)/2(r - h), \quad r < h/2;$$

2) Из всех конусов, описанных около данного цилиндра C, наименьший объем имеет тот конус K, высота которого в три раза больше высоты цилиндра C; из всех цилиндров, вписанных в конус K, наибольший объем имеет C. Вычисляется радиус основания и объем конуса минимального объема. Г. И. Глейзер

8179 К. Начальная геометрия. Болт (A first geometry. Bolt Ronald Leonard. London, Dent, 1959, viii, 103 pp., 4 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1959, № 488, 8 (англ.)

8180 К. Плоская геометрия инцидендий. Примеры к аксиоматике. Пиккерт (Ebene Inzidenzgeometrie. Beispiele zur Axiomatik. Pickert Günter. Frankfurt/M.-Hamburg, Salle, 1958, 92 S., ill., 6. 40 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, A, № 42, 3057 (нем.)

8181 К. Плоская тригонометрия с приложением таблиц. Фуллер (Plane trigonometry, with tables. 2nd ed. Fuller Gordon. New York—London, McGraw-Hill Book Co, 1959, xiii, 281 pp., ill., 37 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1959, № 485, 9 (англ.)

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

8182. Теорема Фейербаха и равнобочная гипербола. Канди (Feuerbach's theorem and the rectangular hyperbola. Cundy H. Martyn), Math. Gaz., 1959, **43**, № 343, 21—23 (англ.)

Из теоремы Фейербаха об изогональных точках, сопряженных относительно $\triangle ABC$, выводится ряд свойств, касающихся окружности девяти точек, педальных окружностей и линий Симпсона. На основании полученных свойств и основной теоремы доказывается теорема «Педальные окружности всех точек, лежащих на некотором диаметре окружности, описанной около $\triangle ABC$, имеют общую точку, которая является центром равнобочной гиперболы, образованной их изогональными сопряженными. Эта точка лежит на окружности девяти точек и является точкой пересечения линий Симпсона точек пересечения диаметра с описанной окружности. Эти линии Симпсона одновременно являются асимптотами прямоугольной гиперболы». Особый интерес представляет случай, когда взятый диаметр совпадает с линией Эйлера. В этом случае вершины $\triangle ABC$, его ортоцентр, центр описанной окружности и точка K, симедианная (т. е. лежащая на симедиане) с центром тяжести G треугольника лежат на равнобочной гиперболе, центр которой есть одна из точек пересечения педальных окружностей точек G и K с окружностью девяти точек. Н. В. Наумович

8183. О конических сечениях, вписанных в треугольник или описанных около треугольника. Бланшар, До (Sur les coniques circonscrites ou inscrites à un triangle. Blanchard R., Deaux R.), Mathesis, 1958, **67**, № 7—8, 266—268 (франц.)

Бланшаром показано, что если коническое сечение Γ, описанное около треугольника $T = ABC$, и Γ', вписанное

в тот же треугольник, касаются в точке D прямой Δ, то прямая Δ', проходящая через две другие общие точки конических сечений, является полярой Γ' трилинейного полюса D_1, прямой Δ относительно T. Результаты Бланшара обобщены До. Пусть прямая Δ' сопряжена прямой Δ относительно конических сечений, вписанных в треугольник $A_1B_1C_1$ и касающихся трилинейной поляры q точки Q треугольника ABC. Когда Δ огибает Γ', стороны треугольника $A'B'C'$ огибают конические сечения, имеющие с Γ' касание третьего порядка в точках $A_1B_1C_1$ и касающиеся пар прямых (BB_1, CC_1), (CC_1, AA_1), (AA_1, BB). Пучок второго порядка, образованный Δ проективен пучку, описанному Δ' с центром Q. Показано, что для существования конического сечения Γ, описанного около треугольника ABC, — сечения, касательного и гомотетического другому коническому сечению Γ', вписанному в треугольник ABC, необходимо и достаточно чтобы Γ' имело центр на эллипсе Штейнера, вписанном в треугольник; касательная Δ в точке касания Γ и Γ' есть трилинейная поляра точки D_1.

С. И. Зетель

8184. Заметка о конических сечениях. Гальего-Диас (A note on the conics. Gallego-Diaz J.), Amer. Math. Monthly, 1959, 66, № 3, 225—228 (англ.)

Преобразование $\Omega = z^2$ при Ω и z комплексных применяется к изучению свойств конических сечений. Используя соотношения между преобразуемыми друг в друга коническими сечениями в плоскостях Ω и z, автор доказывает ряд теорем (теорема Аполлония и др.).

М. В. Потоцкий

8185. О числе вращения нормальной кривой. Гриффин (On the rotation number of a normal curve. Griffin John S., Jr), Compositio math., (1958), 13, № 3, 270—276 (англ.)

Устанавливается связь между дифференциально-геометрическим понятием числа вращения плоской кривой и топологическим понятием индекса точки относительно этой кривой.

8186. К построению эллипса с помощью радиусов кривизны. Флорин (Zur Konstruktion der Ellipse mit Hilfe von Krümmungskreisen. Florin F.), Forsch., Geb. Ingenieurwes, 1956, 22, 134—137 (нем.)

Задан эллипс E; пусть r, w обозначают два из его сопряженных полудиаметров, δ — угол между ними и ρ — радиус кривизны E в конце r. Автор исходит из известной формулы $\rho = \frac{w^2}{r} \sin\delta$ (Demartres G., Cours de géométrie infinitésimale, Paris, 1913, стр. 20). Если два сопряженных диаметра эллипса даны по величине и направлению, то указанная выше формула используется для построения, с помощью циркуля и линейки, дуг четырех кругов кривизны, проходящих через концы диаметров, и искомый эллипс может быть дополнен с помощью лекала (French curve). Точность способа может быть увеличена построением параллелограмма, образованного касательными в искомой кривой в концах заданных диаметров. Две пары точек кривой, лежащие на двух диагоналях параллелограмма, могут быть определены путем построения с помощью циркуля и линейки, и два сопряженных диаметра, полученных таким образом, могут быть рассматриваемы тем же путем, как данные диаметры. Семь рисунков иллюстрируют текст.

N. A. Court

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 2, 145.

8187. О составляющих вектора. Кремер (On vector components. Kremer Hugo F. Soc. Parana Mat. Anuário, 1955, 2, 3—4) (порт.)

8188. Обобщенные понятия подеры. Кымпан (La généralisation de la notion de podaire. Cîmpan Florica T. Rev. Univ. «Al. I. Cuza» Inst. Politehn. Iași, 1954, 1, 28—43) (рум.; рез. русск., франц.)

Подера C_{12} кривой C_1 по отношению к кривой C_2; C_{12} — ортоптическая кривая пары C_1, C_2. Случай, когда C_1 — прямая. Обобщение теорем Каталана и Штейнера — Раабе для обычных подер.

O. Bottema

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 5, 413.

8189. Криволинейное движение. (Годограф и его приложения). Мехия-Рамирес (Movimiento curvilíneo (La odógrafa y sus aplicaciones). Mejía Ramírez Jorge), Dyna (Colombia), 1957, 24, № 73. 25—33 (исп.)

Элементарнейшая теория векторного представления движения точки по кривой и применения годографа скорости, содержащаяся в большинстве учебников механики.

И. Н. Веселовский

8190. Учебное пособие, используемое в геометрии движения. Райт (Ein Lehrgerät zur Bewegungsgeometrie. Raith F.), Math. und naturwiss. Unterr., 1959, 12, № 3, 127—128 (нем.)

Приводится пример применяемого в четвертых и третьих классах гимназии ФРГ наглядного ознакомления учащихся с многократным осевым отражением. Для этой цели служит шаблон, имеющий форму прямоугольной трапеции с отверстием в форме тупоугольного треугольника. На четырех чертежах иллюстрируется использование сторон шаблона в качестве осей отражения.

Н. В. Наумович

8191 К. Общая теория поверхностей второго порядка. Учебн. пособие по аналитической геометрии для заочн. отд. пед. ин-тов. Иваницкая В. П., М., Учпедгиз, 1958, 124, стр., илл., 1 р. 60 к.

Дается простое и в то же время строгое изложение «общей теории поверхностей второго порядка». В отличие от многих учебников по аналитической геометрии здесь приведены оригинальные и строгие исследования: а) вопроса определения числа независимых уравнений, определяющих главные направления в зависимости от кратности корня характеристического уравнения; б) уравнений, определяющих центр поверхности второго порядка.

Книга предназначается для студентов-заочников педагогических институтов; она написана ясным и доступным для понимания языком, содержит много примеров и задач для самостоятельной работы.

С. В. Бахвалов

8192 К. Формулы и упражнения по аналитической геометрии с применениями анализа к геометрии. Спампинато (Formulario ed esercizi di geometria analitica con applicazioni dell'analisi alla geometria. 4a ed. riv. ed ampl. Spampinato Nicolò. Napoli, R. Pironti e F., 1958, 632 p., 5800 L.) Bibliogr. naz. ital., 1958, 1, № 2, 59 (итал.)

8193 К. Векторный анализ. По соответствующим разделам лекций по высшей математике в Высшей школе тяжелого машиностроения. Мантёффель (Vektoranalysis. Nach d. entsprechenden Kap. d. Vorlesg Höhere Mathematik geh. an d. Hochsch. f. Schwermaschinenbau, Magdeburg. Manteuffel Karl. Berlin, Dtsch. Verl. Wiss., 1957, 59 S.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, B, № 2, 152 (нем.)

ПРОЕКТИВНАЯ И НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИИ

8194. Инволюция. Симионеску (Involuția. Simionescu G. D.), Gaz. mat. și fiz., 1957, B8, № 2, 57—68 (рум.)

Статья не содержит новых результатов. Указанный материал можно найти в книге Н. А. Глаголева «Проективная геометрия» (М.—Л., ОНТИ НКТП СССР, 1936, гл. II, § 6).

П. С. Солтан

8195. Автоаполярная триада. Лаврова Р. С., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1959, 77, 281—290

Впервые автоаполярную триаду рассматривал А. К. Власов (Полярные системы высших порядков в формах 1-й ступени, М., 1909), который дал это название особой конфигурации трех конических сечений, обладающих тем свойством, что каждые два конических сечения являются взаимнополярными относительно третьего. Значительно позже А. К. Власова, в 1938 г., эту конфигурацию исследовал французский математик Гамбье. В третий раз ее рассмотрел в 1941 г. венгерский геометр Клюг, а в 1946 г. французский математик Коллрос рассматривает в своей книге «Проективная геометрия» так называемые контравариантные и ковариантные конические сечения.

В реферируемой статье устанавливается связь между работами всех вышеназванных математиков и даются новые доказательства свойств кривых автоаполярной триады. Одно из свойств кривых триады рассматривается в связи со следующей теоремой, доказанной французским математиком Коллросом: Прямые, пересекающие два конических сечения C_1 и C_2 в четырех точках, образующих гармоническую группу, огибают кривую 2-го класса, которая называется контравариантной по отношению к C_1 и C_2. Контравариантная кривая $\overline{C}$ двух конических сечений C_1 и C_2 есть коническое сечение, касающееся 8 касательных 4 точек пересечения C_1 и C_2.

Двойственная теорема: Геометрическое место точек, из которых касательные, проведенные к двум коническим сечениям C_1 и C_2, образуют гармоническую группу, есть кривая второго порядка, называемая ковариантной по отношению к C_1 и C_2. Ковариантная кривая $\overline{C}$ проходит через 8 точек касания 4 общих касательных к кривым C_1 и C_2.

Далее доказывается теорема: Полярные треугольники одного конического сечения, вписанные в другое, огибают третье коническое сечение, которое будет являться контравариантным по отношению к первым двум.

Затем формулируется двойственная теорема: Геометрическое место вершин полярных, относительно данного конического сечения, треугольников, описанных около другого конического сечения, есть кривая второго порядка, ковариантная по отношению к первым двум.

Из этих теорем следует, что каждая из кривых триады является в одно и то же время контравариантной и ковариантной кривой по отношению к двум другим. На основании свойств контравариантных и ковариантных кривых можно сделать вывод, что кривая автоаполярной триады проходит через восемь точек прикосновения общих касательных двух других конических сечений и касается восьми касательных, проведенных из 4 точек пересечения двух других кривых. Автор отмечает, что А. К. Власов рассматривал такое расположение кривых триады, когда два конических сечения являются кругами с равными радиусами, а третье — гиперболой; причем общая хорда кругов равна их радиусу, а их центры являются фокусами гиперболы с действительной осью, равной радиусу кругов. Принимая это во внимание, автор дает доказательство свойств кривых триады аналитическим методом.

В конце статьи автор рассматривает конфигурацию трех конических сечений, исследованную синтетически венгерским математиком Клюгом, который доказал, что из трех конических сечений конфигурации одно непременно будет гиперболой. Клюг исследовал частный случай, когда все три кривые являются равносторонними гиперболами с общим центром, повернутые друг относительно друга на 60°. Автор дает и здесь доказательство свойств этой конфигурации аналитическим методом. Библ. 4 назв. В статье имеются опечатки.

Н. А. Колмогоров

8196. Проективитет. Симионеску (Omografia. Simionescu Gh. D.), Gaz. mat. şi fiz., 1956, B7, № 10, 505—521 (рум.)

Автор, отправляясь от примеров, приходит при помощи обобщения к понятию преобразования точек одной прямой в точки другой прямой. На каждой из прямых он вводит неоднородные координаты и определяет, вследствие этого, проективное преобразование или проективитет для двух рядов первого порядка при помощи дробно-линейной функции $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$, где $ad-bc \neq 0$. На основании этого он доказывает что: 1) проективитет определяется тремя парами соответствующих точек; 2) множество проективитетов образует группу; 3) бесконечной точке на одной прямой соответствует определенная точка на другой прямой; 4) необходимым и достаточным условием, чтобы преобразование было проективитетом, является равенство сложных отношений четырех точек, взятых соответственно на разных прямых; 5) если пучок из четырех прямых пересекается двумя прямыми, то на последних образуются четверки точек, сложные отношения которых равны; 6) если два ряда точек, образующие проективитет, имеют одну общую точку соответствующей самой себе, то множество прямых, соединяющих соответствующие точки этих двух рядов, пересекаются в одной точке.

Затем автор дает несколько частных случаев проективитетов, представляющих собою гомотетию и параллельный перенос. Наконец, автор рассматривает проективитет двух рядов с общим носителем и показывает, что в этом случае не может быть более двух двойных точек, если предполагать, что проективитет не тождественный. Здесь же он показывает, что пара двойных точек делит любую пару соответствующих точек в одном и том же отношении, если же эти две двойные точки совпадают, то отношение равно $+1$. Для всех рассмотренных положений строятся примеры. П. С. Солтан

8197. О комплексе прямых, порождаемом тетраэдральным комплексом. Маневич В. А., Сб. студ. научн. работ. Физ.-матем. фак. Моск. гор. пед. ин-та им. В. П. Потемкина, М., 1958, 3—20

8198. Параметрическая шестерка тетраэдральных лучевых комплексов Рейе одного и двух главных тетраэдров. Ниче (Parametrische Sextupel Reyescher tetraedraler Strahlenkomplexe eines und zweier Hauptteraeder. Ničе Vidko), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1958, **13**, № 2, 107—120 (нем.; рез. сербо-хорв.)

Доказывается теорема: Данный тетраэдр T и данное число η определяют шесть различных тетраэдральных комплексов, для которых T — главный тетраэдр, а η — характеристический инвариант (Sturm R., Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, Leipzig, 1909, II; реф. 8197). Показано, что все прямые пространства, встречающие грани двух тетраэдров в четверках точек, сложные отношения которых равны (точки каждой четверки берутся в любом порядке), образуют конгруэнцию 144-й степени. Подобным путем получают конгруэнцию более высокого порядка. В. А. Маневич

8199. О штейнеровских тройках и четверках. Ханани (On Steiner's triples and quadruples. Hanani H.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 29—30 (англ.)

Система $[k, l, m]$ $(m \geqslant k \geqslant l)$ есть семейство S подгрупп, содержащих k элементов каждой группы E, имеющей m таких элементов, что каждая подгруппа E имеет l элементов, включенных точно в один элемент S. Доказывается, что система $[4, 3, m]$ (эквивалентная штейнеровским четверкам) существует тогда и только тогда, когда $m \equiv 2$ или $4 \pmod 6$. Более того,

дан новый метод построения системы [3, 2, m] (штейнеровских троек). Известно (M. Reiss, E. H. Moore), что система [3, 2, m] существует тогда и только тогда, когда $m \equiv 1$ или 3(mod 6), но это доказывалось с помощью индукции и построения троек — громоздко.

Из резюме автора

8200. Некоторые вопросы, связанные с квадратичным комплексом. Маневич В. А. Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 5, 38—39

Доказываются два предложения, относящиеся к произвольному квадратичному комплексу, и два предложения — к тетраэдральному комплексу. Например: а) бисеканты пространственной кривой третьего порядка, описанной около тетраэдра *ABCD*, принадлежат тетраэдральному комплексу с главным тетраэдром *ABCD*, б) если плоскость σ вращается вокруг прямой g, то полюс g относительно кривой второго порядка, которую огибают лучи квадратичного комплекса, лежащие в плоскости σ, описывает прямую g_1.

Н. И. Кованцов

8201. Построения в гиперболической плоскости. Аль-Дхахир, Шекури (Constructions in the hyperbolic plane. Al-Dhahir M. W., Shekoury R. N.), Proc. Iraqi Scient. Soc., 1958, **2**, 1—6 (англ., рез. арабск.)

Авторы решают с помощью циркуля и линейки следующие задачи на построение в плоскости Лобачевского: 1) построение касательной прямой к данному орициклу, параллельной данной прямой; 2) построение касательной прямой к данному орициклу, перпендикулярной данной прямой; 3) построение общих внешних и внутренних касательных прямых к двум данным окружностям; 4) построение общих внешних и внутренних касательных прямых к двум данным орициклам; 5) построение орицикла, касательного к двум данным орициклам.

А. Л. Вернер

8202. О правильных многосторонниках и многогранниках в пространстве Лобачевского. Заморзаев А. М., Уч. зап. Кишиневск. ун-т, 1959, **39**, 195—207

Замыкание плоской односвязной области, ограниченной прямыми, лучами и отрезками, автор называет многосторонником. Замыкание же односвязной пространственной области, ограниченной плоскостями и многосторонниками, — многогранником. Правильные многосторонники и многогранники определяются при помощи движения. Доказан ряд теорем, устанавливающих характер правильных многосторонников, которые можно вписать или описать около линий постоянной кривизны, а также несколько аналогичных теорем, относящихся к правильным многогранникам и поверхностям, допускающим свободное движение в себе. Исследован вопрос о заполнении плоскости Лобачевского правильными многосторонниками. В конце работы иллюстрируются на карте Пуанкаре многосторонники, описанные около кривых и систем кривых постоянной кривизны.

В. И. Коба

8203 К. Руководство к учению аналитической и проективной геометрии. Бальдассарри (Guida allo studio della geometria analitica e proiettiva. Sunti ed esercizi. Vol. 2. Baldassarri Mario. Padova, C.E.D.A.M., 1958, XI, 419 p., 4000 L.) Bibliogr. naz. ital., 1958, **1**, № 3, 106 (итал.)

8204 К. Основы проективной геометрии. Вышин (Základy projektivní geometrie. Vyšín Jan. Praha, SPN, 1958, 158 s.) (чешск.)

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

8205. Лекция о геометрическом чертеже. Дюпа (La lecture du dessin géométrique. Dupas R.), Métallurgie et constr. méd., 1959, **91**, № 7, 549—551 (франц.)

Популярная лекция, посвященная выяснению значения трех ортогональных проекций для изображения тел.

А. Г. Школьник

8206. К вопросу о синтетическом доказательстве основной теоремы аксонометрии. Вальков К. И. В сб. XVII. Научн. конференции проф.-преподават. состава Ленингр. инж.-строит. ин-та. Секц. архитект. градостр-ва, графики, обществ. н. Л., 1959, 42—44

Отмечается неточность в формулировке основной теоремы центральной аксонометрии, являющейся аналогом теоремы Польке — Шварца, предложенной Н. М. Бескиным. При специальном задании пространственной и плоской конфигурации Дезарга искомый центр проектирования может оказаться несобственным и теорема, сформулированная Н. М. Бескиным, действительно теряет силу. Однако этот специальный случай рассмотрен Н. М. Бескиным отдельно в работе, цитируемой автором. Предлагается наложить на плоскую дезаргову конфигурацию и проекцию пространственной дезарговой конфигурации другие условия, чтобы положение плоскости проекций можно было фиксировать с той или иной степенью определенности.

З. А. Скопец

8207. О некоторых закономерностях связи в центральном и параллельном проектировании. Филиппов П. В., Зап. Ленигр. горн. ин-та, 1958, **36**, № 3, 156—165

В начале статьи автор отмечает вполне очевидные теоремы о расположении проекций точек, при двух различных центрах (или направлениях) проектирования. Пользуясь аксонометрическими проекциями, автор иллюстрирует упомянутые теоремы построениями на плоскости картины. Далее показано преобразование одной аксонометрической проекции в другую (более наглядную) при помощи подходящего выбора нового направления или центра проектирования. Можно также преобразовать центральную проекцию в параллельную или обратно. В конце статьи показано построение комплексного чертежа строительного объекта по его фотоснимку. Для выполнения указанных построений требуется позиционная, а иногда и метрическая полнота чертежа.

Н. Ф. Четверухин

8208. Сопряженные проекции. Филиппов П. В., Зап. Ленингр. горн. ин-та, 1958, **36**, № 3, 166—183

Рассматриваются частные случаи центральной аксонометрии, когда центр проектирования лежит на координатной плоскости или координатной оси натуральной системы координат. В этих случаях задача о построении изображения и определения всех его параметров может оказаться частично неопределенной. Однако задача может быть решена, если выполнить проектирование из другого дополнительного центра проекций. Необходимые соображения о переходе к новому центру проекций были высказаны автором в предшествующих его статьях. В настоящей статье показывается на ряде примеров, как следует выбирать дополнительный центр (или центры) проектирования, который автором называется «сопряженным» с первым. Сопряженное проектирование позволяет находить все элементы изображения.

Н. Ф. Четверухин

8209. Угловая перспектива. Опейко Ф. А., Тр. Ин-та торфа. АН БССР, 1957, **6**, 500—507

Отмечаются некоторые недостатки способа линейной перспективы. Автор предлагает иной способ отображения точек пространства на плоскости, который он называет способом «угловой перспективы». Согласно этому способу точки пространства отображаются сперва на сферу при помощи центрального проектирования из центра сферы; затем сферическая поверхность в ее практически полезной части отображается конформно на плоскость. При этом меридианы и параллели сферы отображаются в виде прямых (радиусов) и окружностей. Последние

строятся по формуле $\rho = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, где ρ — есть радиус окружности на изображении, α — угол (широта) параллели на сфере, r — радиус сферы. Сетка, изображающая меридианы и параллели сферы, позволяет переносить точки сферы по их угловым координатам (широта, долгота) на изображение. В дальнейшей части работы даются формулы и таблицы для подбора объектива фотокамеры, при помощи которого можно получить изображение, удовлетворяющее условиям угловой перспективы. К сожалению, в работе не приведены примеры изображений в угловой перспективе. Н. Ф. Четверухин

8210. Методическое пособие по начертательной геометрии. Указания и контрольн. работы для студ. строит. специальностей заочн. ин-тов. Брилинг Р. С. Харьков, Харьковск. ун-т, 1958, 82 стр., илл., 3 р. 20 к.

Методическое пособие имеет своей целью служить руководством для самостоятельной работы студентов строительных специальностей заочных институтов. В нем приводится ныне действующая программа учебного курса начертательной геометрии и даются методические указания о порядке изучения материала по учебникам, рекомендованным программой, снабженные вопросами и упражнениями для самопроверки. В пособии приведены тексты контрольных работ и сформулированы требования, которым должна удовлетворять графика контрольных работ и объяснительные записки к ним. Последний раздел пособия содержит тексты задач для самостоятельной работы по всем основным разделам курса. И. И. Котов

8211 К. Курс начертательной геометрии. [Для втузов]. Чалый А. Т. Москва—Киев, Машгиз, 1959, 279 стр., илл., 7 р. 35 к.

8212 К. Начертательная геометрия. I. Крамер (Darstellende Geometrie. I. Kramer Werner. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1959, VIII, 188 S., ill.) (нем.)

Реферируемый курс предназначен в качестве учебника по начертательной геометрии для высших учебных заведений ГДР.

Первая глава посвящена рассмотрению ортогональных проекций на одну и несколько плоскостей. Излагаются основные свойства ортогональных проекций на одну плоскость. Метрическая определенность чертежа достигается при этом заданием ортогональной проекции точки и ее расстояния от плоскости проекций, задаваемого на чертеже отрезком, расположенным на направленной прямой, общей для всех точек пространства. Прямая линия задается двумя своими точками, плоскость — точками или прямыми, определяющими ее положение в пространстве. При решении задач используются следы прямых и плоскостей в плоскости проекций.

В первом параграфе излагается решение задач по определению следа прямой, угла ее наклона к плоскости проекций и длины отрезка; решаются задачи на принадлежность точек, прямых и плоскостей, на построение линии ската плоскости и проекции перпендикуляра к плоскости; задачи на пересечение прямых с плоскостями и плоскостей между собой, вращение точки вокруг линии уровня. Второй параграф этой главы посвящен возможным приложениям элементарных теоретических сведений. В ней рассматриваются некоторые задачи по конструированию крыш зданий, земляных насыпей и устройства солнечных часов. В третьем параграфе излагаются некоторые задачи, связанные с построением ортогональных проекций окружности, а также цилиндра и конуса вращения. Параграф четвертый посвящен шару. В пятом параграфе излагаются графические способы решения задач сферической геометрии в применении к математической картографии. Шестой параграф посвящен изучению способа перемены плоскостей проекций. Здесь дается решение различных позиционных и метрических задач на окружность, цилиндр, конус и шар с применением перемены плоскостей проекций. Автору удается дать читателю многие сведения из начертательной геометрии, не требующие для своего изложения применения комплексного чертежа, что является отличительной особенностью реферируемого курса.

Вторая глава посвящена ортогональным проекциям на несколько плоскостей проекций. В параграфе седьмом излагаются вопросы изображения точек, прямых, плоскостей и многогранников на комплексном чертеже двух плоскостей. В восьмом параграфе рассматривается пересечение полиэдров в девятом параграфе — круг, конус, цилиндр и шар. Изложение вопросов — стандартно.

Третья глава содержит подробные сведения о конических сечениях и дает способы построения их проекций как сечений прямого конуса вращения. И. И. Котов

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

8213. О несмешанности места ветвления алгебраической функции. Зарискій (On the purity of the branch locus of algebraic functions. Zariski Oscar), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1958, **44**, № 8, 791—796 (англ.)

Рассматривается абсолютно неприводимое r-мерное нормальное алгебраическое многообразие V/k, над произвольным полем k, нормализация его V^*/k^* в конечном сепарабельном алгебраическом расширении K^* поля функций K на V/k (где k^* — алгебраическое замыкание k в K^*) и точки $P^* \in V^*$ и соответствующая ей точка $P \in V$. Дается критерий неразветвленности P^*; P^* не разветвляется тогда и только тогда, когда каждое локальное дифференцирование в P^* имеет не более одного продолжения до локального дифференцирования в P^*. Результат этот уточняется так: P^* не разветвляется тогда и только тогда, когда векторное пространство локальных дифференцирований в P^* получается из пространства локальных дифференцирований в P расширением поля скаляров $k(P) \to k^*(P^*)$. Таким образом, совокупность точек из V^*, разветвляющихся относительно V, является алгебраическим многообразием Δ (над k) — местом ветвления V^*/k^*.

Доказывается следующая основная теорема: Если P^* — точка из Δ и соответствующая точка P проста на V/k, то в P^* многообразие Δ локально чистое (не смешанное), $(r-1)$-мерное; в частности, если V — неособенное, то Δ — чистое $(r-1)$-мерное подмногообразие на V^*. Теорема доказывается в предположении, что k либо характеристики нуль, либо совершенное (готические буквы в формулировке ее следует заменить латинскими). В. В. Морозов

8214. Замечания к работе Зариского о несмешанности мест ветвления. Нагата (Remarks on a paper of Zariski on the purity of branch loci. Nagata Masayoshi), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1958, **44**, № 8, 796—799 (англ.)

Доказательство основной теоремы выше реферированной работы (реф. 8213) для случая несовершенного поля. В. В. Морозов

8215. Об одном соотношении между жанрами алгебраической нерегулярной поверхности. Маркьонна (Sopra una relazione fra i generi di una superficie algebrica irregolare. Marchionna Ermanno), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957 (1958), **23**, № 6, 394—400 (итал.)

Верхняя граница абсолютного линейного жанра $p^{(1)}$ алгебраической поверхности в зависимости от арифметического жанра p_a была указана Розенблатом (Rosenblatt A., C. r. Acad. sci., 1912, **154**, 1494) в виде соотношения

$$p^{(1)} \leqslant 16\, p_a + 27. \qquad (1)$$

В дальнейшем Севери дал другое более выразительное неравенство, которое можно представить в виде

$$p^{(1)} \leqslant 10\,p_a + 2q + 10, \qquad (2)$$

если ввести иррегулярность $q = p_g - p_a$. Спрашивается, можно ли улучшить границу Розенблата и для иррегулярных поверхностей. Здесь доказывается, что для иррегулярных поверхностей при $p_a \geqslant 0$ вообще удовлетворяется неравенство

$$p^{(1)} < 11\,p_a + 17. \qquad (3)$$

Возможные исключения следует искать среди частных поверхностей, имеющих пучок эллиптических кривых; известно, что арифметический жанр не может превосходить $12\,p_a + 13$. При наличии неравенства Ротта $2q \leqslant p_a + 6$ для поверхностей, не содержащих иррациональных кривых пучка, соотношение (3) непосредственно вытекает из (2); при $2q > p_a + 6$ доказательство соотношения (3) получается с помощью инварианта Цойтена—Сегре и соотношения Нётера. Исключения из соотношения (3) следует искать между поверхностями с пучком эллиптических кривых, для которых $p > 1$, $p_a < 2q + 6$, $p_a > q - 4$ для этих поверхностей всегда имеется неравенство $p^{(1)} \leqslant 12\,p_a + 13$. С. С. Бюшгенс

8216. Представление гиперэллиптической поверхности трипотенциального пространства S_3 через многообразия V_8 комплексного пространства S_{11}. Симонелли (Rappresentazione mediante varietà V_8 dell' S_{11} complesso delle superfici iperellittiche dell' S_3 tripotenziale. Simonelli Italo), Ricerca, 1958, 9, luglio-dic., 21—27 (итал.)

Пусть $f(x_1, y_1)$ — абелева функция двух комплексных переменных и

$$A(f) = F(X, Y) = f(x_1, y_1)\,u_1 + [x_2 f_{x_1}(x_1, y_1) + y_2 f_{y_1}(x_1, y_1)]\,u_2 + [x_3 f_{x_1}(x_1, y_1) + y_3 f_{y_1}(x_1, y_1) + x_2 y_2 f_{x_1 y_1}(x_1, y_1) + \frac{1}{2} x_2^2 f_{x_1 x_1}(x_1, y_1) + \frac{1}{2} y_2^2 f_{y_1 y_1}(x_1, y_1)]\,u_3$$ — трипотенциальное продолжение функции $f(x_1, y_1)$. Если $f(x_1, y_1) = \varphi(x_1, y_1)/\psi(x_1, y_1)$, то $A(f) = A(\varphi)/A(\psi)$. Отсюда следует: если функции $f(x_1, y_1)$, $g(x_1, y_1)$, $h(x_1, y_1)$ обладают матрицей периодов

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ w_1' & w_2' & w_3' & w_4' \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

и являются базисом совокупности абелевых функций с периодами (1), то функции $A(f)$, $A(g)$, $A(h)$ обладают матрицей периодов

$$\begin{pmatrix} w_1' u_1, & w_2' u_1, & w_3' u_1 & w_4' u_1 \\ w_1 u_1, & w_2 u_1, & w_3 u_1 & w_4 u_1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

и каждая абелева трипотенциальная функция, имеющая периоды (2), является рациональной функцией от $A(f)$, $A(g)$, $A(h)$.

Теорема. Гиперэллиптическая трипотенциальная поверхность

$$\rho_t = \Theta_t(x_1, y_1),$$

$$\sigma_t = x_2 \Theta_{t x_1} + y_2 \Theta_{t y_1},$$

$$\tau_t = x_3 \Theta_{t x_1} + y_3 \Theta_{t y_1} + \frac{1}{2} x_2^2 \Theta_{t x_1 x_1} + \frac{1}{2} y_2^2 \Theta_{t y_1 y_1} + x_2 y_2 \Theta_{t x_1 y_1}, \quad t = 1, 2, 3, 4,$$

представляется в проективном комплексном пространстве S_{11} многообразиями V_8:

$$\xi_1 t = h_7^2 \Theta_t,$$

$$\xi_2 t = h_1 h_7 \Theta_t + h_3 h_7 \Theta_{t x_1} + h_5 h_7 \Theta_{t y_1},$$

$$\xi_3 t = h_2 h_7 \Theta_t + (h_1 h_3 + h_4 h_7)\,\Theta_{t x_1} + (h_1 h_5 + h_6 h_7)\,\Theta_{t y_1} + \frac{1}{2}(h_3^2 \Theta_{t x_1 x_1} + 2 h_3 h_5 \Theta_{t x_1 y_1} + h_5^2 \Theta_{t y_1 y_1}).$$

Г. И. Дринфельд

8217. Доказательство теоремы о том, что любой бирациональный класс неособых поверхностей удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей. Зариский (Proof that any birational class of non-singular surfaces satisfies the descending chain condition. Zariski Oscar), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1959, A-Math., 32, № 1, 21—31 (англ.)

Рассматривается класс неособых проективных моделей поля алгебраических функций от одной переменной над алгебраически замкнутым основным полем. В классе вводится частичное соотношение порядка $F < F'$, если бирациональное соответствие $T: F' \to F$ регулярно в каждой точке поверхности F'. Целью работы является доказательство теоремы: Любая строго убывающая цепь $F > F_1 > F_2 > \cdots$ бирационально эквивалентных неособых поверхностей конечна. Доказательство приводится с помощью элементарных алгебро-геометрических построений.

Кривая (быть может, приводимая) E на поверхности F называется исключительной, если существует бирациональное соответствие $T: F \to F'$, для которого E является полным прообразом простой точки на F'. E называется исключительной кривой первого рода, если существует описанное соответствие T, которое регулярно в каждой точке кривой E. С каждой исключительной кривой первого рода E сопоставляется некоторый дивизор (цикл) $\widetilde{E}$, носителем которого является E. Доказывается, что если $F < F'$ и соответствие $T: F' \to F$ является произведением n квадратичных преобразований, то размерность антиканонической системы $|-K'|$ на поверхности F' удовлетворяет неравенству: $\dim|-K'| \geqslant n + (K^2) + P_a$, где (K^2)—индекс самопересечения канонического дивизора на поверхности F, а P_a—общий арифметический род поверхностей F и F'. Отсюда следует, что строго убывающая цепь исключительных дивизоров первого рода на неособой поверхности обрывается; из этого утверждения выводится основная теорема. В работе широко используются определения и результаты книги автора «Introduction to the problem of minimal models in the theory of algebraic surfaces» (Publication Math. Soc. Japan, № 4). Ю. И. Манин

8218. Неприводимость регулярных рядов на алгебраическом многообразии. Маттук (The irreducibility of the regular series on an algebraic variety. Mattuck Arthur), Illinois J. Math., 1959, 3, №1, 145—149 (англ.)

Пусть V — проективное алгебраическое многообразие над алгебраически замкнутым полем k, $\dim V = r > 1$, g — жанр производящей кривой на нормальной модели для V, $V(n)$ — симметризованное произведение n экземпляров многообразия V, A — многообразие Албанезе для V, $q = dim A$. Каноническое отображение $f: V \to A$ (считаемое однозначным) продолжимо до отображения положительных нуль-циклов на V в A, т. е. до отображения $F: V(n) \to A$. Последнее автор называет разбиением (foliation), а обратные образы $F^{-1}(a)$ элементов $a \subset A$ — его листами (leaves) (регулярные ряды, по терминологии Албанезе). Доказывается, что: 1) при $n \geqslant q$ произ-

водящий лист разбиения $F: V(n) \to A$ абсолютно неприводим; 2) если n_0—наименьшее значение n, для которого справедливо свойство 1), то при $n \geqslant n_0 + q$ каждый лист абсолютно неприводим в размерности $nr - q$.

В. В. Морозов

8219. Об одной характеризации якобиевых многообразий. Мацусака (On a characterization of a Jacobian variety. Matsusaka Teruhisa), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1959, A-Math., 32, № 1, 1—19 (англ.)

Пусть $\varphi: \Gamma \to J$ — каноническое отображение полной неособой кривой рода $g > 0$ в ее якобиево многообразие, Θ — канонический дивизор на J; $u_1, \ldots, u_g$ — независимые общие точки J. Известно, что $\Theta_{u_1} \ldots \Theta_{u_{g-1}} = (g-1)! \varphi\Gamma$ и $d(\Theta_{u_1} \ldots \Theta_{u_g}) = g!$. Автор приводит два доказательства этих утверждений.

Основным результатом работы является обратная теорема: Если на n-мерном абелевом многообразии A существует такое неприводимое многообразие X коразмерности единица, что $d(X_{u_1} \ldots X_{u_n}) = n!$ и $X_{u_1} \ldots X_{u_{n-1}} = (n-1)! C$, где C — положительный одномерный цикл, то C представляет собой неприводимую неособую кривую, канонически вложенную в свое якобиево многообразие A, а X — канонический дивизор на этом многообразии.

Для доказательства определяется билинейное отображение α прямого произведения групп циклов дополнительной размерности на абелевом многообразии A в кольцо эндоморфизмов этого многообразия, определенное формулой $\alpha(X, Y)(u) = S(X \cdot (Y_u - Y))$. Для случая размерностей соответственно 1 и $n-1$ вычисляется след эндоморфизма α и дается критерий численной эквивалентности в терминах эндоморфизма α. Основная теорема получается использованием свойств эндоморфизма $\alpha(C, X)$.

Ю. И. Манин

8220. n-мерный аналог теоремы Кремоны — Клебша. Гуггенхеймер (An n-dimensional analogue of the Cremona — Clebsch theorem. Guggenheimer H.), Bull. Amer. Math. Soc., 1959, 65, № 3, 113—116

Классическая теорема Кремоны—Клебша устанавливает, что группы гомологий исключительных множеств бирационального соответствия между двумя комплексными проективными плоскостями изоморфны. Доказывается следующая теорема:

Пусть P и P' — n-мерные комплексные проективные пространства; M и M' — исключительные множества некоторого бирационального соответствия между P и P'. Обозначим через $\tau_{(r)}(M)$ наибольший общий делитель степеней r-мерных компонент пересечения M с общей $(r+1)$-мерной плоскостью в объемлющем пространстве P. Тогда: 1) числа Бетти множеств M и M' во всех размерностях совпадают; 2) коэффициенты кручения множеств M и M' во всех (топологических) четных размерностях совпадают; 3) системы коэффициентов кручения множеств M и M' в (топологических) нечетных размерностях $2r-1$ совпадают, если $\tau_{(r)}(M) = \tau_{(r)}(M')$, и отличаются друг от друга одним элементом, если $\tau_{(r)}(M) \neq \tau_{(r)}(M')$; в этом случае $\tau_{(r)}(M')$ входит в число коэффициентов кручения множества M', а $\tau_{(r)}(M')$ — множества M.

Доказательство теоремы получается с помощью простых соображений из точных гомологических последовательностей пар (P, M) и (P', M'). Используется единственный факт из топологии алгебраических многообразий: фундаментальный цикл d-мерного многообразия V_d степени μ в проективном пространстве P гомологичен μ-кратному фундаментальному циклу $2d$-мерной плоскости в P.

Ю. М. Манин

8221 К. Абелевы функции и алгебраическая геометрия. Конфорто, Грёбнер, Андреотти, Розати (Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie. Conforto Fabio. Bearb. und Hrsg. Gröbner W., Andreotti A., Rosati M. Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer, 1956, XI, 276 S., 41.80 DM) (нем.)

Эта книга составлена по записям лекций (1940—1951) Конфорто (F. Conforto). Содержащийся в ней материал относится к классической, существенно аналитической теории абелевых функций произвольного жанра. Применяемые методы — это методы французских и немецких мастеров, дополненные и углубленные результатами теории функций нескольких комплексных переменных, которые можно найти в книге Бенке—Туллена. Во введении авторы прямо заявляют, что их задача — изложение этой аналитической теории, «не слишком затуманенной новейшими абстракциями». Эта программа ими и выполнена в действительности, и читатель доводится до той ступени развития теории абелевых функций, где начинаются работы таких авторов, как Альберт, Скорца и Г. Вейль по римановым матрицам, Шеваллей по группам Ли и А. Вейль по абелевым многообразиям. В основном охвачены три следующих раздела: 1) определяющие свойства матрицы Римана, как матрицы периодов мероморфной функции конечного числа переменных, и достаточность их, как условий для существования абелевой функции (с помощью представления промежуточных функций, как линейных комбинаций тета-рядов); 2) существование не имеющей особенностей проективной модели поля всех абелевых функций, принадлежащих заданной матрице Римана (доказательство Зигеля), с рассмотрением многообразий Пикара, алгебраических соответствий на них и некоторыми весьма краткими замечаниями о приводимых матрицах Римана (расслоения и т. д. не упоминаются), рассмотрение неособенной модели, как многообразия-группы и, наконец, интерпретация и следствия теоремы Аппеля—Гумберта о промежуточных функциях в терминах теории идеалов, что приводит к алгебраическим системам многообразий наивысшей размерности на многообразиях Пикара; рассмотрение многообразий Виртингера и Куммера, как примеров абелевых многообразий второго ранга, и 3) рассмотрение алгебраических соответствий между многообразиями Пикара и ассоциированных соотношений Гурвица для соответствующих матриц Римана; акцентируется формальная аналогия с идеями Гурвица, относящимися к алгебраическим кривым и поэтому требуются некоторые серьезные результаты из теории функций нескольких переменных (см. сноску на стр. 223—224). Читателю, незнакомому с некоторыми основными инструментами современной алгебраической геометрии, можно посоветовать упростить его труд приготовлением сводки различных значений термина «общий», употребляемых авторами и необходимой техники, к нему относящейся. Книга безусловно полезна, как изложение аналитической теории абелевых функций.

В. В. Морозов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

8222. О фундаментальных уравнениях теории поверхностей. Билинский (A note on the fundamental equations of the theory of surfaces. Bilinski Stanko), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1958, 13, № 2, 121—124 (англ.; рез. сербо-хорв.)

Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ — векторное уравнение поверхности в R_3, $\mathbf{N}$ — вектор нормали этой поверхности, E, F, G и L, M, N — коэффициенты ее первой и второй квадра-

тичных форм. Ранг матрицы

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{r}_u & \mathbf{N}_u & \mathbf{r}_{uu}-L\mathbf{N} & \mathbf{r}_{uv}-M\mathbf{N} & \mathbf{r}_{vv}-N\mathbf{N} & -\mathbf{N}_v & \mathbf{r}_v \\ E & L & \frac{1}{2}E_u & \frac{1}{2}E_v & F_v-\frac{1}{2}G_u & M & F \\ F & M & F_u-\frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u & \frac{1}{2}G_v & N & G, \end{Vmatrix}$$

в первой строке которой стоят семь компланарных векторов, а во второй и третьей — результаты скалярного умножения первой строки соответственно на векторы $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$, оказывается меньше трех. Отсюда автор получает формулы Гаусса и Вайнгартена, а также еще некоторые родственные им формулы в новом, удобном для запоминания виде. М. А. Акивис

8223. **Соответствие параллельности касательных плоскостей двух линейчатых поверхностей в S_4. Русчор** (La correspondance par plans tangents complètement parallèles entre deux surfaces réglées, dans S_4. Ruscior Stefania), Bul. Inst. politehn. Iaşi, 1957, **3**, № 3-4, 25—28 (франц.; рез. русск., рум.)

Автор рассматривает соответствия, устанавливаемые вполне параллельными плоскостями, между двумя линейчатыми поверхностями в S_4 с сохранением направлений образующих. Две плоскости в S_4 вполне параллельны, если они секут бесконечно удаленную гиперплоскость по одной и той же прямой. Находится необходимое и достаточное условие существования этого соответствия между двумя линейчатыми поверхностями S и S^*, состоящее в следующем: если точка M смещается по поверхности S вдоль образующей g, то соответствующая ей точка M^* смещается по образующей g^* поверхности S^*, причем образующие g и g^* параллельны. Показано, что между соответствующими точками двух соответствующих образующих g и g^* устанавливается гомотетия. Приводится уравнение, задающее центр гомотетии. Отмечается, что асимптотические плоскости и центральные плоскости для пары соответствующих образующих вполне параллельны.

I. Creangă

8224. **О сетях Петерсона в точечном соответствии между двумя неголономными многообразиями. Крянгэ** (Sur les réseaux de Peterson dans les correspondances ponctuelles entre les variétés non holonomes. Creangă Ioan), An ştiinţ. Univ. Iaşi. Sec. I., 1957, **3**, № 1-2, 165—170 (франц.; рез. русск., рум.)

К. М. Петерсон установил, что если между двумя поверхностями имеется взаимно однозначное точечное соответствие, не сохраняющее асимптотические линии, то (при определенных условиях регулярности) эти поверхности имеют общую (относительно указанного соответствия) сопряженную сеть. Эта сеть называется основанием данного соответствия (или сетью Петерсона). Автор распространяет понятие сети Петерсона на случай двумерных неголономных многообразий трехмерных евклидовых пространств (с точечным соответствием, не сохраняющим асимптотические) и получает две сети: 1) сеть Петерсона первого рода (одно из направлений этой сети есть направление характеристики касательной плоскости при смещении точки касания вдоль другого направления); 2) сеть Петерсона второго рода (направления сети соответствуют в данном соответствии и сопряжены в инволюциях относительно асимптотических направлений на каждом из данных многообразий). В. Т. Базылев

8225. **Изопериметрия на поверхности. Сакакура** (Isoperimetry on the surface. Sakakura Eiichi), Yokohama Math. J., 1957, **5**, № 2, 209—222 (англ.)

Известные изопериметрические неравенства Штейнера, Боннесена и Такасси на плоскости и Ф. Бернштейна на сфере обобщаются на случай геодезических кругов II рода на произвольных поверхностях и произвольных областей на евклидовой сфере и геодезических сферах II рода в римановых пространствах. Установление этих неравенств проводится методом Гурвица с помощью рядов Фурье. И. Я. Бакельман

8226. **О развертывающихся поверхностях. Добреску** (Asupra suprafeţelor desfăşurabile. Dobrescu A.), Gaz. mat. şi fiz., 1958, **A10**, № 6, 331—333 (рум.; рез. франц., русск.)

Автор доказывает векторным путем известную теорему дифференциальной геометрии: Если поверхности наложимы на плоскость, то они являются развертывающимися. Доказательство не опирается на теорему Гаусса об инвариантности полной кривизны поверхности при изгибании.

Примечание референта. Автор упустил из виду доказательство указанной теоремы в книге Фиников С. П. «Курс дифференциальной геометрии» М., ГИТТЛ, 1952, (см. пп. 129, 139, 149, 151 и 180)

П. С. Солтан

8227. **О винтовых трохоидах и циклических винтовых поверхностях. Хорнингер** (Über Trochoidenschraublinien und zyklische Schraubflächen. Horninger H.), Monatsh. Math., 1959, **63**, № 1, 39—58 (нем.)

Статья является окончанием предыдущих исследований (РЖМат, 1955, 5225; 1958, 8149 и др.). Показывается, что каждая винтовая трохоида может быть получена двумя различными способами при помощи ∞' геликоидальных движений, а каждая циклическая винтовая поверхность Ф может быть образована также двумя различными способами при помощи ∞' соосных трохоидально-винтовых движений. Изучены алгебраические трохоиды с одинаковыми направляющими кругами, трохоиды и винтовые линии, принадлежащие циклическим поверхностям, нормальные и главные сечения последних. Установлены их взаимная связь и соотношение между параметрами, определяющими их. Рассуждения иллюстрируются чертежами, являющимися проекциями фигур на одну и две плоскости. Н. В. Наумович

8228. **Применение радиуса сокращения в теории поверхностей. Диамантопулос Ф.**, Дельтион тис матиматикис этериас, Bull. Soc. math. Grèce, 1956, **30**, № 1-3, 64—76 (греч.; рез. франц.)

Радиус сокращения кривой определяется следующим образом. В рассматриваемой точке кривой откладываются в ту и другую сторону дуги S_+ и S_-, соответствующие одинаковым приращениям $\pm\Delta t$ параметра (масштаба), определяющего различные точки кривой. Эти две дуги откладываются на круге кривизны для рассматриваемой точки в обе стороны от нее; концы их соединяются прямой и ищется предельная точка пересечения этой прямой с касательной к кривой в рассматриваемой точке при $\Delta t \to 0$. Эта предельная точка называется центром сокращения, а отрезок касательной до первоначально взятой точки — радиусом сокращения; последний считается положительным, если центр сокращения лежит на положительной части касательной, и отрицательным в противном случае. Статья рассматривает применение этого понятия к теории поверхностей. Библ. 8 назв. И. Н. Веселовский

8229. **К теории проективно-минимальных поверхностей. Су Бу-цин** (Contributions to the theory of projective minimal surfaces. Su Buchin), Rev. math. pures et appl. (RPR), 1958, **3** № 2, 173—189 (англ.)

Дана краткая характеристика результатов Томсена, Боля, Майера, Годо и автора, относящихся к изучению проективно-минимальных поверхностей. Проективно-минимальная поверхность и ее преобразования Демулена находятся в асимптотическом соответствии (Томсен). Только проективно-минимальные и так называемые Q-поверхности обладают этим свойством (Боль). Соответствие между проективно-минимальной поверхностью

и одним из ее демуленовых преобразований инволютивно (Майер). В первой серии работ автор также получил некоторые характеристики проективно-минимальных поверхностей, используя присоединенную квадрику, тесно связанную с четырехсторонником Демулена. В последующей серии работ были рассмотрены соотношения между последовательностями Годо $\{U_m, V_n\}$, $\{\bar{U}_m, \bar{V}_n\}$ проективно-минимальной поверхности S и ее преобразования Демулена $\bar{S}$ в общих предположениях о существовании четырех различных демуленовых преобразований поверхности S (РЖМат, 1959, 10410, 10411). Прямые UU и $\bar{V}\bar{V}_1$, U_2U_1 и $\bar{U}\bar{V}$ пересекаются соответственно в точках J_1, J_2. Доказано, что J_1 (J_2) есть преобразование Лапласа для J_2 (J_1) в направлении u (v), причем $\bar{J} = \frac{\partial J_1}{\partial u}$ оказывается преобразованием Лапласа для J_1 в направлении u и в S_3 изображает луч конгруэнции W, переводящей S в одну фокальную полость $S_{(1)}$. J, J_1, J_2 принадлежат последовательности Лапласа (J). Аналогичные результаты получены для ($\bar{J}$), причем $\bar{J}$ составляют в S_3 другую конгруэнцию W, которая преобразует S в другую фокальную полость $S_{(2)}$. Эти конгруэнции названы присоединенными. Выведены формулы, связывающие (J) и ($\bar{J}$) соответственно с $\{U_m, V_n\}$ и $\{\bar{U}_m, \bar{V}_n\}$. Установлена новая аналитическая характеристика последовательности Лапласа (J) сопряженной сети (u, v) и ее связь с последовательностями (J), ($\bar{J}$) и $\{U_m, V_n\}$. Голюс P гиперплоскости $J_2J_1JJ_{-1}J_{-2}$ относительно гиперквадрики Q_4 в S_5 принадлежит рассмотренной Годо последовательности Лапласа $\{P_m, P_n\}$ в том же направлении, что и (J). Доказано, что $P \equiv V\bar{U}_1 \times U\bar{U}_2$; $P_{-n} \equiv V_n\bar{V}_{n-2} \times V_{n-1}\bar{V}_{n-3}$; $P_n \equiv U_{n-1}\bar{U}_{n+1} \times U_n\bar{U}_{n+2}$ ($n = 1, 2, \ldots$) (аналогично для $\bar{P}$). Всякая совокупность трех пар точек $(V_n\bar{U}_{n+1};\ U_{n-1}\bar{U}_{n+1},\ \bar{P}_n\bar{J}_n)$; $(V_n\bar{V}_{n-3};\ V_{n-1}\bar{V}_{n-2}P_{-n}\bar{J}_{-n})$; $(U_n\bar{U}_{n-3};\ U_{n-1}\bar{U}_{n-2};\ \bar{P}_n\bar{J}_n)$; $(V_n\bar{V}_{n+1};\ V_{n-1}\bar{V}_{n+2};\ \bar{P}_{-n}\bar{J}_{-n})$ образует полный четырехсторонник, в котором каждая пара точек является противоположными вершинами. Последовательность Лапласа (J) пары (S, $\bar{S}$) есть вторая преобразование Лапласа в направлении v для последовательности Лапласа ($\bar{J}'$) пары (S, $\bar{S}_{(1)}$), и последовательность Лапласа ($\bar{J}$) пары (S, $\bar{S}$) есть второе преобразование Лапласа в направлении u для ($\bar{J}''$) пары (S, $S_{(2)}$). Пусть J и $\bar{J}$ суть образы в S_5 конгруэнций W, соответствующих паре (S, $\bar{S}$), тогда вторые преобразования Лапласа J_2 и $\bar{J}_{-2}$ являются образами сторон четырехсторонника Демулена поверхности S. Квадрика Ли поверхности S и третья квадрика Годо поверхности $\bar{S}$ в соответствующих точках имеют общий четырехсторонник.

В. С. Малаховский

8230. Об одной задаче теории сетей и о некоторых классах поверхностей проективного пространства. Тевзадзе Г. П., Сакартвелос ССР Мецниереба Академиис моамбе, 1959, 22, № 1, 9—15 (груз.); Сообщ. АН ГрузССР, 1959, 22 № 1, 9—15 (русск.)

Дается новый вариант решения задачи отыскания поверхностей, имеющих ∞^1 сопряженных сетей с общим чебышевским вектором, решенной ранее референтом, а затем Р. Н. Щербаковым. Инвариантный признак такой поверхности записывается далее автором в специальной асимптотической системе координат. Для частного случая поверхности с ∞^1 сетей Пересса в этой системе координат автор нашел выражения ее проективных инвариантов α и β, по которым можно найти все такие поверхности.

Для поверхностей с ∞^1 сетей Фосса получены уравнения, из которых исходил С. П. Фиников при доказательстве своей теоремы о том, что такой поверхностью может быть только геликоид.

В. И. Шуликовский

8231. Проективное изгибание тройных сетей и точечные преобразования 2-го рода. Ваона (Deformazione proiettiva dei tritessuti e delle trasformazioni puntuali di 2 specie. Vaona Guido), Boll. Unione mat. ital., 1958, **13** № 3, 295—300 (итал.; рез. англ.)

Тройной сетью называется совокупность трех однопараметрических семейств плоских кривых, обладающая тем свойством, что через каждую точку некоторой области проходит одна и только одна кривая каждого семейства. Сеть называется сетью 2-го рода, если два ее семейства совпадают между собой. Точечное преобразование T, которое переводит сеть 2-го рода Δ в такую же сеть Δ', называется проективным изгибанием или наложением, если T есть преобразование 2-го рода, в котором Δ и Δ' суть характеристические сети. В общем случае сеть 2-го рода не является проективно изгибаемой, совокупность же проективно изгибаемых сетей 2-го рода зависит от одной произвольной функции двух аргументов. Существуют сети, которые допускают бесконечное множество проективных изгибаний, зависящее от одной произвольной функции одного аргумента. У таких сетей двойное семейство необходимо состоит из прямых линий. Однако не всякая сеть, двойные линии которой прямые, проективно изгибаема.

Сети 2-го рода, допускающие проективное изгибание с произволом в одну функцию одного аргумента, делятся на 2 типа: 1) касательные к кривым простого семейства вдоль каждой прямой двойного семейства образуют пучок; 2) кривые простого семейства есть проекции на плоскость из некоторой точки асимптотических кривых линейчатой поверхности с плоской флекнодальной линией. Каждая сеть первого типа допускает с произволом в одну функцию одного аргумента проективные изгибания, которые переводят ее в сеть первого типа, и одно особое изгибание, переводящую ее в сеть второго типа. Каждая сеть второго типа изгибается с указанным произволом только в сеть первого типа. Всякие иные сети 2-го рода, двойные линии которых суть прямые, могут допускать проективные изгибания только одним способом. В каждом случае указывается широта класса соответствующих сетей. Не существует сетей 2-го рода, которые допускали бы ∞^h проективных изгибаний при $h>1$. Существуют сети 2-го рода, допускающие ∞^1 проективных изгибания. У таких сетей двойные линии являются необходимо кривыми. Приводится аналитическая характеристика этих сетей и указывается широта их класса (пять функций одного аргумента).

Пусть T, $\bar{T}$ — соответственно точечные преобразования между парами плоскостей π, π' и $\bar{\pi}$, $\bar{\pi}'$. Пусть γ — совокупность двух точечных преобразований U, U', из которых первое переводит π в $\bar{\pi}$, а второе π' в $\bar{\pi}'$. Преобразование γ называется проективным изгибанием преобразований T и $\bar{T}$ друг в друга, если характеристические кривые T и $\bar{T}$ являются также характеристическими и для U и U'. Преобразование γ называется сильно проективным изгибанием, если U и U' есть преобразования 2-го рода, а двойные (простые) характеристические кривые преобразований T и $\bar{T}$ есть также двойные (простые) кривые преобразований U и U'.

В общем случае точечное преобразование T 2-го рода не является проективно изгибаемым в сильном смысле. Однако существуют целые классы в сильном смысле проективно изгибаемых преобразований. Если некоторое преобразование T допускает бесконечную совокупность сильно проективных изгибаний, то последняя зависит или от двух функций одного аргумента, или от двух постоянных. В первом случае характеристические сети преобразования суть сети первого или второго типа, указанные выше. Во втором случае сети характеристических кривых преобразования T допускают ∞^1 проективных изгибаний. В заключение указываются примеры преобразований, допускающих изгибания не в сильном смысле. Н. И. Кованцов

8232. **Исследования А. Пантази и проективные линейные неголономные многообразия. Михэйлеску** (Cercetările lui Al. Pantazi şi varietăţile neolonome liniare proiective. Mihăilescu T.) Lucrările consfăt. geom. diferenţ. 1955. Timişoara Acad. RPR., 1956, 63—68 (рум.)

После краткого исторического обзора известных результатов в этой области, полученных с метрической, аффинной и проективной точек зрения, автор указывает, что понятие проективитета, введенное Бомпиани для V_n^{n-1}, было введено ранее Пантази, для случая семейства поверхностей в S_3, под названием основного поляритета. Далее отмечается вклад, внесенный Пантази в тонкую задачу проективного изгибания неголономных поверхностей трехмерного пространства. Gh. Gheorghiu

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

8233. **О линейных дифференциальных уравнениях в частных производных 1-го порядка. Клемола** (Über lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Klemola Tapio. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1958, Sar. **A1**, № 260, 26 S.) (нем.)

Рассматривается вопрос существования решений системы дифференциальных уравнений вида $\frac{\partial \tau_\gamma^i}{\partial \xi^j} = \sum_{k=1} a_{kj}^i(\xi^1, \ldots, \xi^m)\,\tau_\gamma^k$, $i = 1,2,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots,m$, при условии непрерывности коэффициентов. Кратко эта система записывается в форме $y'(x)\,dx = A(x)\,dx\,y(x)$, где x и y принадлежат соответственно m- и n-мерному пространствам R_x и R_y; $A(x)$ — непрерывно зависящий от x элемент пространства $L(R_x, R_y; R_y)$ билинейных отображений $R_x \times R_y$ в R_y. Предполагается, что $m > 1$, условий полной интегрируемости на систему не накладывается; перечисленные условия предполагаются выполненными в некоторой выпуклой области $V \subset R_x$. Для произвольной точки $x \in V$ определяется пространство $L^p(x) \subset R_y$ p измерений, $p \leqslant n$, натянутое на такие векторы y_0, для которых система имеет решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. Ясно, что $p = n$ отвечает случаю полной интегрируемости системы. Следуя методам, развитым Р. и Ф. Неванлинна, автор вводит далее некоторый оператор. Именно, пусть $x_0x_1x_2$ — некоторый треугольник, γ — его граница; вдоль границы система сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению для вектора $y(x)$, и интегрируя по контуру γ получим $\int_\gamma A(t)\,dt\,y(t) = (T_\gamma - I)\,y_0$, где I обозначает тождественный оператор. Для решения уравнения будет $(T_\gamma - I)\,y_0 = 0$. Более слабым требованием служит условие, что $\lim \frac{T_\gamma - I}{\Delta} y_0 = 0$, где Δ — площадь треугольника, а предел берется при условии, что треугольник стягивается в произвольной неподвижной плоскости к точке x_0 регулярно, т. е. так, что отношение квадрата его периметра к площади остается ограниченным. Векторы, удовлетворяющие этому условию в точке x, образуют линейное пространство $K_y(x)$; очевидно, что $L^p(x) \subset K_y(x) \subset R_y$.

Вопрос о существовании решений системы сводится автором к вопросу о существовании более широких классов функций. С этой целью вводятся следующие обозначения. Через $\{y, V\}$ обозначается класс решений системы; через $\{\sigma, V\}$ — кольцо всех непрерывно дифференцируемых в V функций $\sigma(x)$; далее вводятся классы функций со значениями в R_y, определяемые четырьмя следующими свойствами: 1) класс $\{u, V\}$, элементы которого суть непрерывно дифференцируемые в V R_y-функции, является модулем по отношению к кольцу $\{\sigma, V\}$; 2) Размерность q линейного пространства $U^q(x, V) \subset R_y$ порождаемого функциями класса $\{u, V\}$ в точке $x \in V$ не зависит от точки x; 3) для каждого $x \in V$ имеет место условие $U^q(x, V) \subset K_y(x)$, где $K_y(x)$ определено выше; 4) для линейного отображения ψ, определяемого равенством (h — вектор в R_x) $(\psi u)(x)\,h = u'(x)\,h - A(x)\,hu(x)$ справедливо условие $(\psi u)(x)\,h \in U^q(x, V)$, т. е. ψu принадлежит классу непрерывно зависящих от x линейных отображений $\{u, V\}$ R_x в $U^q(x, V)$. Введение именно этих условий подсказано свойствами класса $\{u, V\}$ в случае, когда он образован функциями вида $u(x) = \sum_{i=1}^q \sigma_i(x) y_i(x)$, где $y_i(x)$ — решения системы, а $\sigma_i(x) \in \{\sigma, V\}$.

Доказывается теорема: Если существует класс функций $\{u, V\}$, удовлетворяющий условиям 1—4, то существует q линейно независимых решений системы, которые в каждой точке $x \in V$ порождают то же линейное пространство $U^q(x, V)$, что и функции этого класса $\{u, V\}$.

Приводится процесс построения таких классов функций в окрестности заданной точки; сначала строится более широкий класс, удовлетворяющий только условиям 1—3, а затем с помощью конечного числа шагов он сужается до класса $\{u, V_0\}$, где V_0 — некоторая окрестность точки x_0, определяющего размерность пространства решений.

В последней части работы рассматриваются системы вида $y'(x)dx = A(x)dxy(x)$, эквивалентные в том смысле, что в окрестности некоторой точки x_0 совокупности их решений совпадают (в случае полной интегрируемости это означает совпадение самих систем, но в общем случае определяются нетривиальные классы эквивалентности). В. В. Рыжков

8234. **Конформное преобразование пространства с параллельным тензором Риччи. Нагано** (The conformal transformation on a space with parallel Ricci tensor. Nagano Tadashi), J. Math. Soc. Japan, 1959, **11**, № 1, 10—14 (англ.)

Пусть g и g' — две полные римановы метрики на многообразии M ($2 < \dim M = n$) такие, что тензоры Риччи каждой из них параллельны. Доказывается, что если g и g' конформны, то они или гомотетичны или (некоторая связная компонента) M с метрикой g (также и g') изометрична сфере. Библ. 13 назв. Н. С. Синюков

8235. **Дуально-конформное соответствие линейчатых комплексов в n-мерном евклидовом пространстве. Авдеева В. А.**, Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 2, 3—11

Автор называет комплексом n-мерного евклидова пространства множество прямых, зависящих от n параметров. Соответствие прямых двух комплексов называется дуально-конформным, если сферические отображения этих комплексов конформны и каждую пару

соответственных лучей можно совместить так, что при этом совместятся и горловые точки соответственных поверхностей. Устанавливается произвол, с которым можно определить пары дуально-конформных комплексов. А. П. Норден

8236. Биаксиальное пространство параболического типа. Талантова Н. В., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 3, 214—228.

Развернутое изложение результатов, прореферированных в РЖМат, 1959, 6268. А. П. Норден

8237. О четырехпараметрическом многообразии прямых в четырехмерном проективном пространстве. Дрейманас А. И., Vilniaus univ. Mokslo darbai, Уч. зап. Вильнюсск. ун-та, 1958, 25, 57—73 (рез. нем.)

Инвариантным методом Г. Ф. Лаптева рассматривается дифференциальная окрестность второго порядка луча $l=(A_1A_2)$ четырехпараметрического многообразия прямых четырехмерного точечного проективного пространства. При помощи величин, определяющих окрестность первого порядка, каждой точке луча l можно присоединить плоскость, которую автор использует для введения группы реперов $\{A_I\}$ первого порядка. В этом репере рассматриваемое четырехпараметрическое многообразие прямых определяется двумя линейными дифференциальными уравнениями

$$\omega_1^4 = -\omega_2^5,\ \omega_2^3 = -\omega_1^5,$$

где $dA_I = \omega_I^k A_k$, $i, k = 1, 2, \ldots, 5$. Фундаментальный объект второго порядка состоит из трех линейных подобъектов $\lambda_{i_1\ldots i_7}$, $\lambda_{i_1\ldots i_5}$ и $\lambda_\alpha^{i_1}$, где $i_1, \ldots, i_7 = 1, 2$; $\alpha = 3, 4, 5$. Первые два из них являются однородными и определяют соответственно семь и пять точек $t^{i_1}A_{i_1}$ на луче l, где $\lambda_{i_1\ldots i_7}t^{i_1}\ldots t^{i_7} = 0$ или $\lambda_{i_1\ldots i_5}t^{i_1}\ldots t^{i_5} = 0$. Третий неоднородный подобъект определяет плоскость $x^{i_1} - \lambda_\alpha^{i_1}x^\alpha = 0$, непересекающуюся с лучом l, где x^I — координаты точки относительно репера $\{A_I\}$. Если $\lambda_{i_1\ldots i_7} = \lambda_{i_1\ldots i_5} = 0$, то четырехмерное многообразие прямых является линейным.

Луч l четырехпараметрического многообразия прямых имеет шестимерное семейство линейных касательных многообразий прямых, но не существует линейного четырехпараметрического многообразия прямых, имеющего касание второго порядка с данным многообразием. Дифференциальная окрестность второго порядка выделяет из всех касательных линейных многообразий одно инвариантное линейное многообразие

$$p^{13} + p^{52} = \lambda_4^1 p^{43} + (\lambda_5^1 + \lambda_3^2)\,p^{53} + \lambda_4^2 p^{54},$$

$$p^{24} + p^{51} = \lambda_3^2 p^{34} + \lambda_3^1 p^{53} + (\lambda_5^2 + \lambda_4^1)\,p^{54}.$$

Плоскость $x^{i_1} - \lambda_\alpha^{i_1}x^\alpha = 0$ для этого линейного многообразия является особой, ибо каждая прямая, лежащая в ней, принадлежит этому многообразию. Прямые рассматриваемого многообразия, лежащие в гиперплоскости, образуют конгруэнцию. При помощи конгруэнций многообразия и их преобразований Лапласа выясняется геометрический смысл семи точек, пяти точек и плоскости $x^{i_1} - \lambda_\alpha^{i_1}x^\alpha = 0$, например асимптотические направления на фокальной поверхности (B_2 выделенной конгруэнции совпадают с прямой, полученной преобразованием Лапласа, тогда и только тогда, когда фокус B_1 является одним из семи точек.

К. И. Гринцевичюс

8238. О полярно-нормализованном пространстве. Кириллов Г. И., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 6, 127—138

Развернутое изложение результатов, прореферированных в РЖМат, 1958, 10259. А. П. Норден

8239. О структурных уравнениях риманова пространства. Бай Чжэн-го (On the equations of structure of a Reimannian space. Pai Chen-kuo). Кэсюэ цзилу, Sci. Rec., 1957, 1, № 4, 199—205 (англ.)

Автор использует уравнения структуры n-мерного риманова пространства V_n для вывода некоторых формул сети, образованной двумя семействами кривых на двумерной поверхности S, погруженной в трехмерное подпространство V_3, и доказывает большое число теорем, относящихся к свойствам этой поверхности. Как пример приведем следующее утверждение: характеристическое свойство поверхности постоянной кривизны, погруженной в пространство V_3 постоянной кривизны, состоит в том, чтобы два семейства асимптотических линий образовали сеть Чебышева. Su Buchin

8240. О некоторых свойствах конгруэнций кривых в римановом пространстве, допускающем просто транзитивную группу. Нагаи (On some properties of congruences of curves in Riemannian spaces admitting simply transitive groups. Nagai Tamao). Tensor, 1959, 9, № 2, 104—112 (англ.)

Рассматривается, как и в другой работе автора (РЖМат, 1959, 4258), просто транзитивная группа G_n с операторами $X_af = \xi_{(a)}^i\partial_i f$ $(a = 1, 2, \ldots, n)$ и пространство V_n с основным тензором $g^{ij} = \sum_{a=1}^n \xi_{(a)}^i \xi_{(a)}^j$. Устанавливаются новые связи конгруэнций кривых $\xi_{(a)}$ со структурой группы G_n. Вместо вариаций γ_{ab} (РЖМат, 1955, 2855) автор вводит вектор кривизны $\mu_{(vv)}^a = v_{.b}^a v^b$ конгруэнции v^a ($v^a = \xi_i^{(a)}v^i$, v^i — тангенциальный вектор семейства) и вектор ассоциированной кривизны $\mu_{(wv)}^a = w_{.b}^a v^b$ семейства w^a относительно семейства v^a. Если $\mu_{(vv)}^a = 0$, то семейство v^a геодезическое, а если $\mu_{(wv)}^a = 0$, то векторное поле w^i параллельно вдоль линий семейства v^a. Для семейств $\xi_{(a)}$ введенные векторы выражаются через структурные постоянные:

$$\mu_{(aa)}^c = C_{(ac)}^a,\ \mu_{(ab)}^c = \frac{1}{2}(C_{ba}^c + C_{cb}^a + C_{ca}^b).$$

Отсюда следует ряд теорем. Например

Теорема 1. Если каждые две кривые ξ_p и ξ_q из семейства кривых $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ $(m \leqslant n)$ параллельны относительно друг друга, то операторы $X_1f, X_2f, \ldots, X_mf$ порождают абелеву подгруппу порядка m. Смещение из точки P по кривой семейства ξ_a на расстояние Δs_a в точку $P_{(a)}$, а затем из точки $P_{(a)}$ по кривой семейства ξ_b на расстояние Δs_b определяет точку P_{ab}. Аналогично определяется точка $P_{(ba)}$. Предел отношения $\overline{P_{(ab)}P_{(ba)}}/\Delta s_a \Delta s_b$ при $\Delta s_a,\ \Delta s_b \to 0$ автор называет вектором меры расстояния (the distantial spread vector). Координаты этого вектора

$$\nu_{(ab)}^c = \mu_{(ab)}^c - \mu_{(ba)}^c = C_{ba}^c.$$

Доказываются

Теорема 6. Для того чтобы группа G_n была прямым произведением подгрупп G_m и G_{n-m} с символами $X_1f, \ldots, X_mf$ и $X_{n-m}f, \ldots, X_nf$, необходимо и достаточно, чтобы вектор меры расстояний любой пары кривых ξ_p $(p = 1, 2, \ldots, m)$ и ξ_q $(q = n-m, \ldots, n)$ обращался в нуль.

Теорема 9. Подгруппа G_{n-1} будет инвариантной тогда и только тогда, когда семейства ее инвариантных многообразий будут геодезически параллельны.

В последнем § 5 каждой просто транзитивной группе относится линейная связность. В. И. Шуликовский

8241. Линейчатые поверхности в римановых пространствах. Фогель (Regelflächen in Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Vogel Walter O.), Math. Z., 1958, 70, № 2, 193—212 (нем.)

Автор рассматривает в римановом пространстве V_n^0 однопараметрическое семейство геодезических линий, так называемых образующих, и ими образованную поверхность V_2. Наряду с регулярной координатной системой на V_2, рассматривается система координат с координатами u и v такая, что линии $v=\text{const}$ являются семейством образующих, а параметр u является длиной дуги этих линий.

По аналогии с классическим случаем линейчатой поверхности в R_3 на образующей $v=\text{const}$ ищется точка сжатия, в которой дифференциал длины дуги до ближайшей точки на образующей $v+dv=\text{const}$ будет наименьшим. Автором выделены шесть типов точек сжатия в зависимости от выполнения в них следующих условий на касательные вектора i^α и j^α к линиям u и v, ковариантные производные $\delta_v i^\alpha$ и $'\delta_v i^\alpha$ по направлению v относительно метрик пространств V_n^0 и V_2, а также скалярную кривизну K поверхности V_2:

$$\text{I. } j^\alpha=0,\quad i^\alpha\neq\lambda j^\alpha,\quad \delta_v i^\alpha\neq 0,$$

$$\text{II. } j^\alpha\neq 0,\quad i^\alpha=\lambda j^\alpha,\quad \delta_v i^\alpha\neq 0,$$

$$\text{III. } j^\alpha\neq 0,\quad i^\alpha\neq\lambda j^\alpha,\quad {}'\delta_v i^\alpha=0,\quad K<0$$

$$\text{IV. } j^\alpha=0,\quad i^\alpha\neq\lambda j^\alpha,\quad \delta_v i^\alpha=0,$$

$$\text{V. } j^\alpha\neq 0,\quad i^\alpha=\lambda j^\alpha,\quad \delta_v i^\alpha=0,$$

$$\text{VI. } j^\alpha\neq 0,\quad i^\alpha\neq\lambda j^\alpha,\quad {}'\delta_v i^\alpha=0,\quad K=0$$

$$(\alpha=1,\ldots,n)$$

В реферируемой работе автор изучает линейчатые поверхности V_2 в V_n^0 с линиями сжатия, состоящими из точек сжатия I, II и III типов, доказывает ряд теорем, обобщающих свойства линейчатых поверхностей в R_3, например:

Теорема 1. Вдоль линии сжатия III типа равна нулю геодезическая кривизна для семейства кривых, принадлежащих V_2 и изогональных (с любым постоянным углом $W\neq 0$) к семейству образующих.

Теорема 2. Вдоль линии сжатия III типа касательные семейства образующих V_2 параллельны в смысле Леви-Чивита.

Автор изучает также поведение линии сжатия в окрестности точки сжатия IV, V и VI типов и деривационные формулы Френе сопровождающего ортонормального репера для рассматриваемых геодезических линий и для линии сжатия. Э. Б. Ершов

8242. Вопросы разделения переменных в уравнении $\Delta_2 v=0$ в пространствах постоянной кривизны. Шум А. И. Матем. сб., 1959, 47, № 4, 495—512

В пространстве, определяемом линейным элементом

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)d\rho_i d\rho_j, \qquad (1)$$

рассматривается уравнение

$$\Delta_2 v=0, \qquad (2)$$

где Δ_2 — второй дифференциальный параметр Бельтрами, соответствующий линейному элементу (1).

Условимся говорить, что уравнение (2) допускает P-разделение переменных (P-р. п.), если оно имеет решения $v(\rho_1,\rho_2,\rho_3)$ в форме $P(\rho_1,\rho_2,\rho_3)f_1(\rho_1)f_2(\rho_2)f_3(\rho_3)$, где P — вполне определенная функция, а каждая из функций f_i'/f_i $(i=1,2,3)$ содержит по крайней мере два независимых параметра; при $P=1$ имеем так называемое полное разделение переменных (п. р. п.). Аналогично будем говорить, что уравнение (2) допускает неполное разделение переменных (н. р. п.), если оно имеет решения в форме $f(\rho_1)S(\rho_2,\rho_3)$, где каждая из функций $\frac{d\ln f}{d\rho_1}$, $\frac{\partial\ln S}{\partial\rho_2}$, $\frac{\partial\ln S}{\partial\rho_3}$ содержит по крайней мере два независимых параметра ($S(\rho_2,\rho_3)\neq\varphi(\rho_2)\psi(\rho_3)$).

Работа посвящена разысканию в пространствах S_3 постоянной кривизны $k\neq 0$: а) всех систем координат, каждая из которых обладает тем свойством, что отнесенное к ней уравнение (2) допускает P-р. п. и б) всех систем координат, в которых уравнение (2) допускает н. р. п.

Задача а) в евклидовом пространстве E_3 $(k=0)$ была решена Дарбу (Darboux G., Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonées curviligne, Paris, 1910, 212—293); случай п.р.п. рассматривался также В. В. Степановым (в E_3) и Эйзенхартом (в E_n). Задача б) в E_3 была решена А. А. Фридманом (Сообщ. Харьковск. Матем. о-ва, 1911, 12, № 6, 244—268).

В первой главе работы установлено, что в пространствах постоянной кривизны $k\neq 0$ нет систем координат, в которых уравнение (2) допускает P-р.п., кроме тех систем, в которых имеет место п. р. п. Что касается систем координат в S_3, в которых имеет место п. р. п., то все они были найдены в работе референта (Матем. сб., 1950, 27, 380—426). Полученный автором результат существенно отличается от соответствующего результата в E_3, где, например, инверсия системы координат, в которой уравнение (2) допускает п. р. п., приводит к системе координат, в которой уравнение (2) допускает P-р.п.

Во второй главе автор, следуя методу Фридмана, приходит к следующему результату: Для того чтобы уравнение (2) в S_3 допускало н. р. п., необходимо и достаточно, чтобы: 1) поверхности $\rho_1=\text{const}$ были пучком плоскостей с общей осью $(k\geqslant 0)$, или семейством параллельных плоскостей $(k<0)$, или семейством плоскостей с общим перпендикуляром $(k<0)$, или семейством концентрических сфер $(k\geqslant 0)$, или семейством эквидистантных поверхностей с общей базисной плоскостью $(k<0)$, или семейством соосных предельных поверхностей $(k<0)$ и чтобы 2) поверхности $\rho_1=\text{const}$ были ортогональными к поверхностям $\rho_2=\text{const}$ и $\rho_3=\text{const}$.

М. Н. Олевский

8243. О некоторых полугруппах преобразований, инвариантных относительно евклидовых и неевклидовых движений. Лёвнер (On some transformation semigroups invariant under Euclidean or non-Euclidean isometries. Loewner Charles), J. Math. and Mech., 1959, 8, № 3, 393—409 (англ.)

Исследуются полугруппы преобразований евклидова или неевклидова m-мерного пространства V_m, инвариантные относительно группы его движений $\mathfrak{G}$. Для каждой такой полугруппы разыскивается определяющая ее система инфинитезимальных преобразований $\mathfrak{x}$ в предположении, что она удовлетворяет следующим условиям: а) $\mathfrak{x}$ есть замкнутый выпуклый конус инфинитезимальных преобразований, содержащий преобразования $\xi\neq 0$; б) система $\mathfrak{x}$ инвариантна по отношению к группе $\mathfrak{G}$; в) размерность $\mathfrak{x}$ конечна; г) система $\mathfrak{x}$ минимальная.

Если пространство V_m евклидово, то при $m>1$ единственным нетривиальным решением задачи является группа параллельных перенесений; при $m=1$ имеем континуум решений четырех типов. Для сферического V_m рассмотрены только случаи, когда $m=1$ и $m=2$. При $m=1$ имеем счетное множество систем $\mathfrak{x}_n$ $(n=0,1,2,\ldots)$, состоящих соответственно из преобразований $\xi=a\cos n\Theta+b\sin n\Theta$, где a, b — произвольные действительные числа, Θ — полярный угол точки на окружности V_1. При $m=2$ пространство V_2 реализует-

ся в виде сферы радиуса 1 в евклидовом пространстве E_3. Решениями являются системы $\mathfrak{x}_n$ и $\mathfrak{t}_n$ ($n = 1, 2, \ldots$): $\mathfrak{x}_n$ состоит из векторных полей $\xi = r^{n+2} \nabla \frac{\varphi_n}{r^n}$ на сфере V_2, где $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки, а φ_n — сферические гармонические функции n-й степени; каждое из решений $\mathfrak{t}_n$ составлено из полей $\xi = \nabla \varphi_n \times \mathbf{r}$. Для эллиптического пространства V_2 решениями будут $\mathfrak{x}_n$ с четным n и $\mathfrak{t}_n$ с нечетным n.

Гиперболическое пространство V_m при $m = 1$ совпадает с евклидовым; при $m = 2$ имеем решения $\bar{\mathfrak{x}}_n$, $-\bar{\mathfrak{x}}_n$ и $\bar{\mathfrak{t}}_n$ ($n = 1, 2, \ldots$), которые строятся аналогично, как в случае сферического пространства, причем V_2 реализуется как полусфера в псевдоевклидовом трехмерном пространстве. Г. Б. Гуревич

8244. Кривые Дарбу на гиперповерхности. Швец (Darbouxovy křivky nadplochy. Švec Alois), Časop. pěstov. mat., 1959, **84**, № 2, 162—164 (чешск.; рез. русск., франц.)

Изучаются H-линеаризирующие преобразования коллинеации H (Čech E., Časop. pěstov. mat. a fys., 1949, **74**), которая является касательной коллинеацией к соответствию между гиперповерхностью в S_{n+1} и ее дуализацией π^* в S^*_{n+1}. Касательные к гиперповерхности, расположенные в своих H-линеаризирующих линейных пространствах, образуют в каждой точке при определенном выборе коллинеации H кубический конус. Если этот конус аполярен к асимптотическому конусу, то он совпадает с конусом Дарбу касательных к гиперповерхности. A. Urban

8245. К теории поля локальных конических поверхностей в касательном составном многообразии первого порядка E_n (X_n). I. II. Жотиков Г. И., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 3, 53—64; № 4, 64—69

В 1-й части работы автор строит теорию таких m-мерных конических поверхностей n-мерного центроаффинного пространства, вершины которых совпадают с центром последнего. Допуская существование тензорной плотности, отличной от нуля и определенной некоторой дифференциальной окрестностью образующей, он определяет инвариантное оснащение и внутреннюю линейную связность конической поверхности.

Во 2-й части полученные результаты используются для построения инвариантной связности в составном многообразии E_n (X_n), в котором задано поле $m+1$-мерных конусов. А. П. Норден

8246. Геометрия ограниченных областей. Кобаяси (Geometry of bounded domains. Kobayashi Shoshichi), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **92**, № 2, 267—290 (англ.)

Рассматривается n-мерное комплексное многообразие M и гильбертово пространство F интегрируемых с квадратом голоморфных функций f в M. Пусть h_0, h_1, $h_2, \ldots$, — ортонормальный базис в F, тогда

$$K(z, \bar{z}) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i(z)\, \bar{h}_i(\bar{z}), \quad z = \{z^1, \ldots, z^n\}$$

есть голоморфная функция от z и $\bar{z}$, заданная на $M \times \bar{M}$, где $\bar{M}$ — сопряженное к M многообразие. С помощью этой функции в M определяется метрика Бергмана:

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 \ln K(z, \bar{z})}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} dz^\alpha d\bar{z}^\beta. \qquad (1)$$

Предварительно изучается внешняя форма

$$K^*(z, \bar{z}) = K(z, \bar{z})\, dz^1 \wedge dz^2 \wedge \ldots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^n$$

в предположении (А. 1): в любой точке z из M форма $K^*(z, \bar{z})$ отлична от нуля. Относительно метрики (1) доказывается, что она положительно полуопределена и инвариантна при всех голоморфных преобразованиях в M. Условием ее положительной определенности служит (А. 2): для каждого голоморфного вектора Z в z из M существует интегрируемая с квадратом голоморфная n-форма $f^*(z) = f(z)\, dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^n$ такая, что $f^*(z) = 0$, а $Z(f) \neq 0$.

Под голоморфным вектором Z понимается комплексный оператор $Z = \zeta^\alpha(z) \frac{\partial}{\partial z^\alpha}$. При выполнении (А. 2) метрика (1) определяет в M келерово пространство. Предполагая в дальнейшем, что (А. 1) и (А. 2) выполнены, автор доказывает ряд теорем. Отметим важнейшие из них:

1) Если ds^2 и ds'^2 — бергмановы метрики в комплексных многообразиях M и M', то в $M \times M'$ бергманова метрика определяется их суммой $ds^2 + ds'^2$. 2) Группа $G(M)$ всех голоморфных преобразований в M есть группа Ли, а подгруппа изотропии в каждой точке является компактной. 3) Голоморфные векторные поля X и iX являются векторами Киллинга тогда и только тогда, когда оба они параллельные векторные поля.

Далее исследуются дифференциально-геометрические свойства многообразия M, допускающего дискретную группу D голоморфных преобразований в предположении, что фактор-пространство M/D компактно. Над сепарабельным комплексным гильбертовым пространством H строится бесконечномерное проективное пространство $P(H)$, точками которого являются 1-мерные подпространства в H. В $P(H)$ вводится келерова метрика

$$d\sigma^2 = \sum_i d\zeta^i d\bar{\zeta}^i - \sum_{i,k} (\bar{\zeta}^i d\zeta^i)(\zeta^k d\bar{\zeta}^k),$$

где $\sum_i (\zeta^i)^2 = 1$. Устанавливается, что келерово пространство с метрикой (1) может быть изометрически вложено в $P(H)$ с метрикой $d\sigma^2$. Г. И. Кручкович

8247. О неголономных обобщенных метрических пространствах линейных элементов. Моор (Über nichtholonome allgemeine metrische Linienelementräume. Moór Arthur), Acta math., 1959, **101**, № 3-4, 201—233 (нем.)

Неголономная геометрия точечных пространств рассмотрена в работах И. А. Схоутена, Г. Врэнчану, И. А. Синга, В. В. Вагнера и др. Рунд исследовал общие вопросы неголономной геометрии финслерова пространства, трактуемого как пространство линейных элементов с основной метрической функцией, и указал конкретные применения этой геометрии к решению динамических задач (Rund H., Math. Nachr., 1956, **11**, 61—80).

Автор рассматривает неголономную геометрию обобщенного метрического пространства линейных элементов, в котором метрика определена при помощи невырожденного ковариантного симметрического тензора второй валентности. При построении неголономной геометрии этого пространства автор пользуется методом Рунда. Если в обобщенном метрическом пространстве линейных элементов с аффинной метрической связностью, определенной при помощи объектов $M^{*i}_{jk}(x, v)$ и $L^{*i}_{jk}(x, v)$ (РЖМат, 1958, 3237), задано m функций $G_{(\mu)}$ (первой степени однородности относительно компонент направления линейного элемента), то кривые $x^i = x^i(s)$, s —

длина дуги ($i, j, k = 1, 2, \ldots, n$; $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, m$), которые являются решениями системы уравнений $G_{(\mu)}(x, \dot{x}) = 0$ и ковариантный дифференциал касательных векторов которых имеет вид:

$$D\dot{x}^i/Ds = g^{ij}\pi_{(\mu)}(x, \dot{x})\, A^*_{(\mu)j}(x, \dot{x}),$$

где $\dot{x}^i = dx^i/ds$, а величины $\pi_{(\mu)}$ и $A^*_{(\mu)i}$ выражаются через компоненты метрического тензора $g_{ij}(x, v)$, объекта связности и частные производные функции $G_{(\mu)}$, автор называет путями. Если в рассматриваемом пространстве система путей задана, то к связности пространства однозначно и инвариантным образом ассоциируется новая связность, которую автор называет неголономной связностью. Приведены формулы для аналитического определения компонент неголономной связности. Рассматриваются тензоры кривизны, соответствующие неголономной связности, и найдены необходимые условия для того, чтобы экстремали рассматриваемого пространства совпали бы с его путями.

Во второй части работы вводится понятие относительных путей, для определения которых используются однопараметрические многообразия линейных элементов общего положения. Если система относительных путей задана, то к исходной связности пространства ассоциируется вполне определенная связность, которую автор назвал обобщенной неголономной связностью. Выводятся уравнения неголономного смещения, которые являются аналогами уравнений геодезического смещения (РЖМат, 1958, 9154) и совпадают с ними, если геодезические пространства совпадают с его путями.

В. И. Близникас

8248. Слабосоприкасающееся риманово пространство финслерова пространства и его приложения к теории подпространств финслерова пространства. Маэбаси (A weakly osculating Riemann space of the Finsler space and its application to a theory of subspaces in the Finsler space. Maebashi Toshiyuki), Tensor, 1959, 9, № 1, 62—72 (англ.)

Понятие соприкасающегося риманова пространства финслерова пространства введено Нацимом (Nazim, Über Finslersche Räume, Diss. München, 1936) как аналог соприкасающегося евклидова пространства риманова пространства (Картан Э., Геометрия римановых пространств, М.—Л., 1936). Это соприкасающееся риманово пространство замечательно тем, что его экстремали соприкасаются с экстремалями исходного финслерова пространства вдоль векторного поля, которое положено в основу для его построения. Нацим показал, что при помощи соприкасающегося риманова пространства можно определить связность в финслеровом пространстве. От строения векторного поля, вдоль которого строится соприкасающееся риманово пространство, зависит и структура получаемой связности. Варга указал векторное поле (Varga O., Math. Phys., 1941, 50, 165—175), которое индуцирует в финслеровом пространстве картановскую связность (Cartan E., Les espaces de Finsler, 1934), а Лаугвиц (РЖМат, 1957, 3476) дал геометрическую характеристику векторных полей, индуцирующих связность типа Бервальда, Рунда, Бартеля, Картана, Тейлора и Синга.

Автор определяет соприкасающееся риманово пространство финслерова пространства не вдоль векторного поля, как Нацим и Варга, а вдоль линейного элемента. Полученное таким образом риманово пространство он называет слабосоприкасающимся римановым пространством и использует его как для введения связности, так и для исследования параллельного перенесения в подпространствах финслерова пространства. Доказано, что если внутренняя связность подпространства, погруженного в финслерово пространство, совпадает с индуцированной связностью, то финслерово пространство является римановым.

В. И. Близникас

8249. Упрощенное правило для тензора кривизны Римана—Кристоффеля и Риччи—Эйнштейна. Роша-Питта (Uma regra simplificadora para o tensor de curvatura de Riemann—Cristofel e Ricci—Einstein. Rocha Pitta Hélio da), Rev. Escola minas, 1958, 21, № 4, 161 (порт.)

Предлагается мнемоническое правило для запоминания и быстрой записи выражения тензоров Римана—Кристоффеля и Риччи—Эйнштейна.

В. В. Рыжков

8250 К. О векторном исчислении. Пайу (Un aspect du calcul tensoriel. Pailloux H. (Mémor. Sci. Math., № 130). Paris, Gauthier-Villars, 1955, 74 p., 1100 f.) (франц.)

Основная цель книги — показать, что использование функционального исчисления для материальных систем, положение которых зависит от произвольных функций, значительно облегчается введением обозначений тензорного исчисления, приспособленных надлежащим образом.

В гл. I, озаглавленной «Тензорное исчисление и функциональное исчисление», автор определяет пространство E как множество, элементы которого являются функциями, определенными в некоторой области D, и предполагает, что существуют базисные векторы, зависящие от точки P, описывающей область D, такие, что вектор $\mathbf{x}$, принадлежащий аффинному пространству E, может быть представлен единственным образом, в виде

$$\mathbf{x} = \int_D x^P \mathbf{e}_P\, d\tau,$$

где $d\tau$ — элемент меры области D в окрестности точки P.

Говорят, что x^P — компонента вектора $\mathbf{x}$. Это функция точки P, определенная в D. Можно убедиться, что введение индекса P точки, от которой зависит функция, создает большое удобство.

Изложив тензорную алгебру, автор определяет функциональную производную следующим образом. В малой области массы $\Delta\tau$, окружающей данную точку P, меняем данную функцию x^P на постоянную величину Δx^P, причем x^P не меняется в области $D - \Delta\tau$. Пусть Δf — приращение функционала. Если существует предел отношения $\Delta f/\Delta\tau\Delta x^P$, когда Δx^P стремится к нулю, и, независимо, $\Delta\tau$ тоже стремится к нулю по всем своим измерениям и если этот предел — единственный, то будем говорить, что предел — функциональная производная от f по функции x в точке P. Она обозначается: $\partial f/\partial x^P$. При помощи этого определения автор может излагать тензорный анализ хорошо известным способом.

В гл. II, «Первые многообразия пространства E», излагается теория кривых. Гл. III посвящена теории интегрирования. Автор излагает сначала понятие интеграла в обычном пространстве и затем переходит к случаю функционального интегрирования. В гл. IV рассматриваются геодезические. Здесь автор рассматривает сначала геодезические риманова многообразия, а затем переходит к случаю геодезических новых многообразий. Гл. V, озаглавленная «Аналитическая механика», посвящена таким проблемам, как интегрирование Гамильтона, функции — параметры, системы со связями, не зависящими от времени. Последняя глава содержит несколько замечаний относительно интегрального уравнения, доминирующего в этом исследовании.

K. Yano

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 9, 1003.

8251 К. Введение в тензорный анализ. Барретт (An introduction to tensor analysis. Barrett Leonard L. Palo Alto, Calif., Nat. Press, 1956, II, 33 pp., 2.00 doll.) (англ.)

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

8252. К вопросу об обосновании специальной теории относительности. Измайлов С. В., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та, им. А. И. Герцена, 1958, **141**, 19—26

В работе содержится попытка «динамического» обоснования специальной теории относительности на основе общих законов динамики точки, закона пропорциональности массы и энергии, принципа относительности и принципа однородности пространства. О. С. Парасюк

8253. Инварианты и классификация дифференциальных квадратичных форм от четырех переменных. Петров П. И., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1959, **23**, № 3, 387—420

Инвариантом дифференциальной квадратичной формы

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \qquad (1))$$

называют функцию от коэффициентов $g_{ij}(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и их производных, которая остается неизменной при любом (допустимом) преобразовании переменных x^i. В работе, в предположении, что $n = 4$ и что форма (1) имеет сигнатуру $s = 4, 0, -2$, найден наипростейший базис инвариантов формы (1). Для каждого из 14 инвариантов этого базиса даны их явные выражения через компоненты тензора кривизны соответствующего четырехмерного риманова пространства V_4. На основе этого результата дана классификация указанного рода пространств V_4 по значениям некоторых арифметических инвариантов. В качестве частных случаев рассмотрены конформно-плоские и эйнштейновы V_4. Г. Б. Гуревич

8254. К вопросу существования регулярных решений уравнений поля общей относительности, которые могли бы моделировать частицы. Папапетру, Тредер (Zur Frage der Existenz von singularitätsfreien Lösungen der allgemein-relativistischen Feldgleichungen, die Teilchenmodelle darstellen könnten. Papapetrou A., Treder H.), Ann. Phys. (DDR), 1959, **3**, № 7-8, 361—372 (нем.)

На основании анализа работ Эйнштейна, Паули, Лихнеровича и собственных исследований авторы приходят к выводу, что для случая «чистого» гравитационного поля периодические регулярные всюду решения существовать не могут. Я. И. Пугачев

8255. Один принцип единой теории. Интерпретация, основанная на применении гиперповерхности 5-мерного пространства. Ленуар (Principe d'une théorie unitaire. Interprétation basée sur l'emploi d'une hypersurface d'un espace pentadimensionnel. Lenoir Marcel), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 14, 2074—2075 (франц.)

Рассматривается гиперповерхность $x^0 = 0$ 5-мерного пространства V_5 класса C^2, имеющего линейную связность $\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}$. Если $\varphi^i(y^\beta)$ — произвольные функции класса C^2, с отличным от нуля якобианом и $x^0 = \varphi^0(y^\beta)$, то можно определить векторы $\nu^\alpha = \frac{\partial y^\beta}{\partial x_0}$ и $\nu_\alpha = \frac{\partial x^0}{\partial y^\alpha}$ так, что $\nu^\alpha \nu_\alpha = 1$, причем в выбранной системе координат $\nu^0 = \nu_0 = 1$, $\nu^i = \nu_i = 0$ $(i, j = 1, \ldots, 4)$ и этот факт будет инвариантным для любого преобразования вида $x'^0 = x^0$, $x'^i = \psi^i(x^j)$. В этой системе координат имеется возможность определить, пользуясь формами Картана, компоненты тензора кривизны и тензора Риччи на V_4 и записать уравнения поля. При некоторых частных предположениях автор получает отсюда уравнения поля единой теории Эйнштейна — Шрёдингера и Тоннела — Боннора. А. З. Петров

8256. К методу особенностей в общей теории относительности. Фам Дань Хоанг (Sur la méthode des singularités en relativité générale. Pham T. H.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 153 (франц.)

В общей теории относительности вывод уравнений движения для системы тел из уравнений поля $S^{\alpha\beta} = 0$ существенно зависит от свойств потока вектора $S^{(\alpha)}$ с компонентами $S^{\alpha(i)}$, определенного для части пространства W_3. В самом деле, в W_3 поток вектора $S^{(\alpha)}$ через замкнутую поверхность, содержащую особенную область (т. е. тела), зависит только от поверхности тела, и уравнения движения получаются как условия того, что этот поток равен нулю в силу уравнений поля.

8257. Теория единого поля Эйнштейна против принципа взаимозависимости геометрии — физики. Сиокос Ф., Техника хроника. Диминеа эпистимоники эксдосис, 1957, **34**, № 395—396, 210—216 (греч.)

См. РЖФиз, 1959, 144.

8258. Уравнения движения и координатные условия в релятивистской задаче n тел. Брумберг В. А., Астрон. ж., 1958, **35**, № 6, 893—903

Автор ставит задачей получение уравнений движения релятивистской задачи n тел в произвольной системе координат. Для этого автор, пользуясь методом приближений Эйнштейна, Инфельда, Гоффмана, представляет метрический тензор в виде: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}$, $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, $\eta_{00} = 1$, $\eta_{0\mu} = 0$, $h_{mn} = -\delta_{mn}(m, n = 1, 2, 3)$; выделяя в тензоре Риччи линейную и нелинейную части относительно $\eta_{\mu\nu}$ и записывая уравнения поля, автор предполагает, что характеристическая скорость v тел мала по сравнению со скоростью света c, и вводит малый параметр $\lambda = \frac{1}{c}$, по которому и ведется разложение искомых функций $g_{\mu\nu}$ в степенные ряды:

$$\gamma_{00} = \lambda^2 \underset{2}{\gamma_{00}} + \lambda^4 \underset{4}{\gamma_{00}} + \ldots \gamma_{0m} = \lambda^3 \underset{3}{\gamma_{0m}} + \lambda^5 \underset{5}{\gamma_{0m}} + \ldots, \gamma_{mn} = \lambda^4 \underset{4}{\gamma_{mn}} + \lambda^6 \underset{6}{\gamma_{mn}} + \ldots,$$

где $\gamma_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}h_{\rho\sigma}$. На каждом этапе приближения при фактическом отыскании потенциалов тяготения, в решении $\underset{2l-1}{h_{0m}}$, $\underset{2l}{h_{00}}$, $\underset{2l}{h_{mn}}$ уравнений поля вводятся четыре произвольные функции, определяющие ту или иную систему отсчета, и исследуется их влияние на вид уравнений движения. Доказывается, что уравнения движения не зависят от координатных условий вне масс. В заключение рассматриваются уравнения движения ограниченной задачи $N + 1$ тел. Автор замечает, что вообще корректность метода Эйнштейна — Инфельда — Гоффмана в любой координатной системе остается неизученной, он не приводит к физически эквивалентным результатам в различных системах отнесения и область его применимости ограничивается системой координат, совпадающей в первом приближении с гармонической системой координат. Вследствие этого рассмотрение гравитационной материи как особенностей поля, является, по мнению автора, недостаточным. А. З. Петров

8259. Решения уравнений поля Эйнштейна в пустом пространстве. Микаиль (Solutions of Einstein's field equations for empty space. Mikhail F. I.), Альнышрат-аль-ильмитат-е-джамий-ат-е-эйн шамс, A'in Shams Sci. Bull., 1956, № 1, 125—135 (англ.)

Рассматривается пространство Эйнштейна с уравнениями поля $R_{\alpha\beta} = 0$ и метрикой $ds^2 = fdt^2 - C(dx_1^2 + dx_2^2) - \frac{r^2}{f}d\theta^2$, где f, C, r — некоторые функции от x_1, x_2. Ввиду ортогональности системы координат автор пишет все индексы снизу. Записывая уравнения поля, автор приходит к простой системе дифференциальных

уравнений, допускающей интегрирование в квадратурах. При некоторых дополнительных условиях он получает отсюда решения Шварцшильда, Чжоу, Вильсона, Казнера и Нарликара—Кармакара.

Примечание референта. Автор незнаком с работой референта о классификации пространств Эйнштейна по группам движений (РЖМат, 1957, 7371Д). Все рассматриваемые автором решения являются частными случаями пространств Эйнштейна, допускающих двучленную абелеву группу движений, действующую на неизотропных поверхностях транзитивности, и получены в указанной работе. А. З. Петров

8260. Калибровочная инвариантность уравнения для барионов. Чеолин, Тойода (Gauge invariance of baryon equation. Ceolin C., Toyoda T.), Nuovo ciment, 1959, **13**, № 3, 605—613 (англ., рез. итал.)

В основу описания барионов кладется следующее уравнение, являющееся обобщением уравнения Дирака

$$(\Gamma^\mu \partial_\mu + ig\Gamma^\mu \Phi_\mu - ie\Gamma^\mu \Gamma_5 A_\mu + im\Gamma_5) X = 0.$$

Здесь X — составленный из двух комплексных спиноров 4-пространства восьмикомпонентный столбец, рассматриваемый как волновая функция протона и Ξ^- — частицы или нейтрона и Ξ^0 — частицы, Γ^μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) и Γ_5 — матрицы восьмого порядка, подчиняющиеся таким же перестановочным соотношениям, как матрицы, входящие в уравнение Дирака. A_μ — векторный потенциал электромагнитного поля, Φ_μ — 4-вектор, характеризующий барионное поле, e, m, g — постоянные. Инвариантность этого уравнения по отношению к обобщенному калибровочному преобразованию

$$X' = \exp[i(g\theta_g - e\Gamma_5\theta_e)], \quad A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\theta_e, \quad \Phi'_\mu = \Phi_\mu - \partial_\mu\theta_g,$$

связывается с законами сохранения электрического и барионного зарядов. Дополнительно вводятся еще два псевдоскалярных поля φ и Φ и постулируется такое взаимодействие между полями, чтобы при исключении Φ_μ имело место нелокальное взаимодействие с π-мезонами. В работе отсутствуют достаточно четкие формулировки исходных математических предположений и окончательных выводов. Г. А. Зайцев

8261 К. Кватернионные инварианты пространства Минковского. Леммон (Quaternion invariants of the Minkowski space. Lemmon William W. Navy contract N7-ONR-434, task order 3. Techn. Rept Dept. Math., Tulane Uni.; New Orleans Louisiana, 1955, III, 68 pp.) (англ.)

ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

8262. О теореме Е. Хопфа. Грин (A theorem of E. Hopf. Green L. W.), Michigan Math. J., 1958, 5, № 1, 31—34 (англ.)

Доказана теорема: Интеграл от скалярной кривизны (свернутый тензор кривизны Римана) по компактному римановскому многообразию без сопряженных точек с нетырежды непрерывно дифференцируемой метрикой неположителен и обращается в нуль только в том случае, если метрика локально евклидова.

Эта теорема является обобщением известной аналогичной теоремы Хопфа (Hopf E., Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A. 1948, **34**, 47—51). Метод доказательства автора является модификацией метода доказательства Хопфа. И. Я. Бакельман

8263. Смешанные дифференциалы и теория Ходжа на многообразиях, не обязательно ориентируемых. Ульман (Gemischte Differentiale und die Theorie von Hodge auf nicht notwendig orientierbaren Mannigfaltigkeiten. Uhlmann Armin), Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Jena. Math.-naturwiss. Reihe, 1958—1959, 8, № 1, 31—35 (нем.)

Пусть M — связное многообразие класса C^∞ и размерности n. Смешанный дифференциал (g-дифференциал) задается отнесением каждой системе координат $\{x^i\} = \{x^1, \ldots, x^n\}$ пары дифференциалов $\Theta(x^i) = (\alpha_1, \alpha_2)$ так, что для пары дифференциалов (β_1, β_2), соответствующей другой системе координат $\{y^i,\}$ имеют место следующие соотношения (в пересечении областей определения этих систем координат):

$$\alpha_1 = \beta_1;\ \alpha_2 = \beta_2, \text{ если } \frac{\partial(x^1, \ldots, x^n)}{\partial(y^1, \ldots, y^n)} > 0,$$

$$\alpha_1 = \beta_2;\ \alpha_2 = \beta_1, \text{ если } \frac{\partial(x^1, \ldots, x^n)}{\partial(y^1, \ldots, y^n)} < 0.$$

Смешанные дифференциалы образуют модуль относительно кольца обычных дифференциалов.

Вводится оператор C сопряжения ориентации: если $\Theta(x^i) = (\alpha_1, \alpha_2)$, то принимается $C\Theta(x^i) = (\alpha_2, \alpha_1)$. Имеет место представление любого g-дифференциала Θ в виде $\Theta = \Theta_s + \Theta_p$, где $C\Theta_s = \Theta_s$ (скаляр) и $C\Theta_p = -\Theta_p$ (псевдоскаляр). Каждому дифференциалу Θ соответствует скаляр (Θ, Θ).

В случае наличия на многообразии невырожденной метрики (не обязательно определенной) оказывается возможным ввести оператор двойственности a, ставящий в соответствие g-дифференциалу Θ размерности r g-дифференциал $a\Theta$ размерности $n - r$. При этом $a^2 = \pm 1$ и $Ca + aC = 0$.

Условие ориентируемости многообразия описывается (де Рам, Кодаира) наличием на нем „постоянного псевдоскаляра" (1, — 1). Опираясь на локальную ориентируемость, автор определяет (для исходного многообразия M) умножение смешанных дифференциалов и интегрирование псевдоскаляров. Вводится скалярное произведение $\langle\Theta, \Theta'\rangle = (-1)^{r/2}\int_M 1/2\,[\Theta a\Theta' + \Theta' a\Theta]$.

Пусть, далее, M компактно и метрика положительно определена. Положим $d^a = a^{-1}da$ и $\Delta = dd^a + d^a d$ (оператор Лапласа — Бельтрами — де Рама). Указываются формулы Грина: $\langle d\Theta,\ d\Theta'\rangle + \langle d^a\Theta,\ d^a\Theta'\rangle + \langle\Delta\Theta, \Theta'\rangle = 0$. Устанавливается возможность представления любого g-дифференциала в виде $\Theta = \Delta\Theta_0 + \Theta_H$ с гармоническим Θ_H (т. е. $\Delta\Theta_H = 0$). Отмечается обобщение закона двойственности Пуанкаре в виде $B'_r = B''_{n-r}$, где B'_r (B''_r) обозначает число линейно независимых скалярных (псевдоскалярных) гармонических дифференциалов размерности r. И. З. Розенкноп

8264. Базисные поля и аффинные преобразования. Каттанео-Гаспарини (Campi basici e transformazioni affini. Cattaneo Gasparini Ida), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1958, **25**, № 1-2, 33—42 (итал.)

Рассматривается распространение на случай расслоенного пространства аффинных реперов понятия базисного векторного поля, ранее введенного для расслоенного пространства линейных реперов (РЖМат, 1958, 8250).

Пусть V_n — дифференцируемое многообразие класса C^∞, T_x — касательное векторное пространство в точке $x \in V_n$, $\widetilde{T}_x$ — аффинное касательное пространство в той же точке, $\xi \in T_x$, R — репер в T_x, $S_x = (\xi, R)$ — аффинный репер. Через $\widetilde{E}(V_n)$ и $E(V_n)$ соответственно обозначаются расслоенные пространства аффинных и линейных реперов, через p и p' — канонические проекции, сопоставляющие точкам z и z' пространств $\widetilde{E}(V_n)$ и $E(V_n)$ точку базы x. Отображение $\widetilde{E}(V_n) \to E(V_n)$ определяется усло-

вием $j: R \to (O, R) = S_x$; f обозначает гомоморфизм $z \to z'$, определяемый условием $S_x(\xi, R) \to R$. Точке $z' = fz$ сопоставляется также обозначаемый через z' изоморфизм $R^n \to T_{p'z'}$, и точке z — изоморфизм $z: R^n \to T_{pz}$, при котором $w \in R^n$ переходит в конец вектора $\xi + z'w$, где $z' = fz$. Если V_n снабжено линейной связностью, ω — форма этой связности, а $w \in R^n$, то базисным полем векторов, ассоциированным w для связности ω, является поле $Y'_{z'}$, удовлетворяющее условиям $\omega(Y'_{z'}) = 0$, $\theta(Y'_{z'}) = w$, где θ — 1-форма со значениями в R^n, определенная условием (для любого поля $Y_{z'}$): $\theta(Y_{z'}) = z'^{-1} p' Y_{z'}$.

Аффинная связность может быть задана (РЖМат, 1958, 4208) формой связности на $E(V_n)$ со значениями в алгебре Ли линейной группы и 1-формой на $E(V_n)$ со значениями в R^n. Этой форме канонически ассоциирован линейный оператор Φ и тензор Φ^α_β. Введем на $\widetilde{E}(V_n)$ 1-форму со значениями в R^n такую, что для любого вектора Y_z, $\varphi_z(Y_z) = z'^{-1} \Phi p Y_z$. Для заданной точки $w \in R^n$ базисным полем, ассоциированным w для аффинной связности с формой π, называется поле, определяемое условиями $\pi(Y_z) = 0$, $\varphi(Y_z) = w$.

Пользуясь ранее введенными понятиями (РЖМат, 1958, 5148), автор получает теорему: Всякая геодезическая дуга многообразия V_n с аффинной связностью является проекцией на V_n траектории базисного поля векторов. Обратно, проекция каждой траектории базисного векторного поля есть дуга геодезической на V_n. Аффинная связность называется полной, если каждая геодезическая $x(s)$ может быть неограниченно продолжена для сколь угодно больших s. Получен следующий результат: Для того чтобы дифференцируемое многообразие V_n было полно по отношению к некоторой аффинной связности, необходимо и достаточно, чтобы каждое базисное векторное поле определяло однопараметрическую группу глобальных преобразований $\widetilde{E}(V_n)$.

Инфинитезимальное преобразование называется ω-инвариантным (π-инвариантным), если определяемая им локальная группа оставляет $\omega(\pi)$ инвариантной. Имеет место теорема: Если связность π полна, то всякое векторное поле, порождающее группу π-инвариантных преобразований, порождает глобальную однопараметрическую группу преобразований V_n.

В конце работы устанавливается связь между базисными векторными полями, ассоциированными одному и тому же элементу $w \in R^n$, для случая линейной и аффинной связностей: $Y' = \bar{\Phi} \cdot f \cdot Y$, где $\bar{\Phi} = p'^{-1} \Phi p'$.

В. В. Рыжков

8265. Аналитические преобразования и изометрии компактного келерова многообразия. Лихнерович (Transformations analytiques et isométries d'une variété kählérienne compacte. Lichnerowicz André), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 12, 855—857 (франц.)

Рассматривается алгебра L инфинитезимальных аналитических преобразований компактного келерова пространства. Метрическая двойственность позволяет задавать инфинитезимальные преобразования при помощи вещественных 1-форм ξ. Всякому инфинитезимальному преобразованию ξ можно единственным образом сопоставить комплексный скаляр χ, удовлетворяющий равенствам

$$\xi_{(1,0)} = d'\chi + h_{(1,0)}, \quad \int_V \chi(*1) = 0;$$

здесь $\xi_{(1,0)}$ — составляющая ξ типа (1,0), а $h_{(1,0)}$ — аналитическая форма. Чтобы ξ определяло изометрию, необходимо и достаточно, чтобы скаляр χ был чисто мнимым. Для форм $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ альтернация $\tau = [\xi^{(1)}, \xi^{(2)}]$ определяется так же, как и для соответствующих векторных полей. Обозначим $L' = [L, L]$ и I — подпространство, соответствующее формам $\xi_{(1,0)}$, d'-гомологичным нулю. Оказывается, что $L' \subset I$. Комплексная подалгебра алгебры L, порожденная изометрическими преобразованиями келерова многообразия, является приводимой в L.

Д. В. Беклемишев

8266. Локально точные мероморфные дифференциальные формы. Дополнения. Дольбо (Formes différentielles méromorphes localement exactes. Compléments. Dolbeault Pierre), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **91**, № 3, 390—398 (франц.)

Пусть V_m — компактное келерово многообразие, а S — его главное аналитическое подмножество, не имеющее особенностей. Обозначим M^p_S пучок ростков мероморфных дифференциальных форм порядка p, для которых S — множество полюсов кратности не выше 1. Через m^p_S обозначим множество замкнутых мероморфных форм, обладающих тем же свойством. Предположим, что множество S определяет расслоенное пространство $\{S\}$, достаточно обширное в смысле Кодайра и Спенсера. В работе автора (РЖМат, 1958, 5161) определена размерность q-го пространства когомологий с коэффициентами в m^p_S, M^p_S и dM^p_S, а также размерность пространства $E^{p+1,q}_S$, введенного в той же работе. При этом предполагалось, что p и q связаны неравенствами $q > 0$, $p + q < m - 3$ или $q + p > m + 1$. В реферируемой работе автор вычисляет указанные размерности для произвольных p.

Д. В. Беклемишев

8267. Аналитически проективные замены и их группы на почти комплексном многообразии. Исихара (Holomorphically projective changes and their groups in an almost complex manifold. Ishihara Shigeru), Tohoku Math. J., 1957, **9**, № 3, 273—297 (англ.)

Рассматривается почти комплексное многообразие с тензором почти комплексной структуры φ^i_k. φ-связностью на этом многообразии называется аффинная связность, в которой φ^i_k ковариантно постоянно. φ-связность является полусимметрической, если ее тензор кручения удовлетворяет уравнению $S^i_{jk} - \varphi^a_j \varphi^b_k S^i_{ab} = N^i_{jk}$, где N^i_{jk} — тензор Нейенхейса данной почти комплексной структуры. На любом почти комплексном многообразии существует полусимметрическая связность. Кривая почти комплексного многообразия называется аналитически планарной, если аналитическое двумерное направление, содержащее ее касательный вектор, переносится параллельно вдоль кривой. При аналитически проективной замене связности (H-проективной замене) полусимметрическая связность переходит в другую полусимметрическую связность с теми же аналитически планарными кривыми. В работе рассмотрены H-проективные замены полусимметрических связностей на H-проективно плоских почти комплексных многообразиях и на многообразиях кватернионной структуры. φ-проективной заменой называется замена полусимметрической связности на другую полусимметрическую связность, имеющую те же геодезические. Полусимметрическая связность φ-проективно отображается в симметрическую связность. Если одна симметрическая связность φ-проективно отображается на другую симметрическую связность, то обе связности совпадают. Рассматриваются преобразования почти комплексного многообразия, сохраняющие почти ком-

плексную структуру и систему аналитически планарных кривых некоторой заданной на многообразии полусимметрической связности. Такие преобразования называются аналитически проективными. Изучается группа аналитически проективных преобразований в случае, если она компактна или преобразования оставляют инвариантным тензор Риччи. Если группа аналитически проективных преобразований имеет порядок не меньше $2(m^2+m+1)$, то она максимального порядка $2(m^2+2m)$, связность H-проективно плоская, и многообразие гомеоморфно комплексному проективному пространству. Для доказательства используются леммы о бесконечно малых аналитически проективных преобразованиях. Д. В. Беклемишев

8268. **Гармонические интегралы на многообразиях со структурой почти произведения. Рейнхарт** (Harmonic integrals on almost product manifolds. Reinhart Bruce L.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 88, № 1, 243—276 (англ.)

Дифференцируемое многообразие V размерности n класса C^∞ имеет структуру почти произведения, если пучок его касательных пространств $T(V)$ дифференцируемым образом разложен в прямую сумму двух пучков касательных подпространств $PT(V)$ и $QT(V)$ размерности соответственно равной p и q, $p+q=n$. Эта структура предполагается интегрируемой всюду на многообразии V. Тогда в некоторой окрестности U любой точки многообразия V может быть выбрана система координат $(x^1,\ldots,x^p;\ y^1,\ldots,y^q)$ такая, что производные $\partial/\partial x^l$ порождают над U пучок $PT(V)$, а производные $\partial/\partial y^l$ — пучок $QT(V)$.

На многообразии V вводится риманова метрика, по отношению к которой подпространства $PT(V)$ и $QT(V)$ оказываются ортогональными. В системе координат $(x^1,\ldots,x^p,\ y^1,\ldots,y^q)$ окрестности U она приводится к виду

$$ds^2=g'_{ij}(x,y)\,dx^i dx^j+g''_{ij}(x,y)\,dy^i dy^j.$$

Эта метрика считается не имеющей кручения, если параллельное перенесение вектора v, принадлежащего подпространству $PT(V)$ (соответственно $QT(V)$), снова приводит к вектору, принадлежащему $PT(V)$ (соответственно $QT(V)$). На многообразии V оператор внешнего дифференцирования d может быть представлен в виде $d=d'+d''$, где d' — оператор дифференцирования вдоль пространства $PT(V)$, а d'' — вдоль пространства $QT(V)$. Операторы d' и d'' будут полными дифференциалами в том случае, когда структура многообразия V интегрируема. Метрика многообразия позволяет ввести на нем оператор $\delta'=(-1)^{mn+n+1}*d*$, где m — степень формы, к которой применяется этот оператор, n — размерность многообразия V, а $*$ — оператор двойственности, определенный при помощи метрики многообразия. Аналогично строится оператор δ''. Если $\delta=(-1)^{mn+n+1}*d*$, то $\delta=\delta'+\delta''$. Далее строятся операторы Лапласа $\Delta'=d'\delta'+\delta'd'$ и $\Delta''=d''\delta''+\delta''d''$. Оператор d' удовлетворяет условию $(d')^2=0$ и, следовательно, определяет теорию когомологий на множестве дифференциальных форм. Однако, как показывают разобранные в работе примеры, в общем случае для этих когомологий не будет иметь место теорема Ходжа, т. е. теорема о том, что каждый класс когомологий содержит только одну форму φ, удовлетворяющую условию $\Delta'\varphi=0$. Эта теорема будет иметь место на компактном многообразии V, если его метрика не имеет кручения (в указанном выше смысле), а формы φ имеют класс C^∞. Для доказательства этой теоремы автор использует оператор Грина G', удовлетворяющий условиям $G'd'\varphi=d'G'\varphi$ и $G'\Delta'\varphi=\Delta'G'\varphi=\varphi-H'\varphi$, где H' — проекция оператора Δ' на его ядро. М. А. Акивис

8269. **Многообразия с обобщенной кватернионной структурой. Мартинелли** (Varietà a struttura quaternionale generalizzata. Martinelli Enzo), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1959, **26**, № 3. 353—362 (итал.)

Вводятся понятия обобщенной почти кватернионной и обобщенной почти эрмитовой кватернионной инфинитезимальной структуры (ср. РЖМат, 1956, 5481, 5482); такого рода структура является расслоенным пространством $T(V_{4n}, Q_n, G)$, где Q_n — правое кватернионное n-мерное векторное пространство (скаляры умножаются на векторы справа), V_{4n} — соответствующее пространству Q_n действительное $4n$-мерное дифференцируемое многообразие, а G есть соответственно группа $\mathcal{L}_n^Q$ или $\mathcal{U}_n^Q$. Каждая из этих групп состоит из преобразований вида $\Xi'=A\Xi q$, где Ξ — строка (ξ^α) координат вектора, Ξ' — строка координат его образа, q — кватернион с нормой, равной 1, а A — кватернионная матрица n-го порядка, неособенная для группы $\mathcal{L}_n^Q$ и унитарная для группы $\mathcal{U}_n^Q$.

Установлено, что преобразования группы $\mathcal{U}_n^Q$ характеризуются внутри $\mathcal{L}_n^Q$ тем, что они оставляют неизменными эрмитовы произведения векторов пространства Q_n, если только эти произведения действительны. Таким образом, обобщенная почти эрмитова кватернионная структура задает на связанном с ней многообразии V_{4n} эрмитову кватернионную метрику. В качестве примера построена действительная модель правого проективного n-мерного кватернионного пространства в виде алгебраической поверхности P_{4n} в евклидовом пространстве E_N, где $N=(2n+1)(n+1)$, и показано, что многообразие P_{4n} естественно включается в обобщенную почти кватернионную инфинитезимальную структуру. Г. Б. Гуревич

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

8270. **Определение числа m-мерных плоскостей в N-мерной конечной проективной геометрии над полем Галуа порядка p^n; где p — простое число, а n — целое положительное. Хуссейн** (An alternative proof of the number of m-flats N-dimensional finite projective geometry formed from Galois field G. F. (p^n), where p is a prime number and n a positive integer. Hussain Q. M.), Proc. Pakistan Statist. Assoc., 1954—1955, № 3-4, 1—2 (англ.)

Точкой в N-мерном конечном проективном пространстве над полем Галуа $GF(p^n)$ называется упорядоченный набор не обращающихся одновременно в нуль элементов $(x_0, x_1,\ldots,x_N)$ из поля $GF(p^n)$; причем наборы, отличающиеся домножением на ненулевой элемент, отождествляются. m-мерная плоскость — совокупность точек, однородные координаты $(x_0,\ldots,x_N)$ которых удовлетворяют $N-m$ однородным линейным уравнениям. В работе подсчитано число φ различных m-мерных плоскостей, как функция от N, m, p^n. В. А. Залгаллер

8271. **Строение трансляционных полуколец в евклидовых пространствах. Масерик** (The structure of translation half rings in Euclidean spaces. Maserick Peter H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 1, 133—139 (англ.)

Полукольцо множеств в n-мерном евклидовом пространстве E^n называется трансляционным, если оно инвариантно относительно одвигов. Рассматриваются трансляционные полукольца выпуклых ограниченных множеств в E^n. Устанавливаются следующие факты:

а) Система всех многогранников в E^n, грани которых ориентированы в соответствии с заданным множеством направлений, образует трансляционное полукольцо. б) Если P есть невырожденное трансляционное полукольцо выпуклых многогранников, то для каждого конечного множества $d_1, d_2, \ldots, d_m$ различных направлений, соответствующих многогранникам из P, существует в P невырожденный многогранник R, имеющий в точности две грани, ориентированные в соответствии с каждым из направлений $d_1, d_2, \ldots, d_m$. в) Невырожденное трансляционное полукольцо P выпуклых многогранников ориентировано в соответствии с конечным числом направлений в том и только в том случае, если существует такое число m, что каждый многогранник из P имеет не более чем m граней. г) Если G — трансляционное полукольцо ограниченных выпуклых множеств в E^n, то замыкание $\overline{R}$ любого множества $R \subseteq G$ есть выпуклый многогранник. Л. М. Абрамов

8272. **Геометрия на множестве с отношением промежуточности. Хасимото** (Betweenness geometry. Hashimoto Junji), Osaka Math. J., 1958, **10**, № 2, 147—158 (англ.)

Пусть для некоторых троек элементов множества R задано отношение (abc), удовлетворяющее следующим требованиям:

1) $(axb) \to (aab)$;
2) $(axb) \to (bxa)$;
3) $(axb), (abx) \to x = b$;
4) $(axb), (ayx) \to (yxb)$;
5) $(axb), (axc), (byc), x \neq a \to (abc)$ или (acb);
6) $(axb), (ayb), (cxd), (cyd), x \neq y \to (axc)$ или (axd);
7) $(abx), (aby), (cxd), (cyd), a \neq b, x \neq y \to (axc)$ или (axd);
8) Для каждой пары точек $x, y \in R$ существуют точки $a, b \in R$ такие, что $(axb), (ayb)$. Тогда множество R называется B_1-пространством. Подмножество S множества R называется подпространством, если а) $a, b \in S$, $(axb) \to x \in S$; б) $a, b \in S$, (xay), (xby), $a \neq b \to x \in S$; в) $a, b \in S$, (xya), (xyb), $a \neq b$, $x \neq b \to x \in S$. Подпространство $S(\Gamma)$ называется подпространством, порожденным подмножеством Γ, если оно является пересечением всех подпространств, содержащих множество Γ. Система точек $x_1, \ldots, x_n$ определяется как линейно независимая, если $x_i \notin S(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ для $i = 1, \ldots, n$. Под прямой понимается подпространство $S(a, b)$, порожденное двумя различными точками. Установлены условия, при которых точка $x \in R$ лежит на прямой $S(a, b)$. Две различные точки B_1-пространства определяют одну и только одну прямую. Прямая может быть характеризована как двусторонне направленное частично упорядоченное множество относительно специального понимания отношения $x \leqslant y$, выраженного в терминах заданного тернарного отношения. Введено определение плоскости $S(a, b, c)$ как подпространства, порожденного тремя линейно независимыми точками a, b, c. Оказалось, что если две различные точки лежат на плоскости, то и все точки прямой, определяемой этими точками, лежат на указанной плоскости.

Моринага и Нисигори (РЖМат, 1955, 2618) охарактеризовали частично упорядоченное множество посредством тернарного отношения промежуточности. Автор дал характеристику с помощью того же отношения двусторонне направленного частично упорядоченного множества. B_2-пространством называется множество R с тернарным отношением (a, b, c) со свойствами 2)—6), указанными выше, и со свойством 1*) : (aab) имеет место для любых элементов $a, b \in R$. Каждое B_2-пространство является B_1-пространством. Прямая в B_2-пространстве выступает уже как (линейно) упорядоченное множество при указанном выше понимании отношения $x \leqslant y$. Предполагается, что на плоскости B_2-пространства выполняется аксиома Паша, сформулированная в следующем виде: Если x и y — различные точки плоскости $S(a, b, c)$ и прямая $S(x, y)$ содержит точку p такую, что (bpc), то прямая $S(x, y)$ содержит точку q, для которой либо (aqb), либо (aqc). В B_2-пространстве с аксиомой Паша три точки, не лежащие на одной прямой, определяют одну и только одну плоскость. Введено понятие, с помощью которого можно сформулировать обычную теорему о разбиении прямою всех точек плоскости на две части. А. А. Виноградов

8273. **Обоснование абсолютной геометрии пространства из понятия отражения. Аренс** (Begründung der absoluten Geometrie des Raumes aus dem Spiegelungsbegriff. Ahrens Joachim), Math. Z., 1959, **71**, № 2, 154—185 (нем.)

Применяя аксиоматическую теорию групп движений с системой отражений классических евклидовых и неевклидовых пространств, автор чисто аналитически излагает абсолютную пространственную геометрию. Как сообщается во введении, эта идея была заимствована у Бахмана, который таким путем построил абсолютную геометрию плоскости (Bachmann F., Die Grundlehren der math. Wiss. 96 (в печати)).

Пусть даны группа $\mathfrak{G}$ и система $\mathfrak{S}$ инволюторных элементов из $\mathfrak{G}$, инвариантная относительно внутренних автоморфизмов группы $\mathfrak{G}$. Два инволюторных элемента Φ и Ψ из $\mathfrak{G}$ удовлетворяют отношению „|“ $(\Phi \mid \Psi)$, если и только если они имеют инволюторное произведение $(\Phi\Psi = \Psi\Phi, \Psi \neq \Phi)$. Если α, β, γ — элементы из $\mathfrak{S}$ и они попарно удовлетворяют отношению „|“, то это записывается так: $\alpha \mid \beta \mid \gamma$. Элементы из $\mathfrak{S}$ называются отражениями в плоскости и обозначаются малыми греческими буквами. Инволюторные элементы из $\mathfrak{G}$, которые являются произведениями типа $\alpha\beta$, называются отражениями в прямой и обозначаются малыми немецкими буквами. Инволюторные элементы из $\mathfrak{G}$, которые являются произведениями типа $\alpha\beta\gamma$ с $\alpha \mid \beta \mid \gamma$, называются отражениями в точке и обозначаются большими латинскими буквами. Группой движений метрического пространства называется пара $\mathfrak{G}, \mathfrak{S}$, удовлетворяющая следующей системе аксиом: A1. Для P, Q, R найдется такое ε, что $\varepsilon \mid P, Q, R$. A2. Из $P \neq Q$, $\alpha \neq \beta$; $P, Q \mid \alpha, \beta, \gamma$; $R \mid \alpha, \beta$ следует $R \mid \gamma$. A3. Из $P \neq Q$; $\alpha, \beta, \gamma \mid P, Q$ следует $\alpha\beta\gamma \in \mathfrak{S}$. A4. Для каждого ε найдется P, что $P \mid \varepsilon$. A5. Из $\pi \mid \vartheta$; $\alpha, \beta, \gamma \mid \pi, \vartheta$ следует $\alpha\beta\gamma \in \mathfrak{S}$. A6. Если $P \mid \alpha, \beta$, то существует Q с $PQ \neq QP$ и $Q \mid \alpha, \beta$. Каждой группе движений метрического пространства приписывается метрическое пространство, в котором определяются отношения инцидентности и ортогональности. Изучая метрическое пространство, автор, во-первых, с помощью аксиомы полярного тетраэдра (существуют четыре попарно перпендикулярные плоскости) отделяет эллиптическое пространство от евклидова и гиперболического пространств; во-вторых доказывается, что любое метрическое пространство является подпространством проективного пространства; в-третьих, доказывает, что классическое евклидово пространство вмещается в пространство, в котором выполняется так называемая аксиома евклидовой метрики (R), а неевклидовы пространства — в пространство с аксиомой неевклидовой метрики (не R). Изложение в работе ясное, последовательное и строгое. П. М. Олоничев

8274. **Подобие и дифференцируемость. Буземан** (Similarities and differentiability. Busemann Herbert), Tohoku Math. J., 1957, **9**, № 1, 56—67 (англ.)

В полном метрическом пространстве R с расстоянием xy рассматривается отображение α на метрическое пространство R'. Если $x \in R$, то $x \to x\alpha = x' \in R'$. Если для любой точки $p \in R$ $\lim\limits_{x \to p,\ y \to p} \frac{x\alpha y\alpha}{xy} = k$, где k — постоянная, то α называется локальным подобием. Доказывается, что для любого $p \in R$ существует шар $S(p, \varepsilon)$ с

центром p и радиуса ε, который отображается на шар $S(p\alpha, k\varepsilon) \in R'$ так, что $x'y' = kxy$ для любой пары точек $x, y \in S(p, \varepsilon)$. Далее вводится понятие G-пространства, в котором каждой паре точек a, q и некоторому множеству неотрицательных чисел β соответствует множество точек $a(\beta, q)$ таких, что $qa(\beta, q) = \beta qa$, $qa(\beta, q) + a(\beta, q)a = qa$ при $\beta < 1$ и $qa + aa(\beta, q) = qa(\beta, q)$ при $\beta > 1$. Если $0 < \beta < 1$, то $a(\beta, q)$ существует, но может быть не единственным; если $\beta > 1$, то $a(\beta, q)$ может не существовать, но является единственным. Для каждой точки p и любого числа $M > 0$ имеется такое $\beta > 0$, что для любой пары точек a и q шара $S(p, \rho)$ и любого неотрицательного $\beta < M$ существует единственное $a(\beta, q)$. При выполнении условия D_p:

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{a_\nu(\beta_\nu, p)\, b_\nu(\beta_\nu, p)}{\beta_\nu\, a_\nu\, b_\nu} = 1,$$

если $a_\nu \to p$, $b_\nu \to p$, $0 < \beta_\nu < M$, G-пространство R называется дифференцируемым в точке p. Если G-пространство дифференцируемо в p, то существует величина $m(a, b) = \lim_{\beta \to 0^+} \frac{a(\beta, p)\, b(\beta, p)}{\beta}$, причем $m(p, a) = pa$, $\lim_{\substack{a_\nu \to p \\ b_\nu \to p}} \frac{m(a_\nu, b_\nu)}{a_\nu\, b_\nu} = 1$, $m(a(\beta, p), b(\beta, p)) = \beta m(a, b)$. Если принять $m(a, b)$ за новую меру расстояния между точками a и b сферы $S(p, \delta)$, то метрика $m(a, b)$ эквивалентна метрике ab, так как $\frac{1}{2} \leqslant \frac{m(a, b)}{ab} < \frac{3}{2}$. Положив $a(\beta) = a(\beta, p)$, мы расширяем пространство R, присоединяя к нему точки $a(\beta)$ при $\beta > 1$, если в $Ra(\beta)$ не существует. Метризация расширенного пространства совершается с помощью равенства $m(a, (\beta_1), a_2(\beta_2)) = \alpha m\left(a_1\left(\frac{\beta_1}{\alpha}\right), a_2\left(\frac{\beta_2}{\alpha}\right)\right)$, где α настолько велико, что $\frac{\beta_\nu}{\alpha} \leqslant \delta$. Построенное таким путем пространство T_p называется нормальным тангенциальным пространством в точке p. Доказывается, что для любого $\rho > 0$ и любых двух точек $a, b \in T_p$ существует такая точка c, что $m(a, c) = \rho\, m(a, b)$ и либо $m(a, c) + m(c, b) = m(a, b)$, либо $m(a, c) + m(a, b) = m(b, c)$. Далее вводится следующее допущение:

(Rp). Если для четырех точек a, b, c_1, c_2 шара $S(p, \delta)$, где $a \neq b$, $m(a, b) + m(b, c_1) = m(a, c_1)$ и $m(b, c_1) = m(b, c_2)$, то $c_1 = c_2$. Условие Rp называется условием регулярности. К этим допущениям присоединяется условие непрерывной дифференцируемости в точке p:

$$\mathrm{CD}_p\colon \lim_{\nu \to \infty} \frac{a_\nu(\beta_\nu, p_\nu)\, b_\nu(b_\nu, p_\nu)}{\beta_\nu\, a_\nu\, b_\nu} = 1,$$

если $a_\nu \to p$, $b_\nu \to p$, $a_\nu \neq b_\nu$, $p_\nu \to p$, $0 < \beta_\nu < M$.

Доказывается следующая теорема: Если G — пространство непрерывно дифференцируемо и регулярно в точке p, то нормальная тангенциальная метрика пространства в точке p является метрикой Минковского. Отсюда следует, что окрестность точки p гомеоморфна пространству E_n, где n — некоторое конечное натуральное число.

Ю. Л. Рабинович

8275. Об отношении конгруэнтности в конечных геометриях. Кустаанхеймо (On the relation of congruence in finite geometries. Kustaanheimo Paul), Rend. mat. e applic., 1957, **16**, № 3-4, 286—291 (англ.)

В конечной евклидовой плоскости над полем Галуа GF_q, $q = p^h$, $p \neq 2$, вводится отношение конгруэнтности с помощью следующей системы аксиом 1 — 5 (конгруэнтность отрезков AB и CD обозначается ниже $AB = CD$):

1. Из $AB = CD$ следует $BA = CD$ и $CD = AB$. Из $AB = CD$ и $CD = EF$ следует $AB = EF$.

2. Если AB параллельно CD, то $AB = CD$ в том и только том случае, когда либо AC параллельно BD, либо AD параллельно BC.

3. Если четыре точки A, B, C, D коллинеарны, четыре других точки A', B', C', D' также коллинеарны, и отрезки AA', BB', CC', DD' параллельны, то тогда из $AB = A'B'$ следует $CD = C'D'$.

4. Если A, B, C коллинеарны и A', B', C' коллинеарны, то из $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, $AD = A'D'$ следует $CD = C'D'$.

5. Существуют такие четыре точки A, B, C, D, что для любых двух точек E, F можно найти такую третью точку G, что E, F, G будут коллинеарны и либо $AB = EG$, либо $CD = EG$.

Соотношение конгруэнтности оказывается проверяемым, если можно построить два таких точечных множества $\{X\}$, $\{Y\}$, что $OX = AB$ для всех X, и $OY = CD$ для всех Y, где A, B, C, D, например, четыре точки, существование которых постулируется аксиомой 5. Названные точечные множества называются измеряющими линиями. Пусть $\{X\}$ есть измеряющая линия, для всякой точки X которой $OX = AB$. Доказывается, что всякая прямая, проходящая через O, пересекает измеряющую линию ровно в двух точках, либо не пересекает ее вовсе. Далее, каждая прямая, не проходящая через O, пересекает измеряющую линию не более чем в двух точках. Таким образом, измеряющая линия является K-дугой, по терминологии Сегре. Известно, что любая K-дуга содержит не более $q + 1$ точек в случае $p \neq 2$. Доказывается, что любая измеряющая линия содержит ровно $q + 1$ точек, т. е. является $(q + 1)$-дугой или овалом, по терминологии Сегре. Сегре доказано, что каждый овал есть коническое сечение. Введем систему координат x, y с началом O. Тогда уравнения измеряющих линий запишутся в виде

$$ax^2 + bxy + cy^2 = h, \tag{1}$$

$$dx^2 + exy + fy^2 = k. \tag{2}$$

Доказывается, что ни одна прямая, проходящая через O, не пересекает одновременно обеих измеряющих линий. С помощью линейного преобразования координат можно привести левые части (1) и (2) к некоторой стандартной форме, например, $x^2 - ky^2$, где k есть некоторый неквадрат из GF_q. Используя стандартные длины AB и CD, можно правые части уравнений привести, соответственно, к 1 и k, где k — данный неквадрат. Тогда вместо (1) и (2) мы получим уравнения $x^2 - ky^2 = 1$ и $x^2 - ky^2 = k$. Итак, пять перечисленных аксиом определяют единственным образом отношение конгруэнтности с точностью до некоторого изоморфного отображения, сохраняющего отношения инцидентности и конгруэнтности.

В случае конечной евклидовой плоскости над полем Галуа GF_q, $q = 2h$, вводится система следующих аксиом $1'$—$5'$. $1'$ совпадает с 1. $2'$ получается из 2, если конец читать: „..., когда AC параллельно BD“. $3'$ совпадает с 3. $4'$ совпадает с 4. $5'$. Для любых четырех точек A, B, C, D найдется такая точка E, что C, D, E будут коллинеарны и $AB = CE$. В рассматриваемом случае будет только одна измеряющая линия, которую можно, например, определить как множество всех точек X, для которых $OX = AB$, где O, A, B — три произвольные точки и $A \neq B$. Каждая прямая, проходящая через O, пересекает эту измеряющую линию ровно в одной точке. Каждая прямая, не проходящая через O, пересекает измеряющую линию не более чем в двух точках. Точки измеряющей линии вместе с точкой O

образуют $(q+2)$-дугу, Система аксиом $1'-5'$ не является мономорфной. Вопрос о том, какие аксиомы нужно присоединить к $1'-5'$, остается открытым.

Ю. А. Шуб-Сизоненко

8276. Об отношении порядка в конечных геометриях. **Кустаанхеймо** (On the relation of order in finite geometries. Kustaanheimo Paul), Rend. mat. e applic., 1957, **16**, № 3-4, 292—296 (англ.)

Отношение порядка может быть введено в конечную евклидову геометрию произвольного числа измерений над полем Галуа GF_q, $q=p^h$, $p\neq 2$, с помощью следующих аксиом 1 — 3 (предложение „точка B лежит между точками A и C" мы записываем „ABC").

1. Из ABC следует, что A, B, C коллинеарны. Существуют такие три точки A, B, C, что ABC.

2. Если ABC, AA', BB', CC' параллельны и A', B', C' коллинеарны, то $A'B'C'$.

3. Если A, B, C, D — четыре различные коллинеарные точки, то либо имеют место ровно два из предложений ADB, BDC, CDA, либо ни одно из них.

Пусть z_A, z_B, z_C — координаты точек A, B, C. Справедливость предложения ABC зависит только от отношения $t_{ABC}=(z_A-z_B):(z_C-z_B)$. Доказывается, что ABC тогда и только тогда, когда t не есть квадрат из GF_q. Из сказанного следуют теоремы: 1) ABC влечет CBA; 2) ABA никогда не имеет места.

В случае $q=2h$ аксиомы 1 — 3 ведут к противоречию, ибо все элементы из GF_q теперь являются квадратами. Вводится новая система аксиом, состоящая из прежних аксиом 1 — 2 и добавленных в качестве новых аксиом теорем 1) и 2). Справедливость предложения ABC опять зависит лишь от t_{ABC}. Определим отображение $g(t)$ поля GF_q на GF_2 так, что $g(t_{ABC})=1$ или 0 в случаях, когда ABC имеет место или, соответственно, не имеет места. Введем симметризованное отношение $s_{ABC}=t_{ABC}+t_{CBA}$. Тогда мы будем иметь $g(t)=g(s)=\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}q-1} b_\nu s^\nu + a_0$, где $a_0=0$, а коэффициенты b_ν остаются неопределенными. Для их определения нужно ввести новые аксиомы, связанные с некоторой конфигурацией коллинеарных точек и с тождествами для симметризованных отношений, порожденных этой конфигурацией. Вопрос о пополнении системы аксиом остается пока открытым.

Ю. А. Шуб-Сизоненко

8277. Неравенство для матриц инциденций. **Исбелл** (An inequality for incidence matrices. Isbell J. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 2, 216—218 (англ.)

Для множеств точек и их подмножеств, называемых линиями, устанавливаются следующие две теоремы.

1. Пусть множество M состоит из v точек, а линии удовлетворяют таким условиям: а) любые две линии имеют не менее чем λ общих точек; б) число линий, содержащих данную точку, одинаково для всех точек множества M; в) ни одна из линий не содержит более чем k точек (v, k, λ — натуральные числа). Тогда $\lambda(v-1)\geqslant k^2-k$. При $\lambda=1$ и $k>2$ мы имеем проективную плоскость с конечным числом точек.

2. Если $\lambda\geqslant 0$, то в множестве M нельзя выбрать более чем v различных непустых его подмножеств так, чтобы пересечение любой пары из этих подмножеств содержало в точности λ точек.

Г. Б. Гуревич

8278. Связь между свойствами касания и соприкасания кривой или поверхности и алгеброй бидуальных, тридуальных и трипотенциальных чисел. **Спампинато** (Relazione fra le proprietà di contatto e di osculazione di una curva o superficie con le algebre dei numeri biduali, triduali e tripotenziali. Spampinato Nicolò. Ricerca, 1955 (1956), **6**, № 4, 3—10) (итал.)

8279. О геометрии обобщенных пространственных элементов пространства P_n и соответствующих J-многообразий. **Бурау** (Zur Geometrie der verallgemeinerten Raumelemente des P_n und der zugehörigen J-Mannigfaltigkeiten. Burau Werner), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1958, **22**, № 3-4, 141—157 (нем.)

Исследуются некоторые новые свойства многообразий $J^{h_1\ldots h_s}_{n,n_1\ldots n_s}$, где n_i и h_i — целые числа и притом $n>n_1>n_2>\ldots>n_s\geqslant 0$. Определение J-многообразий, которые являются обобщением многообразий Веронезе V_n^k и Грассмана $G_{n,k}$, автором дано в его предыдущей работе (РЖМат, 1956, 2411). Многообразие $G^{(h)}_{n,k}$, прямое обобщение грассманова многообразия $G_{n,k}$, есть $J^h_{n,k}$ и его можно истолковать как множество отображений всех точек $G_{n,k}$ на $V_m^n\left(m=\left|\begin{matrix}n+1\\k+1\end{matrix}\right|-1\right)$. Размерность $N^h_{n,k}$ многообразия $G^h_{n,k}$ дается уравнением

$$N^h_{n,k}=\frac{1!\,2!\ldots k!}{(n-k)!\ldots n!}\,\frac{(h+n-k)!\ldots(h+n)!}{h!\ldots(h+k)!}-1.$$

Каждое из s многообразий $G^{(h_i)}_{n,k}$ представляет проективное параметрическое пространство $P^{(i)}_{N_i}$ размерности $N_i=N^{h_i}_{n,n_i}$. Пространству $P^{(i)}_{N_i}$ соответствует многообразие Сегре $S_{N_1\ldots N_s}$, в котором находится многообразие Сегре $\pi^{h_1\ldots h_s}_{n,n_1\ldots n_s}$ (произведения всех $G^{(h_i)}_{n,n_i}$). $S_{N_1\ldots N_s}$ и $\pi^{h_1\ldots h_s}_{n,n_1\ldots n_s}$ представляют то же самое пространство $\langle\,\pi^{h_1\ldots h_s}_{n,n_1\ldots n_s}\,\rangle$. Многообразие J является линейным сечением многообразия π.

В работе показано, что специальным однородным степени h_i формам Φ от координат X_{n_i} комплексного проективного пространства X_n соответствуют гиперплоскости многообразий $S_{N_1\ldots N_s}$, $\pi^{h_1\ldots h_s}_{n,n_1\ldots n_s}$, $J^{h_1\ldots h_s}_{n,n_1\ldots n_s}$ двойственных образов:

$$\widehat{S}_{N_1\ldots N_s},\quad \widehat{\pi}^{\,h_1\qquad\qquad h_s}_{n,n-n_1-1,\ldots,n-n_s-1},$$

$$\widehat{J}^{\,h_s\qquad\qquad h_1}_{n,n-n_s-1,\ldots,n-n_1-1}.$$

Гиперплоскости $\widehat{J}^{\,h_s\qquad\qquad h_1}_{n,n-n_s-1,\ldots,n-n_1-1}$ в сечении имеют общее пространство $C^{h_1\ldots h_s}_{n,n_1\ldots n_s}$. Дается соответствие

$$\langle\,\pi^{h_1\ldots h_s}_{n,n_1\ldots n_s}\,\rangle=\langle\,J^{h_1\ldots h_s}_{n,n_1\ldots n_s}\,\rangle\cup C^{h_1\ldots h_s}_{n,n_1\ldots n_s}.$$

Далее намечен метод расчленения пространства C по группе Γ_n в неприводимые подпространства, что окончательно решено в случае $C^{1\ 1}_{n,n_1,n_2}$. Кроме того, алгебраическое многообразие $J^{h_1\qquad h_s}_{n,n_1\ldots n_s}$ определяется как образ корней некоторого простого идеала. Доказано, что соответствующий простой идеал всегда имеет квадратичный базис. Исследуются также такие J-многообразия, для которых существуют главные корреляции. Это может быть только при $n_i=n-n_{s-i+1}$, $h_i=h_{s-i+1}$,

$i=1,2,\ldots,s$. Указаны также случаи, когда главная корреляция превращается в нулевую корреляцию или полярность. В конце работы даны некоторые примеры обобщения J-многообразий. П. Ю. Катилюс

8280. **Об основной формуле выборки масс с точки зрения интегральной геометрии. Масуяма** (On a fundamental formula in bulk sampling from the viewpoint of integral geometry. Masuyama Motosaburo), Repts Statist. Applic. Res., Union Japan Scientists and Engrs, 1956, 4, № 3, 85—89 (англ.)

Пусть $F=\iint_T f(P)d\sigma$, где $f(P)=0$ вне области T; e — фиксированное направление; $w(s)$ — неотрицательная функция такая, что

$$\infty > W=\int_0^L w(s)ds>0;\ J(P)=\int_0^L w(s)\,f(P+se)\,ds.$$

Доказывается формула

$$F=\iint_{T'} J(P)\,d\sigma, \qquad (1)$$

где T' получается из T параллельным перемещением T в направлении e на расстояние L. Указаны некоторые обобщения формулы (1) и вытекающие из них (известные) результаты интегральной геометрии.

Г. И. Дринфельд

ВЫПУКЛЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

8281. **Множества со связными сферическими сечениями. Лумер** (Sets with connected spherical section. Lumer Gunter. Soc. Parana. Mat. Anuário, 1955, 2, 12—17) (порт.)

Пусть S — замкнутая поверхность в E_3. Если пересечение S с произвольной сферической поверхностью связно, то и сама поверхность S — сфера. L. A. Santaló

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 6, 503.

8282. **Об аффинных эксцентриситетах выпуклых тел. Лейхтвейсс** (Über die affine Exzentrizität konvexer Körper. Leichtweiss Kurt), Arch. Math., 1959, 10, № 2-3, 187—199 (нем.)

Рассмотрим в n-мерном евклидовом пространстве R_n некоторое выпуклое ограниченное тело B с внутренними точками. Пусть $R(B)$ и $r(B)$ — радиусы сфер, описанной вокруг B и вписанной в B, а $D(B)$ и $\Delta(B)$ — диаметр и ширина тела B. Автор рассматривает следующие аффинные инварианты: аффинный радиальный эксцентриситет $\alpha(K_n)=\inf\limits_{B\in K_n}\dfrac{R(B)}{r(B)}$ и аффинный эксцентриситет ширины $\beta(K_n)=\inf\limits_{B\in K_n}\dfrac{D(B)}{\Delta(B)}$, где K_n — класс всех выпуклых тел, аффинно эквивалентных с B. Относительно $\alpha(K_n)$ автором доказывается следующая

Теорема 1. Для любого класса K_n n-мерных выпуклых тел аффинный радиальный эксцентриситет $\alpha(K_n)$ удовлетворяет неравенству

$$1\leqslant\alpha(K_n)\leqslant n, \qquad (1)$$

и каждое значение, удовлетворяющее этому неравенству, является аффинным радиальным эксцентриситетом некоторого класса аффинно эквивалентных выпуклых тел. При этом значение $\alpha(K_n)=1$ характеризует класс эллипсоидов, а $\alpha(K_n)=n$ — класс симплексов.

Для $\beta(K_n)$ автор дает новое доказательство следующего неравенства, полученного ранее другими авторами:

$$1\leqslant\beta(K_n)\leqslant\sqrt{n}. \qquad (2)$$

Поскольку при симметризации относительно точки диаметр и ширина выпуклого тела B не меняются, то каждый класс K_n можно заменить таким классом $\widetilde{K}_n$ центрально симметричных выпуклых тел, что $\beta(K_n)=\beta(\widetilde{K}_n)$. Делая такую замену и замечая, что $\beta(K_n)=\alpha(\widetilde{K}_n)$, автор проводит доказательство неравенства (2) по тому же плану, что и доказательство теоремы 1. Равенство $\beta(K_n)=1$ характеризует класс тел постоянной ширины, равенство $\beta(K_2)=\sqrt{2}$ характеризует класс параллелограммов, а $\beta(K_3)=\sqrt{3}$ — класс правильных гексаэдров и октаэдров. Автор показывает, что при $n>3$, кроме класса параллелепипедов W_n и класса W_n^*, полярно двойственного к W_n относительно единичной сферы, существуют еще различные классы тел K_n, для которых $\beta(K_n)=\sqrt{n}$ (такое тело можно, например, получить, отрезав от параллелепипеда симплекс, построенный на его ребрах, исходящих из одной вершины). Рассматриваются некоторые применения результатов, указанных выше, а также их обобщения. А. Л. Вернер

8283. **Выпуклые несимметричные пирамиды и конусы. Коз** (Pyramides et cônes convexes asymétriques. Coz Marcel), C. r. Acad. sci., 1959, 248, № 26, 3682—3684 (франц.)

Отправляясь от работы Булигана (РЖМат, 1959, 8471), автор рассматривает явные представления пирамид с полярно параллельными противолежащими сторонами горизонтальных сечений в виде $\zeta=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,|\,\xi\sin\alpha_i-\eta\cos\alpha_i-\mu_i\zeta\,|$. Здесь плоскости $\xi\sin\alpha_i-\eta\cos\alpha_i=\mu_i\zeta$ суть диагональные плоскости, соединяющие противоположные ребра. Налагаемое на пирамиду требование выпуклости и условие, чтобы она имела единственную полость и охватывала ось $O\zeta$, заставляют ограничиваться случаем, когда все $\lambda_i>0$, и $1-\sum_{i=1}^{n}|\,\lambda_i\mu_i\,|>0$. Аналогичное представление для конуса имеет вид $\zeta=\int_0^{2\pi}|\,\xi\sin\alpha-\eta\cos\alpha-\mu(\alpha)\zeta\,|\,d\varphi(\alpha)$, с возрастающей функцией $\varphi(\alpha)$ и условием $1-\int_0^{2\pi}|\,\mu(\alpha)\,|\,d\varphi(\alpha)>0$. Связанные с этим геометрические рассмотрения позволяют получить следующее утверждение. Пусть $rf(u)=1$ — полярное уравнение выпуклой кривой, $\mu(\alpha)$ — расстояние от начала координат до хорды, сединяющей пару точек кривой с параллельными касательными и имеющей полярный угол α. Тогда интегральное уравнение

$$f(u)=\int_0^{2\pi}|\,\sin(u-\alpha)-\mu(\alpha)f(u)\,|\,d\varphi(\alpha)$$

имеет своим решением единственную возрастающую функцию $\varphi(\alpha)$. В. В. Рыжков

8284. **К теории выпуклых многогранников. Нефедьев Г. Н.**, Тр. Уральского политехн. ин-та, 1958, сб. 74, 141—148

Доказываются некоторые теоремы относительно выпуклых многогранников M, заданных в n-мерном евклидовом пространстве E_n как пересечение полупространств

$$n_j x\leqslant h_j \quad (j=1,2,\ldots,m). \qquad (1)$$

Например, пусть r — ранг системы (1), δ — размерность соответствующего многогранника M, а ω — некоторое число такое, что $n-r<\omega<\delta$, тогда: 1) многогранник M имеет грани размерности ω; 2) для каждой грани размерности ω существуют содержащаяся в ней и содержащая ее грани размерности $\omega-1$ и $\omega+1$ соответственно; 3) если многогранник M лежит в δ-мерной гиперплоскости $n_{j_k}x=h_{j_k}$ $(k=1,2,\ldots,n-\delta)$, p-е неравенство системы (1) ра

является следствием остальных и вектор n_p не представим в виде линейной комбинации векторов $n_{j_1}, n_{j_2}, \ldots, n_{j_{n-\delta}}$, то грань $M(p)$ — пересечение многогранника M с гиперплоскостью $n_p x = h_p$ — имеет размерность $\delta - 1$. Г. Ш. Рубинштейн

8285. Новая концепция аффинной ширины овальных тел. Санчо-де-Сан-Роман (Un nuevo concepto de anchura afín de cuerpos ovales. Sancho de San Román J.), Rev. Real acad. cienc. exact., fís. y natur. Madrid, 1957, 51, № 3, 229—244 (исп.)

Автор называет аффинной шириной гиперовалоида Ω n-мерного вещественного аффинного пространства в точке P гиперовалоида максимальный из объемов $(n+1)$-эдра, вписанного в Ω и имеющего P одной из вершин. Необходимым и достаточным условием того, чтобы аффинная ширина Ω была постоянной, является параллельность гиперплоскости, касательной к Ω в P, грани упомянутого $(n+1)$-эдра, противоположной P. Гиперэллипсоид является телом постоянной аффинной ширины и $\sum K_i^{-\frac{2}{n+1}} = \text{const}$, где K_i — полные кривизны гиперэллипсоида в вершинах вписанного $(n+1)$-эдра максимального объема. Справедливо также равенство $\sum p_i^{-2} = \text{const}$, где p_i — расстояния центра гиперэллипсоида от плоскостей, касательных к нему в вершинах того же $(n+1)$-эдра. Г. И. Дринфельд

8286. Обобщение одного геометрического неравенства Феллера. Сантало (Generalizacion de una desigualdad geometrica de Feller. Santaló L. A.), Rev. Unión mat. argent. y Asoc. fís. argent., 1954, 16, № 2, 78—81 (исп., рез. англ.)

Пусть M — мера области D n-мерного пространства постоянной кривизны $K = k^2$, содержащейся в неевклидовой сфере радиуса α. Если пересечение D с каждым линейным подпространством r измерений имеет меру $\leqslant \delta$, то справедливо неравенство Уено—Хомбу—Наиго:

$$M \leqslant \delta \frac{\Gamma\left(\frac{n-r}{2}\right)}{2\pi \frac{n-r}{2}} K^{\frac{r+1-n}{2}} \int_0^\alpha \cos^r k\rho \sin^{n-r-1} k\rho d\rho \qquad (1)$$

при $r = 1$, являющееся неравенством Феллера (Feller W., Duke Math. J., 1942, 8, 5—89). Автор приводит простое доказательство неравенства (1), а для случая $r = 1$ без предположения постоянства кривизны, для риманова пространства, получает неравенство $M \leqslant \frac{\delta\pi}{n-1} \times \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} F$, где F — площадь выпуклой гиперповерхности, содержащей D. Г. И. Дринфельд

8287. Доказательство единственности решения проблемы Минковского для выпуклых поверхностей. Чжэнь Шэн-шень (A proof of the uniqueness of Minkowski's problem for convex surfaces. Chern Shiing-shen), Amer. J. Math., 1957, 79, № 4, 949—950 (англ.)

Устанавливается, что задание гауссовой кривизны поверхности как функции нормали к ней определяет поверхность однозначно с точностью до параллельного переноса в классе замкнутых выпуклых дважды непрерывно дифференцируемых поверхностей трехмерного евклидова пространства, имеющих всюду положительную гауссову кривизну. Как известно, соответствующая теорема доказана для замкнутых выпуклых поверхностей, не подчиненных никаким требованиям регулярности. (См., например, Александров А. Д., «Выпуклые многогранники», Гостехиздат, 1950, стр. 343); при этом доказательство ее опирается на некоторые неравенства из теории смешанных объемов. Доказательство, приведенное в реферируемой работе, отличается от упомянутого выше доказательства общей теоремы по существу только тем, что все нужные неравенства автор получает, минуя теорию смешанных объемов, из некоторой интегральной формулы, вывод которой дается тут же. Ю. А. Волков

См. также: 7171 К, 7379, 7380, 7639, 7784, 7895, 8101.

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Редактор *В. К. Саульев*

8288. Метод приближенного решения уравнений, порядок которых превышает возможности моделирующих установок. Островский Г. М., Автоматика и телемеханика, 1959, 20, № 8, 1129—1130

Система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (1)$$

разбивается на две части так, что порядок первой из них $n < m_1$, а второй — $m - n < m_1$, причем $m_1 < m$ есть высший порядок системы, которая может быть решена на данной моделирующей установке. Рекомендуется подбирать обе части так, чтобы каждая из них была связана с другой наименьшим количеством переменных. Рассмотрен случай, когда из уравнений первой системы во вторую входит одна переменная x_1, а из второй в первую — переменная x_{n+1}. Предполагается, что система устойчива. На модели набирается группа уравнений первой части, в которой „лишняя" неизвестная x_{n+1} заменяется произвольной функцией $x_{n+1}^0(t)$. Решение на модели дает первое приближение искомых функций $x_1^{(1)}(t), x_2^{(1)}(t), \ldots, x_n^{(1)}(t)$. При наборе второй группы уравнений неизвестная $x_1(t)$ заменяется найденной функцией $x_1^{(1)}(t)$, после чего установка доставляет первое приближение

$$x_{n+1}^{(1)}(t), x_{n+2}^{(1)}(t), \ldots, x_m^{(1)}(t).$$

Затем снова набирается первая группа. В ней используется $x_{n+1}^{(1)}(t)$ и т. д. Указывается, что для ряда случаев можно строго доказать сходимость такого процесса к искомому решению. А. Б. Штыкан

8289. Методика решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами при помо-

щи моделирующих устройств. Матыаш И., Автоматика и телемеханика, 1959, 20, № 7, 839—847 (рез. англ.).

Описаны два метода решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и соответствующие структурные схемы набора на моделирующих устройствах, состоящих только из интеграторов, сумматоров и блоков переменных коэффициентов. Отмечено, что они не требуют применения дифференциаторов, являющихся, как правило, источниками существенных погрешностей. Приведены примеры.

А. Б. Штыкан

8290. **Вклад в метод разностных уравнений. Херш** (Contribution à la méthode des équations aux différences. Hersch Joseph), Z. angew. Math. und Phys., 1958, 9a, № 2, 129—180 (франц.; рез. англ.)

В первой части работы автор занимается построением для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений $L[\varphi] = 0$ точных разностных уравнений, т. е. уравнений, которым точно удовлетворяют фундаментальные решения дифференциального уравнения. При этом разностное уравнение рассматривается как линейная комбинация дифференциальных уравнений, отнесенных ко всем точкам рассматриваемого интервала, т. е. предполагается, что скалярное произведение $0 = \langle T, L[\varphi]\rangle = \langle \bar{L}[T], \varphi\rangle$ представимо в виде $L_h^* \varphi = \alpha_0 \varphi(x_0) + \alpha_h \varphi(x_0 + h) + \alpha_{-h}(x_0 - h) + \ldots$, где T — некоторая функция распределения, $\bar{L}$ — сопряженный с L оператор, L_h^* — разностный оператор. Таким образом $\bar{L}[T] = L_h^* = \alpha_0 \delta_{(x_0)} + \alpha_h \delta_{(x_0+h)} + \alpha_{-h}\delta_{(x_0-h)} + \ldots$ есть линейная комбинация мер Дирака. Граничные условия по возможности заменяются такими разностными уравнениями, которым также удовлетворяют фундаментальные решения. Классические разностные уравнения обычно представляют собой первые члены разложения точных разностных уравнений, полученных автором.

Далее автор излагает так называемый рекуррентный метод, не требующий предварительного знания решений дифференциального уравнения. Рекуррентный метод состоит из трех этапов: а) рекуррентный переход от L_h^* к $L_{h|2}^*$; строятся L_h^* и $L_{h|2}^*$ таким образом, чтобы соответствующие решения u_h и $u_{h|2}$ уравнений $L_h^*[u_h] = 0$ и $L_{h|2}^*[u_{h|2}] = 0$ совпадали в узлах сетки с шагом h; б) разрешимость рекуррентности: коэффициенты оператора L_h^* должны быть определены так, чтобы рекуррентный переход имел место; в) при $h \to 0$ должно быть $L_h^* \to L$. На практике осуществляется обычно переход от меньшего шага к большему, причем оператор L_{2h}^* строится как линейная комбинация нескольких операторов L_h^*.

Во второй части рассматриваются более сложные дифференциальные уравнения, в частности дифференциальные уравнения с достаточно регулярными коэффициентами, мало изменяющимися в каждом малом интервале, так что «невозмущенное» уравнение имеет постоянные коэффициенты в каждом интервале. К уравнениям такого вида применяется метод локальных возмущений, состоящий в построении системы разностных «невозмущенных» уравнений для каждого интервала. Решение такой системы является более точным, чем решение полученного обычным методом «невозмущенного» уравнения. Этот метод применяется к решению граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Числовые примеры показывают хорошие результаты по сравнению с методом конечных разностей и многоточечным методом.

При решении предельных задач и задач на собственные значения для уравнений в частных производных построение точных разностных уравнений невозможно, так как рекуррентный переход в большинстве случаев осуществляется приближенно. Проводится сравнение с классическим разностным и многоточечным методами, говорящее в пользу метода автора.

Примечание референта. Построением разностных уравнений, которым удовлетворяет ряд частных решений дифференциального уравнения в частных производных, занимался Д. Ф. Давиденко (см., например, РЖМат, 1957, 5931). Г. И. Бирюк

8291. **О собственных значениях дифференциального уравнения конвекционной теплопередачи. Феттис** (Concerning the eigenvalues of a differential equation in convective heat transfer. Fettis Henry E.), Quart. Appl. Math., 1956, 14, № 2, 198—200 (англ.)

В граничной задаче

$$y'' + \lambda(1 - x^2)\, y = 0, \qquad (1)$$

$$y(\pm 1) = 0 \qquad (2)$$

вычисление первого собственного значения λ_1 производилось так: $y(x, \lambda)$, удовлетворяющая (1), разлагалась в степенной ряд по λ, затем этот ряд усекался, и из (2) вычислялось λ_1. М. Л. Бродский

8292. **Об одном приближенном методе решения обыкновенных линейных интегро-дифференциальных уравнений. Кривошеин Л. Е.**, В сб.: Материалы 8-й Научн. конференции профессорско-преподават. состава Физ.-матем. фак. (Кирг. ун-т). Фрунзе, 1959, 35—38

Излагается, основанный на методе близкого дифференциального оператора, прием построения приближенного решения интегро-дифференциального уравнения (и.-д. у.)

$$L[y] = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\, P[y]\, dt, \qquad (1)$$

удовлетворяющего начальным условиям:

$$y^{(i)}(c) = r_i, \ (i = 0, 1, \ldots, n-1), \qquad (2)$$

где

$$L[y] \equiv y^{(n)}(x) + \sum_1^n a_i(x)\, y^{(n-i)}(x);$$

$$P[y] \equiv \sum_0^m b_i(t)\, y^{(m-i)}(t); \quad n \geqslant m; \quad c \in [a, b]$$

— известные, непрерывные для всех $x, t \in [a, b]$ функции.

Приводится формула для оценки погрешности. Указывается, что аналогичным образом решается задача (1), (2) для линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра и что изложенный прием приближенного решения одного такого уравнения тем же путем переносится и на решение задачи Коши для системы линейных интегро-дифференциальных уравнений. И. Ф. Шелихова

8293. **Об одном приближенном методе решения линейных интегральных уравнений. Молокович Ю. М.**, Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 5, 164—170

Излагается метод приближенного решения интегральных уравнений второго рода типа Вольтерра и Фредгольма, являющийся в некотором смысле видоизменением «метода осреднения функциональных поправок» (см., например, РЖМат, 1959, 5258). В отличие от последнего параметры α_n определяются из условия минимума среднеквадратичной невязки, получаемой в результате подстановки n-го приближения в интегральное уравнение. Для неоднородного линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x y(\xi) K(x, \xi) \rho(\xi)\, d\xi,$$

где $\rho(x)$ — некоторая положительная вещественная непрерывная функция, $f(x)$ и $K(x, \xi)$ вещественны и принадлежат пространству $L^2(a, b)$, $a \leqslant \xi \leqslant a+h \leqslant a+H=b$, получено достаточное условие сходимости и дается оценка погрешности решения, найденного по предлагаемому методу. Отмечается, что аналогичные формулы имеют место и для неоднородного линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b y(\xi) K(x, \xi)\, d\xi.$$

Указывается, что предлагаемый метод дает меньшую погрешность, чем метод осреднения функциональных поправок. И. Ф. Шелихова

8294. **О приближенном решении интегральных уравнений. Коробов Н. М.**, Докл. АН СССР, 1959, **128**, № 2, 235—238

Дается приложение теоретико-числовых методов к вопросу о приближенном решении кратных интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода. Предполагается, что знаменатель Фредгольма $D(\lambda)$ отличен от нуля и что свободный член и ядро уравнения принадлежат соответственно классам $E_s(\alpha)$ и $E_{2s}(\alpha)$, где $\alpha > 1$, $\overline{m} = \max(1, |m|)$, $s \geqslant 1$ и $E_s(\alpha)$ — класс функций $F(x_1, \ldots, x_s)$, определенный условиями:

$$F(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} C(m_1, \ldots, m_s)\, e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)},$$

$$C(m_1, \ldots, m_s) = O\left((m_1, \ldots, m_s)^{-\alpha}\right),$$

где константа в знаке O может зависеть от α и s.

Теорема 1. Пусть $\varphi(P)$ — решение уравнения

$$\varphi(P) = \lambda \int_{G_s} K(P, Q) \varphi(Q)\, dQ + f(P). \qquad (1)$$

Зададим точки $M_l = M[\xi_1(l), \ldots, \xi_s(l)]$ равенствами $\xi_1(l) = \left\{\frac{l}{p}\right\}$, $\xi_2(l) = \left\{\frac{l^2}{p}\right\}$, $\ldots$, $\xi_s(l) = \left\{\frac{l^s}{p}\right\}$. Тогда $\varphi(M_l) = \widetilde{\varphi}(M_l) + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ $(l = 1, 2, \ldots, N)$, где величины $\widetilde{\varphi}(M_l)$ удовлетворяют системе N линейных алгебраических уравнений вида

$$\widetilde{\varphi}(M_j) = \frac{\lambda}{N} \sum_{l=1}^{N} K(M_j, M_l) \widetilde{\varphi}(M_l) + f(M_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, N). \qquad (2)$$

Теорема 2. Пусть $\varphi(P)$ — решение уравнения (1). Тогда при $M_l = M\left(\left\{\frac{la_1}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{la_s}{p}\right\}\right)$ справедливо равенство

$$\varphi(P) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} K(P, M_l) \widetilde{\varphi}(M_l) + f(P) + O\left(N^{-\alpha} \ln^{\alpha s} N\right),$$

где величины $\widetilde{\varphi}(M_l)$ удовлетворяют системе уравнений (2).

Теорема 3. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, при $|\lambda| < e^{-\beta\left(1+\frac{1}{2\varepsilon}\right)}$ справедливо равенство

$$\varphi(P) = f(P) + \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} \sum_{\nu=1}^{n} \lambda^\nu K(P, M_{\nu,l}) \ldots$$

$$\ldots K(M_{\nu-1,l}, M_{\nu,l}) f(M_{\nu,l}) + O\left(N^{-1/2+\varepsilon}\right),$$

где $M_{\nu,l} = M\left(\left\{\frac{l^{s(\nu-1)+1}}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{l^{s\nu}}{p}\right\}\right)$,

$$n = \left[\frac{\varepsilon - 2\varepsilon^2}{\beta} \ln N\right] - 1.$$

И. Ф. Шелихова

8295. **К численной проблеме определения собственных значений с помощью матриц перехода. Пестель, Маренхольц** (Zum numerischen Problem der Eigenwertbestimmung mit Übertragungsmatrizen. Pestel E., Mahrenholtz O.), Ingr-Arch., 1959, 28, 255—262 (нем.)

Указывается, что вычисление частот собственных колебаний балок с помощью метода начальных параметров в матричной форме (см., например, Бабаков, Теория колебаний, ГИТТЛ, 1958, стр. 217—225) упрощается при применении следующего приема. Начальный вектор-столбец состояния балки, содержащий $2r$ компонент (среди которых только r отлично от нуля), представляется в виде суммы основного начального и r—1 единичных векторов, умноженных на неопределенные множители χ_p^0 $(p=1,2,\ldots,r-1)$. После перехода к другому концу балки и использованию граничных условий получается система r уравнений с r—1 неизвестными, которая, при значении частоты ω, равной частоте собственных колебаний балки, должна быть совместной. Небольшое число итераций позволяет вычислить частоту собственных колебаний балки с достаточной точностью. Метод иллюстрирован двумя примерами вычисления частоты собственных поперечных колебаний $(2r=4)$ и поперечно-продольных либо изгибно-крутильных колебаний $(2r=6)$ балки. Библ. 11 назв. К. Р. Коваленко

8296. **Расчет изгибных колебаний ступенчатого вала с промежуточными условиями при помощи передаточных матриц. Цурмюль** (Berechnung von Biegeschwingungen abgesetzter Wellen mit Zwischenbedingungen mittels Übertragungsmatrizen. Zurmühl R.), Ingr-Arch., 1958, **26**, № 6, 398—407 (нем.)

Вводя в рассмотрение так называемые передаточные матрицы, автор развивает приближенный метод расчета изгибных колебаний ступенчатых валов кусочно-постоянного поперечного сечения с произвольными краевыми и промежуточными условиями. Наименьшая собственная частота и соответствующий ей собственный вектор находятся быстро сходящимся итерационным методом Мизеса. Подробно рассмотрены два примера — расчет изгибных колебаний ступенчатого вала, состоящего из двух сегментов, и расчет вала с промежуточными опорой и шарниром. Обсуждается случай колебаний балки на упругих опорах. Н. Я. Лященко

8297. **О вычислении интегралов излучения. Хансен, Бейлин, Ругисхаузер** (On computing radiation integrals. Hansen R. C., Bailin L. L., Rutishauser R. W.), Communs Assoc. Comput. Mach., 1959, **2**, № 2, 28—31 (англ.)

Общее решение уравнений Максвелла, выраженное в сферических координатах в интегральной форме для случая значительных полей, требует, по мнению авторов, выполнения обширной вычислительной работы, так как аппроксимации Фраунгофера или Френеля не дают достаточной точности. Для облегчения этих вычислений авторы предлагают использовать теорему о сложении сферических гармоник, согласно которой поле представляется как сумма интегралов, содержащих сферические бесселе-

вы функции аргументов, зависящих от радиального расстояния произвольного начала до точки интегрирования (эти интегралы независимы от точки наблюдения).

Проводится сравнительное изучение некоторых методов вычисления „типичных", по мнению авторов, интегралов излучения, таких как $I = \int_0^{ka} f(x) \cdot j_n(x)\, dx$, где

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cdot J_{n+\frac{1}{2}}(x),\ x = kr,\ f(x) = 1,\ x,\ x^{-1},$$ и

a — радиус круговой области.

Для исследования в качестве примера был выбран интеграл $I = \int_0^{30} x \cdot j_{14}(x)\, dx$. Исследование проводилось следующими методами: 1) на настольных клавишных машинах при помощи конечных рядов; 2) интегрированием соответствующего дифференциального уравнения на аналоговой машине PEAK (REAC); 3) интегрированием соответствующего дифференциального уравнения на цифровом дифференциальном анализаторе Litton DDA; 4) численным интегрированием на универсальной цифровой вычислительной машине ИБМ-704.

Данные анализа, включающие стоимость, скорость и точность вычислений рассматриваемых интегралов сведены в таблицы I и II, помещенные в тексте. Авторы указывают, что результаты анализа в общем применимы к уравнениям, полученным из уравнения Гельмгольца или волнового уравнения, в частности к решениям уравнения Лиувилля

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[p(z)\frac{\partial \psi}{\partial z}\right] + [q(z) + \lambda \cdot r(z)] \cdot \psi = 0.$$

В приложении излагается применение метода конечных рядов к вычислению рассматриваемых интегралов на настольных клавишных машинах. М. В. Беляков

8298. Две теоремы об обращениях конечных отрезков обобщенной матрицы Гильберта. Смит (Two theorems on inverses of finite segments of the generalized Hilbert matrix. Smith Richard B.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1959, **13**, № 55, 41—43 (англ.)

Доказано, что

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} (-1)^{i+j} [(p+i+j-1)(i-1)!(n-i)!(j-1)!]^2 \times$$

$$\times (n-j)!]^{-1} \prod_{k=0}^{n-1} (p+i+k)(p+j+k) = n(p+n)$$

(p — целое, $p \geqslant 0$ или $p \leqslant -2n$). Это тождество может использоваться для контроля при обращении конечных отрезков обобщенной матрицы Гильберта (РЖМат, 1957, 6004). М. Л. Бродский

8299. Простая формула для предсказания и автоматического контроля. Даффин, Шмидт (A simple formula for prediction and automatic scrutation. Duffin R. J., Schmidt Th. W. Amer. Rocket Soc. (Preprints), 1959, № 763, 8 pp.) (англ.)

Задана последовательность $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ значений (в точках $1, 2, \ldots, n, \ldots$), строится полином $(m-1)$-й степени, аппроксимирующий эту последовательность с весами θ^i в точках $i\ (i = 1, 2, \ldots)$, причем $0 < \theta < 1$. Значение построенного полинома в точке 0 выражается простой формулой

$$y_0^* = -\sum_{n=1}^{\infty} y_n \theta^n \sum_{k=1}^{m} (1-\theta^{-1})^k C_m^k C_{n-1}^{k-1}. \qquad (1)$$

Эта формула применяется для устройств, работающих в реальном масштабе времени, для вероятного предсказания следующего значения изменяющейся во времени величины y. Так как сходимость (1) может оказаться медленной (при θ, близких к 1), применяется формула:

$$y_0^* = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j+1} C_m^j (y_j + \theta^j (y_j^* - y_j)),$$

выражающая предсказываемое y_0^* через предсказанные (в том же смысле, через $y_{j+1}, y_{j+2} \ldots$) и измеренные значения $y_j\ (1 < j < m)$. Если в процессе вычисления окажутся грубо ошибочные y_j, они должны заменяться на y_j^*. Так же поступаем, если о нескольких значениях y_j не получено никаких сведений. Приведен числовой пример; выводы формул не приведены. М. Л. Бродский

8300. Итерационный метод для подбора логистической кривой. Хауэлл (An iterative method for fitting the logistic curve. Howell John R.), Communs Assoc. Comput. Mach., 1959, **2**, № 3, 5—6 (англ.)

Разработана программа для приближенного построения „логистической" кривой $y = (1 + e^{\alpha - \beta x})^{-1}$ по n точкам обычным методом наименьших квадратов (линеаризованным по α, β). Чтобы гарантировать сходимость, оказалось полезным на каждом шаге умножать поправки $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ на множитель θ, $0 < \theta < 1$. М. Л. Бродский

8301. О вычислении значений функций одного переменного. III—VI. Люстерник Л. А., Матем. просвещение, 1959, вып. 4, 3—26

Окончание работы (РЖМат, 1959, 11597). В § 3 приведены (в явном виде) разложения некоторых функций (e^{ax}, $\sin ax$, $\cos ax$, $\ln[(1+p^2+2px)/(1+p^2-2px)]$ $(0 < p < 1)$ $\operatorname{arc\,tg} x$, $J_0(x)$) на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ в ряд по полиномам Чебышева. В § 4 приведены примеры применения итерационных методов для вычисления значений функций, в § 5 — пример асимптотического ряда (для $\operatorname{erf} x$). В § 6 указываются работы по приближениям рациональными функциями (Эйлер, Лагранж, И. М. Стесин и др.). М. Л. Бродский

8302. Заметка о формулах для сумм степеней корней. Филдер (A note on summation formulas of powers of roots. Fielder Daniel C.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1958, **12**, № 63, 194—198 (англ.)

Составлена таблица, выражающая в явном виде суммы k-х степеней корней алгебраического уравнения S_k через его коэффициенты $(1 \leqslant k \leqslant 11)$. Таблица составлена на основе (довольно громоздкого) общего явного выражения S_k через коэффициенты уравнения; при ее составлении удобно применять таблицы Эйлера, дающие количество способов представления числа n через сумму k натуральных чисел (с повторениями). М. Л. Бродский

8303. Радиус однолистности функции вероятностей. Крейсиг, Тодд (The radius of univalence of the error function. Kreyszig Erwin, Todd John), Numer. Math., 1959, **1**, № 2, 78—89 (англ.)

Доказывается, что радиус однолистности ρ функции $w = \operatorname{erf} z$ равен минимальному модулю невещественного z, при котором величина $\operatorname{erf} z$ вещественна. Два доказательства основаны соответственно на рассмотрении геометрических свойств семейств кривых $|z| = \text{const}$ на плоскости w и $\arg w = \text{const}$ на плоскости z. Оба доказательства доставляют эффективные методы вычисления ρ. М. Л. Бродский

8304. Обобщение формул механического выравнивания. Михалуп (Entwicklung und Weiterbildung von mechanischen Ausgleichungsformeln. Michalup Erich. Statist. Vierteljahrschr., 1956, **9**, 64—69) (нем.)

8305. Проблема возмущенной решетки. Обзор. Марадудин, Уэйсс (The disordered lattice problem: A review. Maradudin Alexei, Weiss George H.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1958, **6**, № 3, 302—319 (англ.)

Большое количество работ, начиная с работы Эйнштейна, было посвящено изучению проблемы распределения собственных частот колебаний кристаллической решетки, играющей фундаментальную роль в физике твердого тела. Борн и Карман (Born M., Kármán T. von, Z. Phys., 1912, 13, 297—309) предложили упрощенную модель, состоящую из масс в узлах кубической сетки, соединенных пружинками. Дайсон (Dyson F. J., Phys. Rev., 1953, 2, 92, 1331—1338) ввел в рассмотрение случайные величины, характеризующие массы и жесткости пружинок, и поставил задачу отыскания асимптотической усредненной плотности распределения собственных частот системы при большом количестве узлов. Эта задача была эффективно решена Дайсоном лишь для простейшей одномерной однородной модели, при весьма специальном виде функции распределения случайных величин (один из частных случаев гамма-распределения). Шмидтом также рассматривалась лишь одномерная модель. Кроме «одномерной» специфичности методов Шмидта и Дайсона (у последнего это связано с использованием некоторых свойств якобиевых матриц), эти методы пока не применимы к физически важному случаю решеток с «чередованием» (усредненных величин масс), так как в этом случае задача сводится к функциональным уравнениям специального вида, для которых не найдено эффективного метода решения. Предлагаемое авторами решение для трехмерного случая основано на исследовании влияния малых отклонений элементов матрицы на некоторые симметрические функции от ее собственных чисел. Авторы отмечают, что ими получено лишь первое приближение, дальнейшее исследование связано с серьезными трудностями. Не удалось даже выяснить простейших вопросов качественного характера. Авторы считают полезным привлечь внимание математиков к этим проблемам физики. М. Л. Бродский

8306. Исследование колебательных систем в фазовой плоскости. Часть II. Решение уравнения вынужденных колебаний δ-методом. Такэи (Consideration of vibrating systems by phase-plane displacements. Part II. Solution of forced vibration by δ-method. Takei Kenzo), Sci. Repts Res. Insts Tohoku Univ. Ser. B — Electr. Commun., 1957, 9, № 1, 57—68 (англ.)
Ч. I—1953, 8, № 1, 49

Часть I см. РЖМат, 1959, 5818.

Графоаналитический метод приближенного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, названный δ-методом (РЖМат, 1959, 5818), прилагается к уравнениям, описывающим вынужденные колебания системы при действии синусоидальной возбуждающей силы. Данное уравнение второго порядка, записанное в символических обозначениях δ-метода, преобразуется в уравнение первого порядка, не содержащее времени t. Решение его ищется в одной из фазовых плоскостей $(\dot{x}/p, x)$ или $(\dot{x}/\omega, x)$. Здесь p — угловая частота собственных колебаний системы, а ω — угловая частота возбуждающей силы. Искомая интегральная кривая в обоих случаях аппроксимируется дугами окружностей. Рассмотрено несколько конкретных примеров.

А. Б. Штыкан

8307. Исследование колебательных систем в фазовой плоскости. Часть 3. Метод решения обыкновенного дифференциального уравнения третьего и более высоких порядков. Такэи (Consideration on vibrating systems by phase-plane displacements. Part III. Method for solving third or higher order ordinary differential equation. Takei Kenzo), Sci. Repts Res. Insts Tohoku Univ. Ser. B — Electr. Commun., 1957, 9, № 1, 69—77 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1959, 5818; часть II реф. 8306.

Ранее разработанный автором метод приближенного графоаналитического решения обыкновенных дифференциальных уравнений в фазовой плоскости, названный им δ-методом, распространяется на системы совокупных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, эквивалентные указанным в заголовке.

А. Б. Штыкан

8308. Графическое решение линейных дифференциальных уравнений. Баллантайн (Graphical solution of linear differential equations. Ballantine J. P.), Amer. Math. Monthly, 1957, 64, № 5, 357—359 (англ.)

Линейное дифференциальное уравнение

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \qquad (1)$$

приводится к виду

$$y' = \frac{B(x) - y}{A(x) - x}, \qquad (2)$$

в котором

$$A(x) = x + \frac{1}{P(x)}, \qquad B(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}.$$

Правая часть уравнения (2) выражает угловой коэффициент прямой, проходящей через точки (x, y) и $(A(x), B(x))$, причем точки $(A(x), B(x))$ могут быть заранее вычислены и нанесены на чертеж для ряда дискретных, например равноотстоящих, значений $x = x_i$. Предполагается, что каждое значение x_j, включая начальное значение x_0, соответствует середине интервала. Для начала построения ломаной, аппроксимирующей интегральную кривую, надо поместить линейку так, чтобы она прошла через точки (x_0, y_0) и $(A(x_0), B(x_0))$, и провести отрезок до конца первого интервала. Во втором интервале отрезок ломаной проходит через конец первого отрезка и точку $(A(x_1), B(x_1))$ и т. д. Автор усматривает преимущество метода в том, что он не требует проведения взаимно параллельных прямых. Рассмотрен конкретный пример.

А. Б. Штыкач

8309. Графоаналитический метод интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений. Каляев А. В., Тр. Таганрогск. радиотехн. ин-та, 1958, 2, 111—123

Предлагается графоаналитический способ решения нелинейных дифференциальных уравнений первого и высших порядков. В последнем случае уравнение сводится к соответствующей системе уравнений первого порядка. Предлагаемый способ автор называет методом скользящего треугольника, который заключается в том, что, вместо обычного графического построения первого приближения по Эйлеру с применением добавочного полушага, строится характеристический треугольник в каждом частичном интервале изменения x. Это не упрощает, как утверждает автор, а усложняет построение, так как требуется проведение дополнительных, параллельных осям, отрезков. Очевидно, что в связи с этим должна понизиться и точность графического решения, особенно в случае решения системы уравнений. Ю. Ф. Харкеевич

8310. Графические решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Зубер (Graficzne rozwiazywanie równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu. Zuber R.), Zastosow. mat., 1956, 3, № 1, 82—89 (польск.; рез. русск., англ.)

Описаны два графических метода приближенного построения интегральных кривых, основанные на идее использования предварительно построенных семейств вспомогательных кривых по точкам, находимым вычислениями. Автор ссылается на метод изоклин. Полюсный метод касательных заключается в следующем: Если дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \qquad (1)$$

и произвольная точка $S_0(a_0, b_0)$, причем $f(x, y)$ ограничена и непрерывна в области Q, то можно построить кривую

$$y - b_0 = f(x, y)(x - a_0), \qquad (2)$$

называемую автором полюсной касательных уравнения (1) для полюса S_0. Она обладает тем свойством, что в точках пересечения ее с интегральными кривыми линейные элементы последних лежат на прямых, проходящих через точку S_0. Выбирается некоторое количество точек, лежащих на произвольной кривой

$$x = a(t), \qquad y = b(t), \qquad (3)$$

названной директрисой касательных, и для каждой точки S_i строится кривая (2), помеченная соответствующим индексом i. Одна из них проходит через начальную точку $P_0(x_0, y_0)$. Для построения ломаной, аппроксимирующей интегральную кривую, проводится прямая P_0S_0 до пересечения со следующей кривой (2) в точке P_1, затем прямая P_1S_1 до пересечения с кривой (2), помеченной индексом 2, в точке S_2 и т. д. Полюсный метод нормалей отличается тем, что каждой — в общем случае произвольно выбранной — точке $S_i(a_i, b_i)$ области Q может быть поставлена в соответствие кривая

$$y - b_i = -(x - a_i)/f(x, y), \qquad (4)$$

для полюса S_i названная полюсной нормалей уравнения. В точках пересечения P_i интегральных кривых с каждой из кривых (4) линейные элементы перпендикулярны прямым P_iS_i и интегральные кривые могут быть аппроксимированы дугами окружностей, центры которых находятся в точках S_i, а радиусы равны P_iS_i. Кривая (3), на которой располагаются точки S_i в этом случае названа директрисой нормалей.

Даны некоторые указания, касающиеся практики применения методов. Вкратце рассмотрены конкретные примеры. А. Б. Штыкан

8311. О графическом решении дифференциальных уравнений с опережающим аргументом при разных видах задания начального условия. Штыкан А. Б., Успехи матем. наук, 1958, 13, № 6, 193—206

Имеющиеся в математической литературе возражения против изучения дифференциальных уравнений с опережающим аргументом сводятся к тому, что такие уравнения имеют для значений $x > x_0$, вообще говоря, разрывное решение и что решение естественно поставленной начальной задачи перестает непрерывно зависеть от начальных условий. При этом под естественно поставленной задачей, по аналогии с таковой для уравнения с запаздывающим аргументом, понимается задание начальной функции $y_0(x) = \varphi(x)$ на промежутке $-\infty < x \leqslant x$ Однако независимо от физического истолкования дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом, можно поставить такую чисто геометрическую задачу: построить проходящую через данную точку кривую, обладающую тем свойством, что наклон касательной в каждой точке ее определяется не только координатами этой точки, но и координатами одной или нескольких «соседних» точек. Очевидно, что понятия запаздывания и опережения при такой постановке задачи оказываются равноправными. На примерах графического решения уравнения

$$y'(x) = f(x, y(x), y(x + \alpha(x)), y(x + \beta(x))),$$
$$\alpha(x) \geqslant 0, \quad \beta(x) \geqslant 0, \qquad (1)$$

при разных видах постановки начальной задачи показывается, что разрывное решение является следствием не опережения аргумента, а характера постановки начальной задачи. Показана одна из возможных постановок начальной точечной задачи, при которой решение уравнения (1) является непрерывным и непрерывно зависящим от начальных условий. Статья сопровождается примечанием А. Д. Мышкиса. Ю. Ф. Харкеевич

8312. К вопросу об общем графоаналитическом методе нахождения первых приближенных значений комплексных корней алгебраических уравнений высших степеней. Космаков А. В., Уч. зап. Иркутский финанс.-экон. ин-т, 1958, вып., 7 3—51

Основная мысль заметки заключается в следующем. Пусть, например, дано алгебраическое уравнение 4-ой степени с вещественными коэффициентами: $x^4 + p_1x^3 + p_2x^2 + p_3x + p_4 = 0$. Заменим мысленно это уравнение таким: $(x^2 + ax + b)(x^2 + a_1x + b_1) = 0$. Если мы приравняем каждый из этих двух множителей y, то мы получим уравнения двух парабол: $y = x^2 + ax + b$ и $y = x^2 + a_1x + b_1$. Если же мы заменим данное уравнение уравнением $-(x^2 + ax + b)(x^2 + a_1x + b_1) = 0$ и приравняем каждый из двух множителей y^2, то мы получим два уравнения: $y^2 = -(x^2 + ax + b)$ (уравнение окружности) и $y^2 = x^2 + a_1x + b_1$ (уравнение гиперболы).

В этом плане автор, основываясь на численных примерах, дает правило для нахождения абсциссы центра и квадрата радиуса указанной окружности (в случае комплексных корней радиус будет мнимым); это дает возможность написать выражение для полинома $x^2 + ax + b$.

В некоторых местах изложение путаное и непонятное. Имеются неточности. З. Х. Рафальсон

8313. Заметка о механографическом решении линейных систем уравнений. Ламбер (Note sur la résolution mécanographique des systèmes d'équations linéaires. Lambert L.), Rev. mécanogr., 1958, 12, № 135, 438, 440—444 (франц.)

Описывается схема решения линейных неоднородных систем алгебраических уравнений на цифровой электронной машине в Бельгийском национальном центре механических вычислений. Предлагаемый способ решения имеет своей теоретической основой метод последовательных исключений. По утверждению автора, изложенный способ может применяться для любых цифровых машин с ограниченной памятью, в которых запись коэффициентов уравнений производится по методу «плавающей запятой». Дается приложение к вычислению определителей и обращению матриц. Ю. Ф. Харкеевич

8314. Графическое решение уравнений третьей степени. Митягина В. А., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, 183, 397—411

Описаны некоторые известные способы графического нахождения действительных корней уравнений третьей степени, а именно: путем нахождения точек пересечения прямой с кубической параболой и построением семейства помеченных прямых, выражающих зависимость между коэффициентами p и q уравнений вида $x^3 + px + q = 0$ при разных значениях параметра x. В случае уравнений, содержащих x^2, ищутся точки пересечения квадратной параболы и гиперболы. Рассмотрены числовые примеры. Указанные графические способы доступны учащимся старших классов средней школы. Автор рекомендует использовать их, в частности, на занятиях математического кружка. А. Б. Штыкан

8315. Геометрическое решение уравнений третьей, четвертой и пятой степеней. Сиспанов (Geometric solution of equations of third, fourth and fifth degree. Sispánov Sergio. Rev. Univ. Mat. Argentina, 1955 (1956), 17, 265—278) (исп.)

Рассматривается метод решения полиномиальных уравнений третьей, четвертой и пятой степеней с вещественными коэффициентами. Метод состоит в построении графиков двух уравнений низших степеней и вычислении их корней при помощи алгебры. E. Frank

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 5, 420.

8316. Анализ записей затухающих колебаний. Кухаренко П. Г., Фрейман Л. С., Научн. зап. Воронежск. лесотехн. ин-та, 1959, 16, 165—173

При автоматической записи затухающих колебаний соответствующие диаграммы часто имеют малые разме-

ры. Кроме того, в некоторых случаях не обозначены координатные оси. Это затрудняет математическое исследование функций, изображаемых записанными кривыми. Предлагаются способы нахождения координатных осей и элементов A, α, λ, φ каждой из кривых затухающих колебаний в предположении, что уравнение ее имеет вид

$$y = Ae^{-\alpha x} \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} x.$$

Рассмотрено шесть способов, из которых особенно простыми являются графоаналитический (пятый) и графический (шестой). Приведенные результаты проверки свидетельствуют о практически достаточной достижимой точности. Библ. 5 назв. А. Б. Штыкан

8317. Графический метод нахождения параболического участка экспериментальной кривой. Пресняков П. Д., Научно-техн. информ. бюл. Ленингр. политехн. ин-т, 1959, № 3, 81—83

При проектировании приборов с нелинейными характеристиками часто необходимо найти такой режим работы, при котором реальная характеристика близка к квадратичной. Предложен прием нахождения соответствующего участка на заданной кривой характеристики, основанный на следующем свойстве параболы. Если параллельно директрисе провести прямую, удаленную от нее на d=const (автор называет ее фиктивной директрисой), и некоторое число точек параболы соединить прямыми с фокусом, а на прямых отложить по направлению к фокусу отрезки, соответственно равные расстояниям каждой точки от фиктивной директрисы, то концы этих отрезков располагаются на окружности радиуса d с центром в фокусе. В случае совпадения фиктивной директрисы с истинной, $d=0$ и концы всех отрезков совпадают с фокусом. Имея это в виду, на произвольном расстоянии от оси абсцисс данной характеристики проводится параллельная ей фиктивная директриса. Из нескольких точек характеристики, как из центров, в окрестности предполагаемого местонахождения фокуса проводятся дуги окружностей радиусами, равными расстояниям соответствующих точек от фиктивной директрисы. Если огибающая некоторого числа дуг является дугою окружности, то центр ее должен совпасть с фокусом аппроксимирующей параболы. Его находят обычным геометрическим построением. В окрестности предполагаемого прохождения директрисы огибающая тех же окружностей может оказаться отрезком прямой, параллельной оси. Ее рассматривают как директрису, ограниченного ординатами крайних точек отрезка, параболического участка характеристики. А. Б. Штыкан

8318. Сравнительная оценка точности способов графического интегрирования функций. Уствольская Т. И., Тр. Ленингр. технол. ин-та им. Ленсовета, 1959, вып. 50, 57—62

На основе экспериментальной проверки разных способов графического интегрирования по методу Д. И. Каргина (О точности графических расчетов, Сб. ЛИИПС, 1929, вып. 101) сделаны некоторые выводы, изложенные в весьма категорической форме, но в значительной части недостаточно убедительные. А. Б. Штыкан

8319. Графическое интегрирование инверсной функции. Пленво (Intégration graphique de l'inverse d'une fonction. Plainevaux Jean E.), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 15, 2210—2212 (франц.)

В прямоугольной системе координат x o g строятся графически значения интеграла $y = \int \frac{dx}{g(x)}$, равного y_0 при $x = x_0$. Эти значения получаются на оси в виде функциональной шкалы. Выведены оценки погрешности. Рассмотрен случай построения тем же методом несобственного интеграла функции, обращающейся в бесконечность во внутренней точке интервала интеграции и дан простой геометрический критерий его сходимости или расходимости. Ю. Ф. Харкеевич

8320. Механическое интегрирование высокой точности при помощи сдвига в вязких жидкостях. Дрейпер, Финстон (High-accuracy mechanical integration by shear in viscous liquids. Draper Charles S., Finston Morton), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1959, **45**, № 4, 528—549 (англ.)

Рассматриваются условия, которым должен удовлетворять механический интегратор, состоящий в принципе из концентрично расположенных ротора и статора, между которыми имеется малый зазор, заполненный вязкой жидкостью. На входе действует вращающий момент, а выходом является угловая скорость ротора относительно статора. Отмечено, что подобный интегратор выгодно применять в тех случаях, когда для получения крутящих моментов на входе применяются гироскопические устройства с одной степенью свободы. А. Б. Штыкан

8321. Графическое дифференцирование в полярной системе координат и его применение. Головинский Б. Л., Сб. студ. научно-исслед. работ. Укр. с.-х. акад., 1955, вып. 2, 176—179

Описан графический способ построения производной кривой $\rho'(\varphi)$ по данной кривой $\rho(\varphi)$, основанной на том, что величина производной в полярной координатной системе геометрически выражается длиною поднормали и, следовательно, может быть определена по формуле $\rho'(\varphi) = \rho(\varphi) \cdot \operatorname{ctg}\Theta$, в которой Θ есть угол между радиусом-вектором и касательной в текущей точке кривой $\rho(\varphi)$. Значения углов Θ определяются приближенно на основе предположения, что в точке пересечения каждой достаточно малой дуги с радиусом-вектором, проведенным через середину стягивающей ее хорды, касательная параллельна хорде. Построение ведется так, что приближенная производная кривая располагается в одной координатной системе с данной интегральной кривой. Этим оно выгодно отличается от известного ранее, но в статье не упомянутого, построения по методу Холодовского, согласно которому приближенная производная кривая оказывается повернутой на 90° относительно интегральной. А. Б. Штыкан

8322. Заметка о графическом способе применения метода наименьших квадратов. Рифенберг (A note on the graphic method for obtaining a least squares fit. Riffenburgh Robert H.), Amer. Statistician, 1959, **13**, № 1, 21 (англ.)

Подвергается критике ранее опубликованный РЖМат, 1958, 1615) графический способ проведения прямой, проходящей возможно ближе к группе данных точек, и предлагается аналогичный способ, отличающийся лишь тем, что искомая линейная зависимость находится не графически, а численно. Это, по мнению автора, исключает возможность появления накапливающихся погрешностей построения. А. Б. Штыкан

8323. Гидравлический расчет параболических каналов с помощью номограмм. Хованский Г. С., Инж.-физ. ж., 1959, 2, № 2, 113—117 (рез. англ.)

Приводятся номограммы для решения системы шести уравнений, к которой сводится задача гидравлического расчета каналов параболического профиля, если для коэффициента Шези принята полная формула Н. Н. Павловского. Методика решения с помощью номограмм задач по гидравлическому расчету параболических каналов поясняется на конкретных примерах. Приводятся краткие замечания относительно применения номограмм для анализа и исследования положенных в их основу зависимостей. И. Ф. Шелихова

8324. Новый метод номографирования полиномов $M(x, y, z)$, для которых $\frac{\partial^3 M(x, y, z)}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = 0$. Липатова Ф. А., Уч. зап. Калининградск. гос. пед. ин-та, 1958, вып. 5, 144—155

Предложенный метод состоит в том, что сумму первых трех членов правой части тождества $M(x, y, z) = M_1(y,z) + M_2(x,z) + M_3(x,y) + F_1(x) + F_2(y) + F_3(z) + S$ представляют в виде определителя Массо и сводят условия такого представления к условиям совместности системы

$$\begin{aligned} f_2 g_3 - f_3 g_2 &\equiv M_1(y, z), \\ f_3 g_1 - f_1 g_3 &\equiv M_2(x, z), \\ f_1 g_2 - f_2 g_1 &\equiv M_3(x, y). \end{aligned} \qquad (1)$$

Затем рассматривают представление полинома $M(x, y, z)$ в виде определителя Массо. Показывается, что условиями такого представления являются: 1) условия совместности системы (1); 2) условия совместности систем (1) и (2), где система (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} a g_3 - b f_3 &\equiv F_3(z), \\ d f_2 - c g_2 &\equiv F_2(y), \\ (c - a) g_1 + (b - a) f_1 &\equiv F_1(x), \\ ad - bc &\equiv S. \end{aligned} \qquad (2)$$

Приводится исследование совместности систем (1) и (2) для различных случаев. И. Ф. Шелихова

8325. Решение задачи К. Я. Залтса. Липатова Ф. А., Уч. зап. Калининградск. гос. пед. ин-т, 1958, вып. 5, 129—143

Показывается, что необходимым и достаточным условием представления левой части уравнения

$$F_1(x) C_1(y, z) + F_2(y) C_2(x, z) + F_3(z) C_3(x, y) = 0$$

в виде определителя Массо, т. е.

$$F_1 C_1 + F_2 C_2 + F_3 C_3 = \begin{vmatrix} F_1(x) & f_1(x) & g_1(x) \\ F_2(y) & f_2(y) & g_2(y) \\ F_3(z) & f_3(z) & g_3(z) \end{vmatrix},$$

является одно из трех условий совместности системы

$$\begin{aligned} f_2 g_3 - f_3 g_2 &\equiv C_1, \\ f_3 g_1 - f_1 g_3 &\equiv C_2, \\ f_1 g_2 - f_2 g_1 &\equiv C_3, \end{aligned}$$

когда функции $C_1 \not\equiv 0$, $C_2 \not\equiv 0$, $C_3 \not\equiv 0$, именно:

$$1) \quad \frac{\frac{\partial C_1}{\partial z} C_2 - \frac{\partial C_2}{\partial z} C_1}{C_3} = \psi_3(z);$$

$$2) \quad \frac{\frac{\partial C_3}{\partial y} C_1 - \frac{\partial C_1}{\partial y} C_3}{C_2} = \psi_2(z);$$

$$3) \quad \frac{\frac{\partial C_2}{\partial x} C_3 - \frac{\partial C_3}{\partial x} C_2}{C_1} = \psi_1(x).$$

Решение задачи дается в предположении, что $F_i \not\equiv \text{const}(i=1,2,3)$. Приведен числовой пример. И. Ф. Шелихова

8326. Оценка погрешности вычисления по номограмме с бинарным полем с ответом на шкале. Булабаев Т., КазССР Ғылым Акад. хабаршысы, Вестн. АН КазССР, 1959, № 3, 68—73 (рез. каз.)

Выведена формула для оценки погрешности ответа по номограмме из выравненных точек с бинарным полем для случая, когда ответ читается на шкале. Погрешность ответа зависит от величины геометрических погрешностей Δ_1 и Δ_2 нахождения точки в бинарном поле (в направлении, ортогональном к соответствующим семействам линий). Для определения средних значений Δ_1 и Δ_2 построена специальная номограмма с равномерными и ортогональными семействами линий в бинарных полях. В результате ряда экспериментальных просчетов по этой номограмме и последующей статистической обработки найдены стандарты значений Δ_1 и Δ_2, равные $\sigma = 0{,}3$ *мм*. Утверждается, что частный вид бинарных полей номограммы не снижает общности исследования.

Для проверки справедливости полученной оценки проведена обработка результатов просчетов по номограмме с бинарным полем для формулы площади трапеции $s = bh + h^2 \operatorname{ctg}\varphi$. Оказалось, что, действительно, истинная погрешность не превышает теоретическую, вычисленную при $\Delta_1 = \Delta_2 = 0{,}3$ *мм*. Г. С. Хованский

8327. Расчет приближенных номограмм на быстродействующей машине. Чепрасов В. А., Джемс-Леви Г. Е., Вычисл. математика, 1959, сб. 4, 159—161

Описывается способ приближенного номографирования, предложенный авторами и реализованный на вычислительной машине «Стрела». Рассматривается поверхность $z = F(x, y)$, $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$. $F_x . F_y \neq 0$ в исследуемой области. Исходной информацией для машины является программа для расчета $z = F(x_0 y_0)$, Δx, Δy, после чего машина рассчитывает таблицу из $16 \times 16 = 256$ значений функции. Задача машины состоит в выборе оптимальной группы значений параметров x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2. Номограмма, построенная по таблице из 256 значений функции, представляет собой поверхность, совпадающую с заданной на четырех сечениях: $x = x_1$, $x = x_2$ и $y = y_1$, $y = y_2$, а также в точке x_0, y_0. Приводится описание логической схемы номограммы. Отмечается, что указанный метод дает вполне приемлемую аппроксимацию для весьма широкого круга зависимостей. И. Ф. Шелихова

8328. Номограммы для вычисления *H* и *Z* над параболическим цилиндром. Федорова Н. А., Изв. Днепропетр. горн. ин-та, 1958, **36**, 51—56

Кратко поясняется простейший прием построения и методика применения номограмм, позволяющих определять численные значения H и Z по заданным a, b, α в единицах намагничения I для случая, когда оси координат x и y направлены горизонтально, причем y параллельно, x перпендикулярно оси цилиндра, а ось z вертикально вниз (α — угол наклона цилиндра; $a = x/z$; $b = p/z$; x — текущая координата, фиксирующая место измерения H или Z; p — параметр параболы, образующей цилиндр; z — расстояние между началом координат и фокусом параболы). И. Ф. Шелихова

8329. Дальнейшие номограммы для расчета комплексных чисел. Штамбергер (Weitere Nomogramme für das Rechnen mit komplexen Zahlen. Stamberger A.), Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau, 1958, **4**, № 1, 31—32 (нем.)

Описание новых номограмм для определения обратной величины комплексного числа и квадратного корня из комплексного числа. Номограммы дополняют ранее опубликованные номограммы в том же журнале. Приведены уравнения шкал рабочих номограмм. Г. С. Хованский

8330. Номографическое представление систем функций и его применение. Рёйттер (Nomographische Darstellung von Funktionensystemen und ihre Anwendung. Reutter F.), Z. angew. Math. und Mech., 1957, **37**, № 7-8, 260—261 (нем.)

Обобщение прежних результатов автора (РЖМат, 1959, 4282) на случай системы двух линейно независимых функций. В. К. Саульев

8331. Бинарные анаморфозы уравнений, допускающих простой *A*-множитель. Николаев П. В., Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 2, 195—198

8332. Применение диаграммы Николса для численного расчета рациональных функций. Шрайфогель (Die Anwendung des Nichols—Diagrammes auf die Berechnung rationaler Funktionen. Schraivogel R. A.), Regelungstechnik, 1959, **7**, № 6, 206—210 (нем.; рез. англ.)

8333. Номографический метод определения сигналов на выходе линейных фильтрующих систем. Калинина Т. Б., Гольцман Ф. М., Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1959, № 11, 1605—1618

Предлагается приближенный номографический метод вычисления интеграла «свертывания» по дискретным значениям заданных функций. Оценивается погрешность вычислений. Рассматриваются примеры использования метода при решении различных физических задач. Резюме автора

8334. Комбинированные номограммы из выравненных точек с унитарным полем. Седлак (Kombinované spojnicové nomogramy s unárním polem. Sedlák J.), Strojírenství, 1958, 8, № 9, 708—709 (чешск.)

Рассматривается уравнение $h_1f_5+h_2g_5=h_3f_5+h_4g_5$. Для него строится номограмма с двойным выравниванием, посредством введения переменной u ($h_1f_5+h_2g_5=u=h_3f_5+h_4g_5$) в бинарное поле ($u$, 5). Линии u=const на чертеж не наносятся.

8335. Некоторые вопросы практической номографии. Хованский Г. С., Вычисл. математика, 1959, сб. 4, 3—103

Настоящая работа посвящена развитию новых методов построения номограмм, отвечающих запросам практики. Работа разделена на 6 глав. В первых трех главах рассматриваются номограммы с ориентированным непрозрачным транспарантом. В гл. I, в которой описаны номограммы для зависимостей с 4 переменными, показано, что формы с бинарным полем (Коши, Кларка и уравнений 5-го номографического порядка) допускают разъединение семейств линий в бинарных полях и видоизменение этих семейств путем варьирования параметрами, которые вводятся в уравнения элементов номограмм. При этом номограммы формы Коши допускают еще введение произвольных функций и параметров, позволяющих изменять распределение делений на шкалах. В гл. II рассмотрены дополнительные возможности для преобразования номограмм из выравненных точек уравнения с 6 переменными и его частных случаев. В гл. III найдены формы уравнений с 6 переменными, допускающие введение в уравнения полей номограммы одной, двух и трех произвольных функций в связи с наличием в номограмме немых прямолинейных шкал. В гл. IV рассмотрены с общей точки зрения номографические методы приближенного представления функции одного переменного, основанные на использовании номограмм с 3 степенями свободы перемещения транспаранта, номограмм с ориентированным транспарантом и номограмм из выравненных точек. В гл. V излагается метод построения приближенных номограмм из выравненных точек с совмещенными параллельными шкалами для двух уравнений типа Коши. В гл. VI рассматриваются пути применения номограмм для анализа и исследования функциональных зависимостей.

И. Ф. Шелихова

8336. Некоторые общие методы практической номографии. Джемс-Леви Г. Е., Вычисл. математика, 1959, сб. 4, 104—149

В работе, состоящей из трех глав, излагаются теоретические вопросы номографии, непосредственно связанные с практической работой номографа. В главах первой и второй дается принципиальное решение проблемы общей анаморфозы, приводящее к эффективным методам номографирования (например, для уравнений 4-го номографического порядка). При некоторых ограничениях общего характера все рассуждения первых двух глав справедливы и для неномографируемых уравнений, для которых строится интерполяционная номографируемая формула. В гл. I показано, что проблема общей анаморфозы может быть сведена к задаче интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений для определения констант. В гл. II доказывается, что для уравнений, не приводящихся к уравнениям 3-го номографического порядка, проблема общей анаморфозы сводится к решению системы алгебраических уравнений. Далее рассмотрена возможность приложения метода к теории построения номограмм для систем уравнений, а также описывается метод приближенного номографирования. Гл. III посвящена преобразованиям номограмм. Излагается элементарная теория сетки Пентковского с неподвижным треугольником, причем указан новый, чисто графический метод построения сеток, все линии которых прямые, и изменена методика пользования ими. Проведено исследование полной группы непроективных преобразований номограмм 3-го номографического порядка, на основе которого предложен прибор для механизации преобразования таких номограмм с прямолинейной ответной шкалой. Применение этого прибора особенно эффективно для построения номограмм, являющихся составными частями номограмм со многими переменными, для которых ответная шкала уже определена построением предыдущих частей. И. Ф. Шелихова

8337. Некоторые примеры неномографируемых функций. Крейнес М. А., Вайнштейн И. А., Айзенштат Н. Д., Матем. сб., 1959, **48**, № 3, 377—395

Работа посвящена развитию теоретических вопросов номографии, непосредственно связанных с практикой. Рассматриваются функции, номографируемые на сетке, функции, номографируемые в прямоугольнике с помощью непрерывных функций, и номограммы со шкалами, заданными параметрически. Приводятся примеры неномографируемых функций. В некоторых случаях для облегчения изложения вместо номограмм рассматриваются образы, им двойственные. И. Ф. Шелихова

8338. Статистические таблицы и номограммы способствуют повышению продуктивности вашего труда (Statistische tabellen in nomogrammen bevorderen Uw produktiviteit), Statist. neerl., 1959, **13**, № 2, 143—146 (гол.)

8339. Анаморфоза уравнений, допускающих A-множитель. Николаев П. В., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 2, 167—175

Пусть

$$F(t) = F(t_1,\ t_2,\ t_3)=0 \qquad (1)$$

— некоторое невырожденное, аналитическое в области g трехмерного пространства уравнение и

$$\Phi(t) = \psi_1(t_2,\ t_3)\,\psi_2(t_3,\ t_1)\,\psi_3(t_1,\ t_2)\,F(t) = \\ = |\,f_{i1}(t_i);\ f_{i2}(t_i);\ f_{i3}(t_i)\,| \qquad (2)$$

— какая-либо его анаморфоза.

Анализируются условия анаморфозы (2) уравнения (1) и описывается эффективный метод (метод разрешающей системы) отыскания элементов анаморфозы любого уравнения (1), допускающего A-множитель. Под разрешающей системой A_k данного уравнения с фундаментальными точками $t_3=t_{3k}$ ($k=1, 2, 3$) и с базисными точками $t_2=t_{2l}$ ($i=1, 2$) понимается система шести функций:

$$A_1 = F^{(001)}\,F^{(012)}\,F^{(023)};\ A_2 = -\,F^{(001)}\,F^{(013)}\,F^{(022)};$$

$$A_3 = F^{(002)}\,F^{(013)}\,F^{(021)};\ A_4 = -\,F^{(002)}\,F^{(011)}\,F^{(023)};$$

$$A_5 = F^{(003)}\,F^{(011)}\,F^{(022)};\ A_6 = -\,F^{(003)}\,F^{(012)}\,F^{(021)},$$

где $F^{(0ik)} = F(t_1,\ t_{2l},\ t_{3k})$, а частные значения переменных t_{3k} и t_{2l} выбраны так, что каждое из отношений $F^{(001)}:F^{(002)}:F^{(003)}$ является нетривиальной функцией, и две функции любой пары A_k, A_{k+1} ($k=1, 3, 5$) являются линейно независимыми. Показывается, что с помощью соотношений вида $\sum_{k=1}^{3} F^{(00k)}\,\psi_1^{(0k)}\psi_2^{(k0)}=0$, где $\psi_1^{(0k)} \equiv \psi_1(t_2,\ t_{3k})$ и $\psi_2^{(k0)} \equiv \psi_2(t_{3k},\ t_1)$ задача анаморфозы уравнения (1) может быть разрешена применением

известных условий анаморфозы с простым A-множителем. И. Ф. Шелихова

8340. Графическое моделирующее вычислительное устройство. Лермер (A graphical analog computer. Lermer August S.), Electr. Manufact., 1959, **63**, № 2, 82—85 (англ.)

Описывается номографическое устройство, представляющее собою набор карт с нанесенными на них составными номограммами из параллельных логарифмических шкал, на каждой из которых помечены переменные соответственно вычисляемой формуле. Имея набор таких карт, можно сравнительно просто находить приближенные результаты вычислений по разным формулам. Некоторое увеличение гибкости достигается за счет того, что на нескольких опорных прямых размещаются по две шкалы — например, для прямых и обратных значений той или иной величины, а при данном вычислении используется одна из них. Отмечается, что описанное устройство особенно удобно использовать в качестве вспомогательного средства при подготовке данных для электронных моделирующих установок. Рассмотрены конкретные примеры. А. Б. Штыкан

8341. Поправка. Бюл. Ин-та теор. астрон. АН СССР, 1958, **6**, № 10, 771

См. РЖМат, 1959, 4269.

8342. Годичное собрание Общества прикладной математики и механики. Кнёдель (Wissenschaftliche Jahrestagung der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik. Knödel W.), MTW-Mitt., 1958, 5, № 4, 226—228 (нем.)

С 8 по 12 апреля 1958 г. в гор. Саарбрюкене проходило годичное собрание Общества прикладной математики и механики (GAMM). Общее количество участников составило 350 чел. На пленарных заседаниях выступили с докладами: Коллатц (L. Kollatz) «Методы функционального анализа в численном решении дифференциальных уравнений», Бауэр (L. F. Bauer) «Тенденции развития электронных счетных машин», Ван-Данциг (D. van Danzig) «Некоторые аналитические результаты по движению моря на мелководье», Инцингер (R. Inzinger) «Проблемы техники и экономики и их математическое решение».

На секции прикладной математики выступали, в частности, Лёйхли (T. Läuchli) и Барт (W. Bart) «О полиномиальной аппроксимации», Шметтерер (L. Schmetterer) «Итерация со случайными погрешностями», Вальтер (A. Walther) «Развитие техники программирования для электронных счетных машин».

Были также сделаны сообщения о конкретных счетных машинах и организована выставка математических машин и инструментов. На выставке преобладали моделирующие устройства. М. Л. Бродский

8343 К. Замечание об эмпирических формулах и методе номографирования. Гаццано (Note sulle equazioni empiriche e i metodi nomografici. Gazzano Adriano. Milano, Univ. commerciale Luigi Bocconi, 1958, 96 p.— Litogr.), Bibliogr. naz. ital., 1958, **1**, № 2, 60 (итал.)

8344 К. Номографические расчеты. Кислер (Nomographisches Rechnen. Kiessler Fritz. Essen, W. Girardet, 1956, 190 S., 9.80 DM) (нем.)

Книга, предназначенная для студентов и инженеров, состоит из трех частей: две переменные, три переменные, более чем три переменных. Имеется много упражнений и иллюстраций, но теории мало. Предполагаются очень небольшие знания в области математики.

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 3, 237.

8345 К. Номография. Конорский, Крысицкий (Nomografia. Konorski Boleslaw, Krysicki Włodzimierz. Warszawa, P. W., 1956, 367 S., 24.20 zł.) (польск.)

8346 К. Приближенные вычисления. Мэтиеш (Calcule prin aproximatii. Mäties I. Cluj, Lit. Inv., 1958, 82 p., 4 lei.—Litogr.), Bibliogr. RPR, 1958, **7**, № 16, 569 (рум.)

8347 К. Принцип Релея и его применения в технике. Теория и практика энергетического метода для приближенного определения критических груза и скорости. Темпл, Бикли (Rayleigh's principle and its applications to engineering. The theory and practice of the energy method for the approximate determination of critical loads and speeds. Temple G., Bickley W. G. New York, Dover Publ., Inc., 1956, IV, 154 pp., 1.50 doll.) (англ.)

8348 К. О численной аппроксимации. Лангер (On Numerical Approximation. (Pros. Sympos. Math. Res. Center U. S. Army, Madison, Wisc., Apr. 21st—23rd, 1958). Ed. Langer Rudolph E. Madison, Univ. Wisconsin Press, 1959, x, 462 pp., ill., 4.50 doll.) (англ.)

8349 К. Интегральные уравнения и приближенный расчет балок. Загустин (Ecuaciones integrales y el calculo numerico de vigas. Zagustin A. Caracas, Univ. Centr. Venezuela, Fac. Ingenieria, s. a., 21 p.) (исп.)

ТАБЛИЦЫ

8350. Вспомогательные таблицы для решения уравнения Пуассона методом приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям для многоугольных областей. Стрешнева В. А., Тр. Матем. ин-та, АН СССР, 1959, **53**, 267—282

Автор рассматривает применение метода Л. В. Канторовича (Изв. АН СССР, 1933, **5**, 647—652) для решения уравнения Пуассона (задача Дирихле), когда областью является трапеция. Так как в этом случае нахождение приближенного решения сводится к решению линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, автор поставил целью составление таблиц корней соответствующих характеристических уравнений, а также вспомогательных коэффициентов. Таблицы составлены для параметра κ, связанного с заданием трапеции. Фактически вычислены не сами корни, а некоторые их модификации (то же относится к вспомогательным коэффициентам). Показано, как можно решить задачу, если областью будет многоугольник. Даны 2 примера. Я. И. Алихашкин

8351. Таблицы для диагонализации матриц второго порядка. Трис, Колман (Tables for diagonalizing second-order matrices. Trees R. E., Coleman C. de W.), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1958, **60**, № 3, 201—214 (англ.)

Приводится таблица $\sin\Theta/2$, $\cos\Theta/2$, $\operatorname{tg}\Theta/2$ (с точностью до 10^{-5}), где $\Theta=\operatorname{arctg}2z$, $z=0,(0,001)1,199$; $1/z=0(0,001)1,199$, применяющаяся при вычислении собственных значений и собственных векторов симметричных вещественных матриц второго порядка ($\Theta/2$ — угол поворота осей). Дан пример, иллюстрирующий возможность применения таблиц к приближенному решению той же задачи для матриц третьего порядка

М. Л. Бродский

8352 К. Пятизначные математические таблицы. 2 изд. Сегал Б. И., Семендяев К. А., М., Физматгиз, 1959, 464 стр., илл., 25 р. 30 к.

Основную часть книги составляют таблицы элементарных функций: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, e^x, e^{-x}, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, tg_x, $1/x$, x^2, x^3 (значения даны с 5 десятичными знаками для x от 0 до 10 с интервалом 0,001). В книгу включены также таблицы некоторых специальных функций: 1) даются значения интеграла вероятностей $\operatorname{erf} x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ для x от 0 до 2,5 с интервалом 0,001 (с 5 десятичными знаками для $x\leqslant 1{,}8$; с 6 десятичными знаками для $x\geqslant 1{,}8$; с 7 десятичными знаками

для x от 2,5 до 3 с интервалом 0,01) и указаны некоторые значения для $x>3$; 2) даны значения $\Gamma(x)$ для x от 1 до 2 с интервалом 0,001 с 5 десятичными знаками; 3) значения неполных эллиптических интегралов I и II рода даны с 5 десятичными знаками с интервалом 1° по аргументу φ и 5° по аргументу Θ; 4) значения полных эллиптических интегралов I и II рода $K=K(\Theta)=F(\frac{\pi}{2}, \Theta)$ и $E=E(\Theta)=E(\frac{\pi}{2}, \Theta)$ даны с интервалом, допускающим получение пятизначных цифр при помощи линейной интерполяции; 5) бесселевы функции $J_0(x)$, $J_1(x)$, $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $K_0(x)$, $K_1(x)$ даны с 5 десятичными знаками для аргумента от 0 до 10 с интервалом 0,01. Приводятся таблицы факториалов (для n от 1 до 50 с 6 десятичными знаками), степеней целых чисел (от четвертой до десятой для n от 1 до 50 с 6 десятичными знаками), несократимых дробей (со знаменателем, не превосходящим 20 с 6 десятичными знаками), пропорциональных частей, а также коэффициентов для квадратичного интерполирования по Бесселю и наиболее часто встречающихся постоянных (с 8 десятичными знаками). Даются некоторые основные формулы, применяемые при вычислении значений, помещенных в настоящих таблицах.

Настоящее издание таблиц выпущено фотомеханическим способом с тиража 1950 г. Таблицы могут служить пособием при производстве вычислений в различных областях математики и ее технических приложений.

И. Ф. Шелихова

8353 К. Семизначные математические таблицы. Прайд (Chambers's seven-figure mathematical tables. Full ed. Compil. Pryde James. London, Chambers, 1958, xxv, 392 pp., ill., 12 sh. 6 d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 469, 10 (англ.)

8354 К. Вычислительные таблицы Крелля. Зелигер (A. L. Crelle's Rechentafeln. Seeliger O. Neudruck, Berlin, W. de Gruyter, 1954, VII, 508 S., 36.—DM) (нем.)

8355 К. Числовые значения степеней чисел от 1 до 100 000, N^2, $\sqrt[3]{N}$, N^3, $\sqrt[3]{N}$. Шевалье, Клюзель (Valeurs numériques des puissances des nombres 1 à 100000, N^2, $\sqrt[3]{N}$, N^3, $\sqrt[3]{N}$. Chevalier André, Cluzel René, Paris, Delagrave, 1959, 84 p.), Bibliogr. France, 1959, **148**, № 22, 599 (франц.)

8356 К. Логарифмические таблицы. Пятизначные логарифмы и тригонометрические таблицы, соответствующие сотому разбиению (400 g). Койцш (Logarithmentafeln. Fünfstellige logarithm. und trigonometr. Taf. d. zentesimalen <400 g—> Teilg. 3. unveränd. Aufl. Koitzsch R. Berlin, Verl. Technik, 1958, 167 S., ill., 13.—DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, A, № 2, 145 (нем.)

8357 К. Таблицы бесселевых функций с точностью до одной десятитысячной. Сибагаки (0.01% tables of modified Bessel functions. With the account of the methods used in the calculation. Sibagaki Wasao. Tokyo, Baifukan, 1955, xxi, 129 pp., ill.) (англ., японск.)

Приводятся таблицы функций $\sqrt{x}\cdot I_n(x)$, $n=0,1,\ldots,22$ и $\sqrt{x}K_n(x)$, $n=0, 1, 2,\ldots,23$, причем в обоих случаях $x=0(0,01)1(0,02)5(0,04)25$. Таблицы составлены с относительной погрешностью 1 : 10000 (т. е. 0,01%). Поэтому табличные значения содержат четыре или пять значащих цифр. При пользовании таблицами квадратичная интерполяция почти всегда дает удовлетворительную точность. В начале книги даются довольно подробное описание таблиц (частично на английском языке), история их создания и изложение некоторых примененных численных методов. Табличные значения расположены в шести столбцах (один столбец для аргумента).

К. А. Карпов

8358 К. Математические таблицы, Т. I. Использование и составление математических таблиц. Фокс (Mathematical tables. Vol. I. The use and construction of mathematical tables. Fox L., London, H.M.S.O., 1956, 60 pp.) (англ.)

Математическое отделение Национальной физической лаборатории (Англия) приступило к изданию серии математических таблиц. Будут составлены таблицы тех функций, которые встречаются в повседневной работе лаборатории и для которых отсутствуют удовлетворительные таблицы. Данная книга является вводной ко всей этой серии. В ней весьма подробно описывается теория составления математических таблиц. Книга состоит из трех частей. В части 1 («Использование математических таблиц») рассматриваются типы математических таблиц, описывается расположение табличного материала, точность таблиц, употребляемые обозначения; подробно обосновывается необходимость использования вспомогательных функций, излагаются методы интерполирования: метод рядов Тейлора, интерполяционные формулы с конечными разностями, метод спуска (throw-back), позволяющий значительно сократить место и время при интерполировании, формулы Лагранжа, метод полиномов Чебышева; сравниваются различные методы интерполирования, излагаются методы обратного интерполирования. Приводятся формулы численного дифференцирования и интегрирования, необходимые при составлении таблиц; далее излагаются методы интерполирования по таблицам с двумя входами, интерполирование в комплексной области.

Часть 2 («Вывод формул и оценка погрешности») содержит общие соображения о различных типах погрешностей при интерполировании; излагается подробная теория метода спуска и оценка погрешности соответствующих интерполяционных формул, теория и оценка погрешности метода экономизирующих интерполяционных полиномов. В добавлении приводятся все интерполяционные формулы, формулы численного дифференцирования и интегрирования; излагается теория обобщенного метода спуска, интерполяционная формула Эверетта — Бесселя — Чебышева, ее связь с формулами метода спуска, формула Эверетта — Чебышева, ее связь с формулами Эверетта — Бесселя — Чебышева.

Часть 3 («Составление математических таблиц») содержит изложение методов вычисления алгебраических и трансцендентных выражений и бесконечных рядов, вычисление корней алгебраических и трансцендентных уравнений, решение систем линейных уравнений, вычисление производных и интегралов, решения обыкновенных дифференциальных уравнений, краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, решение интегральных уравнений, решений дифференциальных уравнений с частными производными и некоторые другие вопросы численных методов.

Описаны также методы субтабулирования и методы контроля. В конце книги к каждой из перечисленных частей приводится библиография. В начале книги кратко описаны неопубликованные и опубликованные таблицы, составленные ранее математическим отделением национальной физической лаборатории. К. А. Карпов

8359 К. Пятизначные математические таблицы. Вейденес (Noordhoff's wiskundige tafels in 5 decimalen. 6de druk. Wijdenes P. Groningen, P. Noordhoff, 1958, 272 blz., 9.50 fl.) (голл.)

Приведены таблицы десятичных логарифмов для $x=1(1)12009$; логарифмы тригонометрических функций для $x=0(1''20'(10'')2°(1')45°$; таблицы перевода 1) градов в градусы и обратно (100 град=90°), 2) градов в радианы и обратно (100 град=1,570... радиан), 3) градусов в радианы и обратно (1°=0,0174... радиан); таблицы тригонометрических функций от аргумента, выраженного в градусах и радианах для $x=0(1')45°$; табли-

цы котангенса для $x=1''(1'')3°(10'')10°$; натуральные логарифмы для $x=0(1)1000$; натуральные логарифмы простых чисел из интервала (1000, 10000); таблица перевода натуральных логарифмов в десятичные; показательная функция для $x=0{,}001(0{,}001)1(0{,}01)4$; гиперболические функции для $x=0{,}01(0{,}01)4(0{,}1)7$; таблицы величин n^2, n^3, $\sqrt[3]{n}$ $\sqrt{n}$, n^{-1} для $n=1(1)1000$. а также ряд наиболее употребительных констант, специальных функций.

Почти везде линейная интерполяция обеспечивает точное значение пятого знака. Неодинаковый цвет страниц, соответствующих разным разделам, облегчает пользование книгой. В. К. Саульев

См. также: 7769, 7773, 7774, 8006, 8087, 8161.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Редактор *Д. Ю. Панов*

8360. Два свойства псевдослучайных последовательностей. Кемпбелл (Two properties of pseudo-random sequences. Campbell L. Lorne), IRE Trans. Inform. Theory, 1959, 5, № 1, 32 (англ.)

Рассматриваются некоторые свойства так называемых «псевдослучайных» последовательностей, которые определяются в статье следующим образом. Имеется последовательность $A_0=a_1, b_2,\ldots, a_n)$, члены которой равны $+1$ или -1. Далее имеется ряд последовательностей $A_k=(a_{k+1},a_{k+2},\ldots,a_n,a_1,\ldots,a_k)$; $k=0,1,2,\ldots n-1$, являющихся циклическими перестановками исходной последовательности A_0. Комплект последовательностей A_0, $A_1,\ldots$, A_{n-1} называется n-значным перестановочным алфавитом, если в нем нет двух идентичных последовательностей. Далее рассматривается коэффициент ковариации

$$r_j=\sum_{i=i}^{n} a_{k+1}a_{k+i+j}=\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot a_{i+j}.$$

Последовательности A_l называются псевдослучайными, если коэффициенты ковариации удовлетворяют следующим соотношениям: $r_0=n$; $r_j=-1(j=1, 2,\ldots,n-1)$. Алфавит A_0, $A_1,\ldots$, A_{n-1} при этом называется n-значным псевдослучайным алфавитом. В статье рассматривается ряд свойств таких последовательностей и выводятся два новых свойства, связанные с возможностью использования, передачи и приема таких последовательностей в системах дискретного действия и, в частности, передачи их по симметричному двоичному каналу (канал связи, по которому могут передаваться только двоичные знаки — нули и единицы, причем вероятности правильного приема нуля и единицы, т. е. приема их как нуля и единицы, равны между собой, вероятности неправильного приема каждого из этих знаков также равны). Первое из доказываемых свойств заключается в том, что среди всех n-значных перестановочных алфавитов псевдослучайный алфавит отличается максимальным «отличием». Под «отличием» понимается минимальное число изменений членов данной последовательности на противоположные, необходимое для того, чтобы измененная последовательность превратилась в другую последовательность этого же алфавита. Иными словами, последовательности псевдослучайного алфавита отличаются друг от друга сильней, чем последовательности любого другого алфавита той же длины n. Это свойство позволяет использовать псевдослучайные последовательности при создании самокорректирующихся кодов. Второе свойство, доказываемое в статье, может быть использовано в системах дискретного действия, в которых имеется обнаружение ошибок, но нет их коррекции. Это свойство заключается в том, что вероятность неправильного приема по симметричному двоичному каналу данной переданной последовательности n-значного престановочного алфавита (т. е. принятия ее за некоторую другую последовательность алфавита) больше или равна соответствующей вероятности для n-значного псевдослучайного алфавита.

В. А. Брик

8361. Система «Share 709». Объединенные усилия. Шелл (The Share 709 system: a cooperative effort. Shell Donald L.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1959, 6, № 2, 123—127 (англ.)

Сообщается о создании в декабре 1956 г. Объединенного комитета по подготовке наиболее совершенного метода использования различными организациями вычислительной машины ИБМ-709. В задачу комитета входит создание стандартного языка для использования его в вычислительной машине, аналогичного тому, который использовался фирмой «Дженерал Электрик» при эксплуатации машины ИБМ-704 и языку, разработанному Массачусетским технологическим институтом для машины «Вихрь».

Работа Комитета привела к созданию системы СКАТ (SCAT), к которой предъявлялись требования простоты, минимального участия программиста, автоматического обнаружения ошибок, работы как с перфокартами, так и с перфолентами, безостановочной работы вычислительной машины. На первом этапе был принят символический язык машины, используемый в системе «Share 704». Команды, записанные в виде макроинструкций (реф. 8364), алгебраических выражений, подпрограмм и т. д., в специальном устройстве — компиляторе сводятся в символическую программу машины. Полученная преобразованная программа корректируется, модифицируется при участии программиста в специальном устройстве обработки программы. Преимуществом такой системы является возможность исправления программ в единой символической форме. Для развития этой системы рассматривались 3 пути: 1) Комитет полностью берет на себя ответственность за систему, включая кодирование программ и проверку их; 2) Комитет полностью описывает систему, а члены объединения сами создают отдельные программы; 3) Комитет описывает систему, но кодирование и проверка производятся производителем.

Был выбран третий путь. Для планирования системы было затрачено около 5 человеколет, и 10—15 человеколет потребуется производителям для детального анализа, программирования, кодирования, проверки и компановки системы. Полная система должна содержать около 46000 слов команд и таблиц, причем около 13000 слов потребуется для компилятора, а остальные будут использоваться в устройствах модификации и обработки программ, входном и выходном преобразователях, устройстве обнаружения ошибок и в системе контроля.

О. В. Бачин

8362. Система «Share 709». Программирование и модификация. Гринуолд, Кейн (The Share 709 system: programming and modification. Greenwald Irwin D., Kane Maureen), J. Assoc. Comput. Machinery, 1959, 6, № 2, 128—133 (англ.)

Описываются основные трудности, связанные с применением трех основных типов кодирования: абсолютного, относительного и символического. Рассматриваются проблемы, возникающие при изменении данных, обнаружении ошибок, благодаря тому, что язык программиста не является полностью символическим и сущест-

вует разница между языком программиста и языком машины.

Команда машины ИБМ-709 содержит: тип операции, адрес, ярлык нуля или одного из трех регистров индекса, декремент, используемый для модификации содержимого регистров индекса и признак счета, используемый для рассмотрения таблиц и в операциях преобразования. Последние два признака не могут существовать вместе и размещаются на одном месте. Входные данные системы СКАТ (реф. 8361) содержат адресное поле, поле операции, поле переменной и поле примечаний, из которых только адресное поле постоянно и занимает 7 колонок. Остальные поля переменны и разделяются пропуском колонки. Коды операций мнемонические и занимают от 1 до 6 колонок. Поле переменной содержит адрес, признак и декремент или признак счета. Полная длина программы ограничивается лишь числом колонок перфокарты.

Командами системы СКАТ могут являться: команды машины ИБМ-709, псевдокоманды, макрокоманды, команды модификации. Имеется три типа псевдокоманд: команды для получения постоянных данных, кодированных в десятичной, восьмеричной системе счисления или в системе счисления, принятой в машинах «Голлерит»; 6 команд, обеспечивающие гибкость выдачи данных, которыми управляет программист; все остальные псевдокоманды, применяемые непосредственно в системе СКАТ, в которые входят команды, облегчающие комбинирования различных программ. Макрокоманды служат для образования слов и последовательностей слов. При помощи макрокоманд стягиваются в одну несколько часто повторяющихся команд. К макрокомандам относятся две команды для образования специальных входов и выходов из стандартных подпрограмм, система команд для проверки программы, система команд для обработки входных и выходных данных. Макрокоманды имеют те же размеры, что и другие команды СКАТ. Из команд модификации наиболее распространенной является «замена», предназначенная для ввода и стирания информации по какому-либо адресу. Имеется команда для установления численных значений различных символов, команда, предназначенная для модификации как целиком перфокарт, так и отдельных слов, и команда для обработки примечаний. Система СКАТ позволяет иметь только один символический язык для машины и программиста. О. В. Бачин

8363. Система «Share 709». Введение символической программы в машину. Бём, Стил (The Share 709 system: machine implementation of symbolic programming. Boehm E. M., Steel T. B., Jr), J. Assoc. Comput. Machinery, 1959, **6**, № 2, 134—140 (англ.)

Передача в машину символической программы, содержащей до 50 символов, затруднительна. Поэтому был разработан двоичный сжатый код SQUOZE. Этот код позволяет сократить программу в 10 раз за счет реорганизации команд, при которой объединяются все адресные данные в одну группу. Код SQUOZE не является оптимальным, ибо неизвестна вероятность появления команд, однако выделены 32 наиболее частые команды, записанные в пятиразрядном коде. Остальные 218 команд объединены в группу девятиразрядных кодов. Дополнительный разряд служит для определения группы. Дешифрирование заключается в определении дополнительного разряда и табличного определения команды. Время ввода команды составляет 18 мксек, из которых 16,5 мксек занимает дешифрирование. Подготовленный код SQUOZE содержит введение, устанавливающее порядок обработки и использование запоминающих устройств, предисловие, дающее информацию о данных, не переводимых на язык машины, словарь, содержащий список символических слов программы и текст. В словаре для каждого слова дается адрес соответствующего кода SQUOZE в запоминающем устройстве машины. Каждое символическое слово содержит 6 символов, для записи которых потребовалось бы 36 двоичных разрядов. Для уменьшения числа разрядов каждый символ рассматривается как разряд в пятидесятеричной системе счисления, а слово как шестиразрядное число. Теперь для записи слова требуется 34 двоичных разряда и 2 разряда используются для определения характера символов. Данные передаются блоками по 255 слов. 256-е слово является контрольным и по нему судят о правильности работы машины. Программа, составленная программистом, кодируется как кодом SQUOZE, так и обычным кодом машины.

Такой же словарь может быть составлен и для входных и выходных данных, а также для контрольных программ, что позволяет применять символический код для обнаружения ошибок. О. В. Бачин

8364. Система «Share 709». Входные и выходные преобразования. Ди-Гри, Кинг (The Share 709 system: input-output translation. DiGri Vincent J., King Jane E.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1959, **6**, № 2, 141—144 (англ.)

Описана система программ ввода и вывода для вычислительной машины ИБМ-709. Используется четыре типа макрокоманд: преобразования, управления, передачи и модальные команды. Как и обычные команды машины ИБМ-709, эти команды содержат код операции и четыре поля. В макрокомандах преобразования в первом записывается адрес, в который должен быть помещен результат, во втором — адрес регистра индекса, модифицирующего содержание первого поля, третье поле содержит номер колонки перфокарт, с которой начинается передача данных, а четвертое — номер колонки в блоке передаваемых данных. Макрокоманды преобразования применяются для перевода входной информации в двоично-десятичной, десятичной, восьмеричной и т. д. форме в двоичный код машины и размещения ее в запоминающем устройстве машины. С помощью этих команд могут быть введены и символические выражения. Макрокоманды управления приспособлены для выполнения логических операций, таких как передача управления, повторение команд и т. д.

Макрокоманды передачи используются для переноса следующих входных данных в оперативное запоминающее устройство для последующего преобразования. С помощью модальных макрокоманд программист устанавливает постоянные условия выполнения программы. Он дает определение ошибки, устанавливает порядок устранения ошибки, определяет положение двоичной запятой для случаев преобразования информации в код с фиксированной запятой. Модальные команды могут содержать адреса для некоторых других макрокоманд, и поэтому они должны читаться первыми, но необязательно непосредственно перед теми операциями, с которыми они связаны. Дано описание некоторых входных-выходных макрокоманд. Отмечается, что вопрос экономичности введения такого метода ввода еще полностью не решен, так как еще очень велик объем запоминающего устройства, необходимый для хранения таблиц преобразования. О. В. Бачин

8365. Система «Share 709». Программируемое входное-выходное промежуточное хранение. Мок, Свифт (The Share 709 system: programmed input-output buffering. Mock Owen, Swift Charles J.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1959, **6**, № 2, 145—151 (англ.)

Вычислительная машина ИБМ-709 имеет оперативное запоминающее устройство на 8192—32768 чисел и от 8 до 48 блоков хранения на магнитной ленте. Так как машина выполняет основные операции за 24 мксек., для обеспечения бесперебойной работы машины необходимо одновременное выполнение нескольких входных-

выходных операций. Кроме того, обычно входные и выходные данные при решении научных задач, для которых предназначена машина, передаются большими блоками. Поэтому необходима специальная буферная область запоминающего устройства, куда могли бы вводиться данные параллельно с работой основного запоминающего устройства. Система выполнения вводных и выводных программ одновременно с основной программой включает стандартизацию физических и логических размеров блоков данных, систему внутренних таблиц, описывающих текущее состояние буферного запоминающего устройства, сами буферные устройства и программы, управляющие блоками ввода и вывода. Принят размер блока данных в 255 чисел.

Для определения логического объема блока в него вводятся специальные числа-определители. Определитель типа определяет вид последующей информации определитель фазы указывает на передачу данных из одного вводного-выводного устройства в другое, минуя оперативное запоминающее устройство, определитель конца ограничивает данный вид информации, определитель группы дает адрес для записи следующего блока информации и количество чисел в блоке, определитель символа используется для нахождения данных.

В оперативном запоминающем устройстве хранятся таблицы пользования буферным запоминающим устройством. Там же хранятся стандартные программы. В статье приводятся схемы, поясняющие взаимодействия стандартных программ при непрерывной обработке информации. Для определения правильности работы буферной системы имеется стандартная программа проверки, которая может быть включена вручную. О. В. Бачин

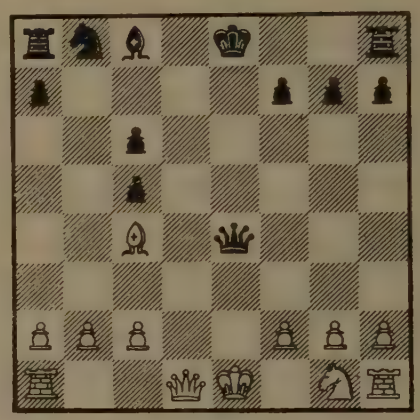
8366. Система «Share 709». Управление. Братман, Болдт (The Share 709 system: supervisory control. Bratman Harvey, Boldt Ira V., Jr), J. Assoc. Comput. Machinery, 1959, **6**, № 2, 152—155 (англ.)

Программа управления служит для координации всей системы «Share 709» при непрерывной обработке группы независимых работ. Все работы в системе «Share» делятся на 4 группы: выполняемые в одну фазу, требующие входную обработку и выполнение, требующие выполнение и выходную обработку и требующие выполнение и входную, и выходную обработку. Все эти работы выполняются одновременно. Программа управления позволяет записывать число каждого типа работ, время выполнения каждой работы, блоки машины, занятые для каждой работы. Для более полной загрузки системы выполненные работы заменяются новыми. Программа управления делится на 3 основные части: 1) основная программа, вводимая между работами; 2) текущие программы, находящиеся все время в работе, устанавливающие оптимальные действия в спорных случаях и обеспечивающие управляющей информацией программы системы; 3) специальные программы, вводимые при работе со специальными программами. О. В. Бачин

8367. Машина играет с шахматистом. Бернстейн, Робертс (Computer v. chess-player. Bernstein Alex, Roberts Michael de V.), Scient. Amer., 1958, **198**, № 6, 96—98, 100, 103, 105 (англ.)

Описывается в общих чертах способ составления программы для игры в шахматы с помощью вычислительной машины ИБМ-704. Программа построена в предположении, что для машины выбрана определенная стратегия игры и она делает ходы, подчиненные этой стратегии. На основе некоторых правил машина выбирает 7 ходов для детального изучения. Для каждого из этих ходов она рассматривает 7 возможных ответов противника (на основе тех же правил). Для каждого возможного ответа противника она рассматривает 7 своих возможных ходов, а затем снова на каждый свой ход — 7 возможных ответов противника. Всего машина проверяет 2800 позиций, каждую из которых она оценивает количественно по некоторым правилам. Затем в качестве своего первого хода машина выбирает тот ход, который ведет к позиции, получившей наивысшую оценку как для нее, так и для противника. Таким образом машина рассматривает 2 своих хода вперед и 2 ответа противника, с 7 выборами на каждом шаге. Эти пределы диктуются фактором времени. На выбор каждого хода машина тратит в среднем 8 мин. Если бы она оценивала на каждом уровне 8 выборов, то она тратила бы на каждый ход 15 мин. Если бы она рассчитывала 3 своих хода вперед, ей бы потребовалось для одного хода 6,5 час. Даже для машины с бо́льшей скоростью выполнения операций вряд ли буде́т целесообразным рассматривать более чем 3 своих хода вперед с 8 возможными выборами на каждом этапе.

Человек



Машина

Ход машины: Фd1 — e2.

Для игры машины характерно следующее: 1) она не бывает невнимательной; 2) отдельные ходы она иногда выбирает хорошо; 3) партию в целом она играет слабее хорошего игрока-человека. Авторы указывают, что при повторении той совокупности ходов, которая привела к плохому ходу машины, она неизбежно повторит этот плохой ход. Приводится пример сильного хода машины в одной из партий (фиг.) и пример партии, сыгранной машиной против человека, которую машина проиграла. Г. П. Багриновская

8368. Электронная счетная машина института физики Академии PHP CIFA-1. Тома В., Rev. phys. Acad. RPR, 1958, **3**, № 1, 77—80

В институте атомной физики Академии PHP подготавливается к пуску электронная счетная машина CIFA-1. Машина параллельного действия, работающая в двоичной системе счисления с фиксированной запятой (30 двоичных разрядов плюс знак числа). Система команд одноадресная. Ввод данных — перфолента, магнитная лента. Вывод — пишущая машинка. Запоминающее устройство на магнитном барабане. Емкость — 1024 числа. Время выборки числа 10 мсек. Приводится полный список команд машины. Скорость выполнения операций: сложение 150 мксек, умножение 5 мсек. Отмечается, что при использовании быстродействующих запоминающих устройств (электронно-лучевые трубки или ферритовые сердечники) скорость работы машины может быть повышена. Н. Н. Поснов

8369. Высокомобильная войсковая вычислительная машина, разработанная для армии США (A highly mobile combat computer developed for U. S. Army), J. Mach. Account., 1959, **10**, № 2, 29 (англ.)

Сообщается о разработке фирмой «ИБМ» по контракту с армией США двух блоков вычислительного

устройства для использования в полевых условиях. Один из блоков предназначен для ввода и вывода информации, другой — для ее обработки. Устройство в течение 1 сек. складывает 30000 десятиразрядных чисел. Предусмотрен внутренний контроль ошибок. Оба блока могут перевозиться по воздуху, их общий вес около 80 *кг*. О. В. Бачин

8370. Чехословацкая релейная вычислительная машина САПО. Облонский (The Czechoslovak relay computer SAPO. Oblonsky Jan), Res and Engng, 1958, 4, № 1, 34—36 (англ.)

8371. Новая вычислительная машина для Технологического института в штате Иллинойс (New computer for IIT campus), Electr. Engng, 1959, 78, № 2, 171 (англ.)

Краткое сообщение об установке весной 1959 г. вычислительной машины УНИВАК-1105 (развитие известной модели ИРА 1103-А) фирмы «Ремингтон Ренд» в Иллинойском технологическом институте.

8372. Анализ блок-схем цифровых электронных машин последовательного действия. Михайлов Г. А., Автоматика и телемеханика, 1957, 18, № 12, 1109—1119 (рез. англ.)

См. РЖЭ, 1958, № 14, 25711.

8373. ИБМ-610 — вычислительная машина с плавающей запятой (IBM 610 «Auto Point Computer), MTW-Mitt., 1958, 5, № 1, 59—60 (нем.)

См. РЖЭ, 1959, № 2, 3468.

8374. Вычислительная машина КАБ-3026 фирмы «СЭА». Хофсас (La calculatrice C. A. B. 3026 de la S. E. A. Hoffsaes), Bull. inform. mécanogr., 1958, № 21, 31—86 (франц.)

См. РЖЭ, 1959, № 14, 29874.

8375. Электронная вычислительная машина с программным управлением. III. Хубер (Programmgesteuerte elektronische Rechenmaschinen. III Huber A.), Funk-Technik, 1957, 12, № 24, 828—830 (нем.)

См. РЖЭ, 1958, № 24, 46841; I и II части см. РЖМат, 1960, 2488, 3595.

8376. Магнитные элементы для вычислительных машин. Райхман (Magnetics for computers. Rajchman Jan A.), Nonlinear Magnetics and Magnetic Amplifiers. (Conf., 1958, Los Angeles, Calif). S. l., Amer. Inst. Electr. Engrs, 1958, 179—221 (англ.)

Обзор состояния применения магнитных материалов в вычислительной технике, охватывающей 39 статей, перечисленных в библиографии. Принято деление всех элементов на элементы, применяемые в запоминающих устройствах с произвольным выбором, и на логические переключающие схемы. Рассмотрены запоминающие устройства на магнитных сердечниках с выбором адреса по совпадению токов или с внешним выбором адреса. Отмечается, что при современном уровне техники запоминающие устройства, построенные на ферритовых перфорированных платах и на твисторах, не уступают устройствам на сердечниках. Большее быстродействие ожидается от запоминающих устройств на сверхтонких пленках. Уже получены пленки, перемагничивающиеся за 10 *мксек*. В качестве логических переключающих схем рассмотрены комбинационные переключатели, переключатели тока, регистры сдвига, параметры, трансфлюксоры и т. д. О. В. Бачин

8377. Твистор, его использование в матричном запоминающем устройстве. Бобек, Тайтл (The twistor — its use in a memory array. Bobeck A. H., Title R. S.), Nonlinear Magnetics and Magnetic Amplifiers. (Conf., 1958, Los Angeles, Calif.). S. l., Amer. Inst. Electr. Engrs, 1958, 234—242 (англ.)

Спиральная магнетизация, присущая твистору, может быть создана в проводе двумя путями: 1) скручиванием магнитного провода; 2) наматыванием вокруг центрального проводника провода или ленты из материала с прямоугольной петлей гистерезиса.

Поле для управления таким элементом создается путем сложения концентрического поля, получаемого путем посылки тока вдоль самого центрального провода, и продольного поля соленоида, намотанного на твистор.

Особенностью твистора является его тройная функция: по нему посылается ток записи, он служит запоминающим элементом, с него снимается выходной сигнал. Величина выходного сигнала прямо пропорциональна индукции насыщения материала, длине участка, на котором размещается двоичный разряд, и диаметру провода. Для обеспечения большей плотности записи приходится находить компромисс между величиной выходного сигнала и числом двоичных разрядов на единицу длины твистора. Скорость переключения твистора лимитируется вихревыми токами в проводе. Коэффициент переключения прямо пропорционален индукции и квадрату радиуса провода и обратно пропорционален удельному сопротивлению материала твистора.

Описана матрица 20×20, выполненная на проволоке 42 размера, на которую наматывалась по спирали с узлом 45% лента из молипермаллоя 4—79 шириной 0,075 *мм*, толщиной 10 *мк*. По 10 таких проводов припаиваются к печатной панели и заливаются специальным составом для устранения провисания проводов. 2 панели устанавливаются в рамку, вокруг которой наматывается 20 соленоидов, каждый из которых имеет 50 витков, длину 6 *мм* и сечение 19 *мм*×3 *мм*.

Запись и считывание производятся по совпадению токов в твисторе и соленоиде. Ток в соленоиде 132 *ма*. При считывании «1», а затем «0», разрушенного 8 импульсами тока, посылаемого по твистору, наблюдалось отношение сигнала к помехе лучшее чем 6:1. Переключение при считывании «1» происходило за 0,6 *мксек*. Представлены статистические данные испытания матрицы в обычном режиме и режиме со смещением тока 48 *ма* по проводу твистора. Твистор работает при более высоких температурах, чем обычные ферритовые сердечники. Библ. 4 назв. О. В. Бачин

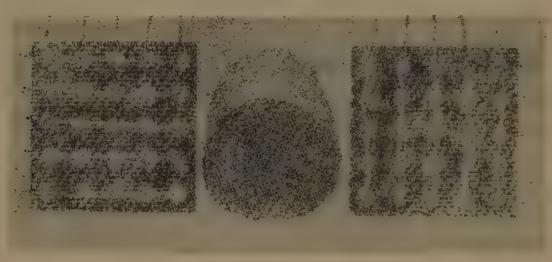
8378. «Твистор» — новое запоминающее устройство вычислительной машины (Twistor — a new computer memory), Engineering, 1957, 184, № 4790, 824—825 (англ.)

См. также РЖМат, 1959, 11654.

8379. Криозар — новый низкотемпературный элемент вычислительных машин. Мак-Уэртер, Редикер (The cryosar — a new low-temperature computer component. McWhorter A. L., Rediker R. H.), Proc. IRE, 1959, 47, № 7, 1207—1213 (англ.)

Криозар — новый полупроводниковый элемент, использующий низкотемпературный лавинообразный пробой в германии, вызванный ударной ионизацией примесей. Существующие криозары, изготовленные из германия с примесями III и V группы, работают при температуре 4,2°К. При этих температурах германий имеет сопротивление 10^9 *ом* на 1 *см*, так как носители, подвижные при комнатной температуре, собираются вокруг центров примесей. Когда же электрическое поле, прилагаемое к германию, достигает величины, достаточной для ударной ионизации включений, и скорость ударной ионизации превысит скорость рекомбинации, то происходит реверсивный лавинообразный пробой, сходный с лавинообразным пробоем в газе, в результате чего сопротивление германия падает на 7 порядков величины. В статье описаны 2 типа криозаров: криозар из некомпенсированного германия типа P с примесью индия обладает диодной характеристикой и может применяться в переключающих и вентильных схемах вычислительной техники, криозар из компенсированного сурьмой германия с примесью индия имеет область

отрицательного сопротивления и поэтому может применяться в бистабильных схемах. Криозары выполняются на германиевой пластине вафельного типа, причем процесс происходит в основном между омическими контактами по обе стороны пластины и нет рассеивания процесса по объему вафли. Поэтому на одной пластине может быть помещено очень большое количество элементов. В статье приводятся характеристики 10 вафельных пластин площадью 1 *см*^{2} и толщиной 0,5 *мм*, на которых размещалось по 5×5 не зависимых друг от друга криозаров (см. фото; между пластинами виден конец сигареты, положенной для масштаба). Вафельные пластины изготовлены как путем графирования, так и с помощью пескоструйного аппарата. В бистабильном криозаре поле пробоя и поле, поддерживающее разряд, являются функцией от плотности включений в компенсированном германии, причем для поддерживающего поля эта зависимость носит линейный характер. Быстродействие как моностабильных, так и бистабильных криозаров ограничивается временем переключения от высокого сопротивления к низкому. При больших форсировках прилагаемого поля над пробивным это время становится очень малым. Так, при прилагаемом поле в 1,8 раза большем пробивного, время увеличения тока от 10^{-5} *а* до 10^{-2} *а* меньше чем 10 наносек (10^{-9} сек). Скорость обратного процесса, т. е. рекомбинации, зависит от компенсации образца, однако это время очень мало и предполагается порядок 10^{-10} сек. При освещении бистабильного криозара пробивное напряжение его существенно понижается. Освещение может быть использовано для управления криозаром, аналогично управлению тиратроном по первой сетке. Следует заметить, что если скорость работы криозара при управлении электрическими импульсами лежит в наносекундной области, то управление светом осуществляется за микросекунды и медленнее. Моностабильные криозары могут выполнять функции обычных диодов, однако их характеристики аналогичны характеристикам диодов со смещением. Бистабильные криозары могут работать как триггеры, мультивибраторы или как запоминающие элементы на частотах, превышающих 100 *мгц*. Плотность размещения криозаров ограничивается лишь опасностью возникновения поля, равного пробивному, между контактами двух соседних криозаров. Считается достаточным, чтобы расстояние между криозарами вдвое превышало толщину вафли германия. Поэтому в пластине площадью 1 *см*^{2} и толщиной 0,12 *мм* может быть размещено 625 криозаров, имеющих диаметр контактов 0,12 *мм*. Расстояние между соседними криозарами может быть 0,28 *мм*. Если использовать расстояние между вафлями 0,4 *мм*, то в 1 *см*^{3} может разместиться около 12 500 криозаров. Учитывая, что энергия, рассеиваемая криозаром, даже в проводящем состоянии не превышает 10^{-6} *вт*, требования к холодильнику не будут слишком высоки. Одно из возможных применений криозаров, управляемых светом, лежит в построении на них задающих устройств вычислительных машин, смена информации в которых может быть произведена сменой световой маски. На таких криозарах может быть построено вводное устройство для чтения информации из буферного запоминающего устройства на кинопленке, а также производиться опознавание конфигураций.



О. В. Бачин

8380. Общий обзор конференции по безламповым запоминающим и переключающим устройствам. Раймер (Summarized proceedings of a Conference on Solid State Memory and Switching Devices. London, Sept., 1958. Rymer T. B.), Brit. J. Appl. Phys., 1958, 10, № 4, 153—158 (англ.)

Обзор докладов, представленных на конференции по физике твердого тела, созванной группой электроники физического института в Лондоне 26—27 сентября 1958 г. Отмечается общая тенденция к построению запоминающих устройств на магнитных элементах, хотя и сообщается о разработке устройств на электронно-лучевых трубках с барьерной сеткой емкостью 128×128 двоичных знаков. Для повышения быстродействия матричных магнитных запоминающих устройств исследуются новые материалы такие, как медно-магниевые ферриты, уменьшаются размеры сердечников. Сообщается об использовании в качестве запоминающих элементов ферритовых бусинок, наплавленных прямо на 50 *мк* провода. Описано запоминающее устройство, требующее 2 сердечника на двоичный знак, работающее на частных циклах от импульсов тока длительностью 100 *мксек*. Продолжаются работы по созданию ферроэлектрических запоминающих устройств. Для обеспечения работы ферроэлектриков по принципу совпадающих токов предлагается напряжение от источника питания передавать на ферроэлектрик через нелинейное сопротивление полупроводникового слоя, нанесенного между кристаллом и электродом, которое может скомпенсировать нелинейное коэрцитивное поле ферроэлектрика.

Разработаны новые материалы, конкурирующие с титанатом бария такие, как гианидин аллюминиум, сульфат гексагидрат и триглицин сульфат. Получены времена переключения до 10 мксек. В триглицин сульфате ясно наблюдались две картины переключения доменов, которые предполагались для титаната бария, а именно логарифмическая зависимость между электрическим полем и скоростью переключения при низких полях и линейная при высоких.

Основные свойства магнитных тонких пленок были разработаны в докладе Вильямса (General Electric Co.), причем в теоретическом анализе перемагничивания в тонких пленках он исходил из уравнения Ландау — Лифшица.

Доклад Фаллера (Mullard Research Laboratories) был посвящен анализу поведения доменов в тонких пленках. Представлены фотографии, показывающие перемещение стенок доменов. Движению стенок доменов в негомогенных полях был посвящен доклад Мура и Юнга (Rogal Radol Establishment). Ряд докладов был посвящен сверхпроводящим элементам криотронам и персисторам. Отмечается, что для пленочных криотронов получено время переключения порядка 1 мксек. Наиболее перспективным является элемент Кроу, выполненный из сверхтонкой магнитной пленки в виде пряжки с двумя полукруглыми отверстиями и линейной перемычки между ними. Направление тока в перемычке указывает двоичную цифру информации. Ячейка рассеивает энергию 10^{-10} *дж*.

Сообщается о выпуске новых установок снабжения жидким гелием стоимостью около 3000 фунтов стерлингов, дающих 1,8 *кг* жидкого гелия в час, обеспечивающее запоминающее устройство с мощностью рассеивания 3 *вт*, что позволяет иметь $3 \cdot 10^{10}$ запоминающих элементов. Библ. 12 назв.

О. В. Бачин

8381. Надежность магнитного запоминающего устройства матричного типа с линейным выбором. Глухов Ю. Н., Росницкий О. В. В сб.: Вычисл. техн. М., АН СССР, 1958, 131—139
См. РЖЭ, 1959, № 8, 16031

8382. Устройства передачи между запоминающими устройствами разных типов. Схолтен (Transfer facilities between memories of different types. Scholten Carel S.), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, 4, 118—119, 226 (англ.; рез. нем.)
См. РЖЭ, 1958, № 12, 21621.

8383. Производство высококачественных недорогих магнитных запоминающих сердечников для расширяющегося рынка цифровых вычислительных машин. Снайдер (Producing high-performance low-cost magnetic memory cores for an expanding digital computer market. Snyder C. L.), Computers and Automat., 1959, 8, № 3, 9—11 (англ.)

Кратко излагается история развития запоминающих устройств на магнитных сердечниках. Далее описывается производство сердечников фирмой «General Ceramics Corp.» (США). Показаны фото станков для изготовления и для контроля сердечников. Последние образцы специального оборудования изготовляют и проверяют 10 сердечников в 1 сек. или 250 000 сердечников за 8-часовую смену. Сердечники изготовляются двух типов. Первый тип имеет наружный диаметр 2,03 *мм* и внутренний диаметр 1,27 *мм*, второй тип — соответственно 1,27 и 0,76 *мм*. В. А. Брик

8384. Применение дрейфовых транзисторов в вычислительных машинах (Drift transistors in computers), Radiotronics, 1959, 24, № 2, 36—39 (англ.)

Описываются способы применения дрейфовых транзисторов в схеме устройства для переключения тока, в которой с максимальным эффектом могут быть использованы достоинства этого вида полупроводниковых триодов.

Основные особенности таких схем: а) все транзисторы работают в ненасыщенном режиме, б) ток эмиттера транзистора во включенном состоянии поддерживается неизменным и не зависит от параметров транзистора, в) схемы не требуют включения реактивных элементов, которые могут включаться только в особых случаях, г) применяется непосредственное включение и система может быть настроена на работу при малых колебаниях напряжения, д) используется сравнительно много транзисторов и мало диодов, е) системы способны к выполнению переключений с очень высокой частотой. Приводятся схемы триггерных ячеек, схемы выполнения логических операций И и ИЛИ, а также схема полусумматора. Приведенная в качестве примера схема с приведенными параметрами элементов обеспечивает фронт и спад импульса порядка 0,015 мксек. И. Д. Алимов

8385. Генератор импульсов на полупроводниковых триодах для цифровых систем. Гамильтон (A transistor pulse generator for digital systems. Hamilton Douglas J.), IRE Trans. Electronic Comput., 1958, 7, № 3, 244—249 (англ.)

Рассматриваются некоторые вопросы проектирования блокинг-генератора на полупроводниковых триодах. Подробно анализируется зависимость длительности импульса генератора от тока нагрузки и параметров триода. Рассчитываются формулы для длительности импульса, при этом трансформатор считается идеальным, а триод заменяется моделью. С точки зрения стабильности длительности импульса более предпочтительной оказывается схема блокинг-генератора с заземленной базой. Предлагается новая схема блокинг-генератора, которая имеет следующие параметры: частота повторений до 500 *кгц*; длительность импульса от 0,5 мксек. до 20 мсек.; амплитуда входных импульсов от 4 до 8 *в*; стабильность длительности импульса — менее 10% при изменении тока нагрузки от 20 до 200 *ма*. Схема состоит из блокинг-генератора с обратной связью с коллектора на эмиттер и выходного усилителя, который применяется для развязки нагрузки и блокинг-генератора. Триод выходного усилителя в момент импульса глубоко заходит в область насыщения для уменьшения влияния тока нагрузки. Смещение в базы триодов подается с помощью двух диодов, германиевого и кремниевого. Второй функцией германиевого триода является ускорение рекомбинации неосновных носителей в базе выходного триода после окончания импульса блокинг-генератора. Приводится методика расчета схемы, в том числе выбор оптимального отношения витков трансформатора в схеме блокинг-генератора. А. Н. Зимарев

8386. ФОСДИК-III будет помогать при переписи населения в 1960 г. (FOSDIC III to assist in 1960 census), Nat. Bur. Standards Techn. News Bull., 1959, 43, № 6, 106—107 (англ.)

Сообщение о разработке Национальным бюро стандартов США оптического устройства ФОСДИК-III (Film Optical Sensing Device for Input to Computers). Сфотографированные на 16-миллиметровую пленку данные прочитываются устройством и наносятся на магнитную ленту для непосредственного ввода в математическую машину. ФОСДИК-III предполагается использовать с 4 быстродействующими электронными машинами, которые будут обрабатывать данные о переписи населения США в 1960 г. Чувствительным элементом устройства является фотоэлемент, на который попадает сфокусированный луч с экрана электронно-лучевой трубки. При этом на пути луча помещается фотопленка и если луч попадает на светлое место пленки, то с фотоэлемента получается сигнал «1», если луч попадает на темное место, то получается сигнал «О». При переписи населения будут использоваться специальные бланки, содержащие ряд вопросов и возможные ответы на них. Ответ заносится на определенное место в бланке, на котором карандашом может быть нанесен код в виде чередования темных и светлых квадратов площадью 3,8 *мм*^{2} каждый. Для ответа на одну группу вопросов может быть использована площадь, состоящая из сетки таких квадратов 16×16. Программа работы устройства ФОСДИК-III определяется с помощью наборной штекерной доски. А. Н. Чуйкин

8387. Автоматическое печатающее устройство фирмы «Монро» (Monroe tackles data recording), Res. and Engng, 1958, 4, № 2, 46 (англ.)

Фирма «Монро Калькулейтинг Машин Ко» (Monroe Calculating Machine Co., Inc.) объявила о выпуске большой серии печатающих устройств модели МС-203. Устройства выполнены на базе суммирующих машин и имеют скорость печати 150 четырнадцатизначных чисел в 1 мин. Числа вводятся в устройство в виде электрических сигналов напряжением 100—125 *в*. Числа могут вводиться последовательно по одному каналу или параллельно по четырнадцати каналам. Предусмотрен также параллельно-последовательный ввод числа по трем каналам в пять тактов. Во время первых четырех тактов передаются трехзначные числа, а во время пятого такта — двузначное число.

Широкая печатающая каретка машины позволяет печатать до 203 знаков чисел в одну строку. Ручной переключатель на каретке позволяет переключать устройство на четыре разных программы печати.

Е. Н. Маквецов

8388. Фотоэлектрическое устройство, считывающее с перфоленты. Сасаки Рэнтаро, Хасимото Минамио, Ватанабэ Акинори. Оки дэнки дзихо, 1958, 25, № 3-4, 15—19 (японск.)

Краткое описание японского фотоэлектрического вводного устройства ОКИ-58, работающего на перфоленте с 6 или 8 кодовыми дорожками. По своим данным устрой-

ство приблизительно соответствует быстродействующему вводному устройству «Ферранти» (Ferranti High Speed Tape Reader).

8389. **Универсальное устройство для приема и выдачи данных. Сасаки Рэнтаро, Хасимото Минамио, Сэкигути Кэндзи, Миёда Икуо.** Оки дэнки дзихо, 1958, 25, № 3-4, 29—35 (японск.)

Краткое описание вводного и выводного буквенно-цифрового устройства, работающего на перфоленте с восемью кодовыми дорожками.

8390. **Устройство ввода и вывода данных в электронных счетных машинах. Фудзии Ацуси.** Дэнки цусин, 1959, 22, № 145, 38—42 (японск.)

8391. **Системы безошибочной передачи информации для электронных вычислительных машин. Цукэн гэппо,** 1958, 11, № 9, 15—17 (японск.)

Указывается, что в связи с широким распространением систем для автоматической обработки данных при помощи электронных вычислительных машин, возникает необходимость передачи данных по каналам связи из пунктов их получения в центральную вычислительную машину. Если для этого используется телеграф, то необходимо считаться с тем, что вероятность ошибки при передаче по телеграфу в Японии составляет 10^{-4}. Это создает недопустимые ошибки при работе вычислительной машины. В настоящее время ведутся изыскания возможности снизить вероятность ошибки при передаче по телеграфу до 10^{-8}, однако разрабатываемые методы не всегда могут применяться из-за стоимости оборудования, ограничений на скорость передачи и т. п. Приводится таблица систем кодирования для передачи по телеграфу на 6-, 7- и 8-дорожечных перфолентах, обеспечивающих контроль правильности передачи и ряд формул для вычисления вероятностей ошибок для таких систем.

8392. **Цифровая система для определения положения самолетов. Росс** (A digital system for position determination. Ross Dan C.), IRE Trans. Space Electron. and Telemetry (formerly IRE Trans. Telemetry and Remote Control), 1959, 5, № 1, 42—46 (англ.)

Анализируются трудности решения проблемы управления воздушным движением при высокой его интенсивности и указывается, что ее решение зависит в основном от успешности разработки средств для автоматического определения координат и высоты самолета, дающих сведения диспетчерской службе. Разбираются основные недостатки используемых в настоящее время принципов определения положения: радиолокационного, радиомаячного и основанного на применении радиолинии передачи данных с точки зрения удобства передачи и получения сведений, автоматизации вычислений, а также надежности и потребности к ширине отведенного спектра радиочастот. Описывается новый метод — метод автоматического телеизмерения и способ его реализации, апробированный при разработке опытного образца системы и в его испытаниях. Для рекомендуемого способа автоматического телеизмерения координат и высоты самолетов, находящихся в зоне действия определенной воздушнодиспетчерской службы, устанавливается 4 наземных приемных радиостанции с удалением одна от другой не менее 32 *км*, причем положение их выбирается так, чтобы зона наибольшей плотности движения находилась в центре образованного станциями четырехугольника. На всех самолетах устанавливаются импульсные радиопередатчики, работающие на одной частоте (порядка 1000 *мгц*) и излучающие импульсы мощностью в несколько *квт* строго в отведенные для данного адресата премежутки времени. Эти импульсы принимаются наземными станциями и по разности времени прихода импульсов специальной цифровой машиной вычисляются координаты каждого самолета. Для определения высоты самолета посылается второй импульс, сдвинутый по времени относительно первого на величину, пропорциональную высоте полета. Синхронизация всех самолетных передатчиков обеспечивается передачей синхронизирующих импульсов по радиоканалам связных радиостанций КВ и УКВ с частотой повторения порядка 1 мин. Эти импульсы вводятся модулящией несущей частоты частотой 6—8 *кгц*. Все передатчики синхронизирующих импульсов в стране должны работать от государственного эталона времени, передающего свои сигналы на длинных волнах. Точность работы системы определяется разрешающей способностью элементов, измеряющих время прихода импульсов и, для приводящейся в качестве примера системы с разрешающей способностью 0,2 мксек, составляет 80 *м* в центре образованного станциями четырехугольника и 2,5 *км* на удалении 142 *км*. Кроме определения координат, эта система решает важную задачу идентификации всех самолетов и может, по мнению автора, обеспечить автоматическую работу воздушнодиспетчерской службы при плотности движения порядка нескольких тысяч самолетов на один диспетчерский центр, предсказываемой для 1975 г. И. Д. Алимов

8393. **Устройство для преобразования кода вычислительной машины в словесное сообщение** (Brain with vocal cords), Electronic Design, 1957, 5, № 19, 8 (англ.)

Описывается устройство, разработанное фирмой «Фэрчайлд Контрол» (Fairchild Controls Corp., Syosset, N. Y.), для преобразования кода вычислительной машины в словесное сообщение. Устройство состоит из словарной «памяти» на магнитном барабане, системы управления порядком слов, устройством программной выборки и входных контрольных устройств. Соединение этого устройства с автоматической системой противовоздушной обороны типа СЕЙДЖ позволяет автоматизировать управление авиацией ПВО, используя существующие неавтоматические средства. С помощью вычислительных машин рассчитывается оптимальный курс и высота для самолетов-перехватчиков, а предлагаемое устройство преобразует эту информацию в словесное сообщение, которое с помощью стандартных радиопередатчиков, работающих в телефонном режиме, может быть передано летчикам. Устройство позволяет передавать сообщения на разных языках. О. К. Щербаков

8394. **Цифровые устройства для простых счетных операций. Хульберг, Лунн** (Siffferteknikk for enkle regneoperasjoner. Holberg Karl, Lundh Yngvar), Tekn. ukebl., 1958, 105, № 24, 561—565 (норв., рез. англ.)

Статья посвящена рассмотрению элементов цифрочастотных устройств. Это аналоговые устройства, работающие в истинном масштабе времени, в которых наряду с обычными аналоговыми элементами применяются логические и счетные элементы дискретной техники. Применение дискретных элементов кардинально решает вопрос о точности, которая в чисто аналоговых устройствах полностью определяется «линейностью» аналоговых элементов. Основными элементами описываемой цифро-частотной системы являются двоичный умножитель, двоичный счетчик и обычные логические элементы И и ИЛИ. Двоичный умножитель производит перемножение двух величин, одна из которых представляется в виде параллельного двоичного кода, а вторая — в виде частоты импульсов (см. рис. 1). Результат перемножения получается в виде соответствующей частоты импульсов. В состав каждого двоичного умножителя при использовании n двоичных разрядов для представления чисел входят один элемент ИЛИ, n элементов И, n триггеров. Второй основной элемент цифро-частотных устройств, двоичный счетчик, служит для получения алгебраической суммы двух величин. Для этой цели в счетчике имеются два раздельных входа (положи-

тельный и отрицательный), на которые поступают суммируемые числа в виде частотного кода. Выходная величина выдается в виде параллельного двоичного кода.

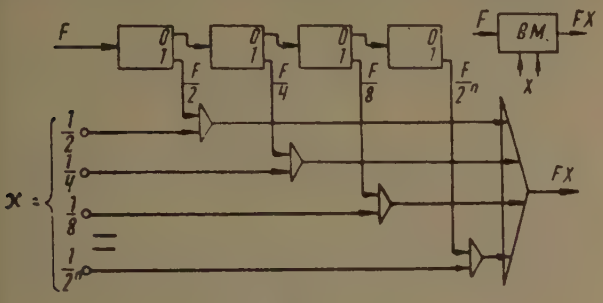


Рис. 1

Принцип работы двоичного счетчика ясен из рис. 2. Крайний левый триггер на этом рисунке служит для установки счетчика в положение суммирования или вычитания. В работе показано использование этих основных элементов для моделирования операций деле-

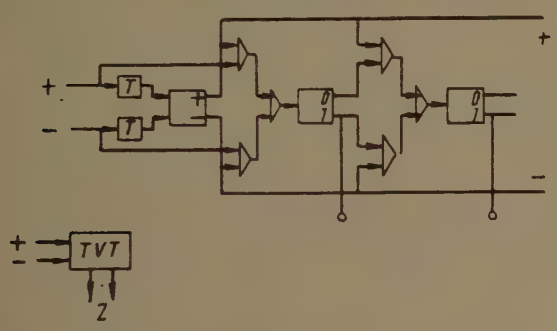


Рис. 2

ния и извлечения корня. Приводится блок-схема для подсчета с помощью цифро-частотной системы некоторого дробно-рационального выражения. Автор считает, что описываемые устройства должны применяться в простых и недорогих приборах для навигации, для управления огнем, для контроля за качеством производственных процессов и т. д. Библ. 4 назв.

Д. А. Поспелов

8395. Многократные электрические интеграторы. Матиаш (Vícenásobné elektrické integrátory. Matyáš Josef), Slaboproudý obzor, 1958, **19**, № 11, 758—765 (чешск.; рез. русск., нем., англ., франц.)

Рассказывается о схемах с одним усилителем, при помощи которых можно производить многократное интегрирование или решать дифференциальные уравнения выше первого порядка. Описывается контур, который дает n-кратный интеграл линейной комбинации входных сигналов. Более подробно рассказано о двухкратных и трехкратных интеграторах. Выведены условия, которым должны удовлетворять пассивные элементы контуров. Проведен анализ неточностей и ошибок, возникающих вследствие невыполнения этих условий в реальных схемах. Проделанный эксперимент показал, что если задать величины сопротивлений и емкостей с точностью до 1%, то ошибки результатов будут не более 0,1%.

Отмечается, что в обычных суммирующих усилителях или интеграторах ошибки проявляются только в изменении коэффициента переноса, в то время как в описанных контурах неточности обусловливают и изменение формы функции переноса. Единственным, но существенным преимуществом данных многократных интеграторов является экономия усилителей. К недостаткам относятся : сложность контуров, трудность программирования.

Применение рассмотренных интеграторов является выгодным в случае необходимости многократного решения уравнения или нескольких уравнений при различных условиях. Приведен пример решения неоднородного уравнения 2-й степени. В. Л. Евтеев

8396. Устройство для воспроизведения функции двух независимых переменных (A function generator for two independent variables), Nat. Bur. Standards Techn. News Bull., 1958, **42**, № 4, 67 (англ.)

Описывается блок-схема генератора функции двух независимых переменных, разработанного как чисто электронное устройство. Оно состоит из ряда генераторов функций одной независимой переменной и аттенюаторов, представляющих собой схемы, обеспечивающие линейную интерполяцию между этими функциями. Каждый из генераторов функций одной независимой переменной, за исключением первого, выходное напряжение которого соответствует функции двух независимых переменных при равенстве нулю второй переменной, подключается к аттенюатору, причем каждый последующий аттенюатор начинает функционировать только тогда, когда напряжение на выходе предыдущего достигает определенной величины. Для компенсации остаточного напряжения на выходе аттенюатора, когда он полностью пропускает напряжение с генератора, часть выходного напряжения генератора подается через инвертор и фильтр на выходной усилитель. Аттенюатор представляет собой схему, в которой осуществляется сравнение напряжений треугольной формы со специального генератора и второй независимой переменной и имеется стробирующее устройство, которым управляет схема сравнения и на который подается напряжение с генератора функций одной независимой переменной. Когда треугольное напряжение больше нуля и вторая независимая переменная больше нуля, то стробирующее устройство пропускает полностью входное напряжение на фильтр и на выход. Если же вторая независимая переменная меньше нуля, то напряжение с генератора не пропускается. С выхода каждого стробирующего устройства напряжение подается на фильтр и на выходное суммирующее устройство. Генератор треугольной формы обеспечивает линейную интерполяцию с линейностью до 1%. Меняя форму кривой, можно получить и нелинейную интерполяцию. Утверждается, что схема является гибкой, универсальной и работает до 100 *гц*. Б. Ш. Беркович

8397. Проектирование решающих усилителей на полупроводниковых триодах, работающих на переменном токе. Краус, Лоу (Design of AC computing amplifiers using transistors. Krause C. A., Lowe R. R.), IRE Trans. Electronic Comput., 1958, **7**, № 3, 191—195 (англ.)

Рассматривается проектирование суммирующего усилителя на кремниевых полупроводниковых триодах, работающего на частоте 400 *гц* и предназначенного для возбуждения решающего устройства. Ошибка решения не превышает 0,05% при коэффициенте усиления замкнутой петли, равном 1. Утверждается, что в противоположность ламповому усилителю входной импеданс усилителя на полупроводниковых триодах должен быть возможно меньшим. Точность решения такого усилителя практически не зависит от числа входов, так как количество входов, уменьшающее точность в 2 раза по сравнению с точностью при одном входе, равно отношению величины суммирующего сопротивления (300 500 *ком*) к величине входного сопротивления усилителя. При малом входном сопротивлении усилителя значительно уменьшается зависимость точности решения от количества суммирующих сопротивлений, однако влияние нагрузки сказывается значительно больше из-за уменьшения коэффициента усиления. При построении

схемы усилителя за основу было принято получение высокого коэффициента усиления по току (около 100 000). По этой причине суммирующий усилитель состоит из трех каскадов на триодах типа 905 ($\beta = 40$) и выходного каскада на триоде 953, работающего с большим коллекторным напряжением (120 *в*). Стабилизация рабочей точки достигается введением обратной связи с коллектора на базу и включением эмиттерных сопротивлений. Рассматриваются и другие методы стабилизации рабочей точки, а также динамическая стабилизация схемы. Приводятся некоторые способы увеличения точности решения усилителя. А. Н. Зимарев

8398. **Новые электронные моделирующие устройства. Бюргер** (Neue elektronische Analogie-Rechenmaschine. Bürger), Feingerätetechnik, 1959, 8, № 6, 285 (нем.)

Краткое сообщение о моделирующем устройстве ЭМИАК-II (EMIAC-II) английской фирмы «EMT» и некоторых его применениях.

8399. **Простые электронные машины для решения уравнений. Артс** (Simple electronic machines for solving equations. Aarts W. H.), S. Afric J. Sci., 1959, 55, № 2, 43—48 (англ.)

Излагаются общие принципы решения алгебраических и трансцендентных уравнений на электромоделирующих устройствах различных типов. Статья имеет реферативный характер. К. А. Карпов

8400. **Моделирующее устройство КАК. Гонсалес-дель-Вальє** (Le calculateur analogique CAC. Gonzalez del Valle A.), Actes. Jounées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 509—511 (франц.; рез. англ.)

См. РЖЭ, 1958, № 2, 2706.

8401. **Моделирующее устройство в авиационной промышленности. Мерфи** (The analog computer in the aircraft industry. Murphy Bernard), Interavia, 1957, 12, № 12, 1273—1274 (англ.)

8402. **Динамическая точность как критерий качества конструкции линейных электронных аналоговых дифференциальных анализаторов. Натан** (Dynamic accuracy as a design criterion of linear electronic-analog differential analyzers. Nathan Amos), IRE Trans. Electronic Comput., 1957, 6, № 2, 74—86, 125 (англ.)

См. РЖЭ, 1958, № 19, 35938.

8403. **Погрешность одного трансформаторного аналога для решения систем линейных алгебраических уравнений и для вычисления линейных алгебраических форм. Даубе Я. Я.**, Latv. PSR Ziņatņu Akad. vēstis, Изв. АН ЛатвССР, 1957, № 11, 111—120 (рез. лат.)

См. РЖЭ, 1959, № 1, 1377.

8404. **Электронные вычислительные машины-модели с программным управлением. Лось В. А.**, Автоматика и телемеханика, 1959, 20, № 4, 498—507 (рез. англ.)

Автор отмечает, что при решении задач автоматического регулирования в ряде случаев неудобно использовать универсальные цифровые вычислительные машины из-за необходимости иметь аналого-цифровые преобразователи и из-за большого числа арифметических и логических операций, выполнение которых отнимает на универсальной машине много времени. Указывается на удобство решения подобных задач при помощи вычислительных машин, в которых сочетается непрерывная и дискретная вычислительная техника, а именно таких машин, которые содержат небольшое число стандартных вычислительных блоков непрерывного действия и дискретные коммутирующие (программные) устройства, позволяющие многократно использовать одни и те же непрерывные блоки при автоматическом решении уравнений. Излагаются принципы построения подобных вычислительных машин-моделей с программным управлением. Рассмотрены элементы таких устройств: решающие усилители, электронные переключательные схемы, диодные сетки (дишифраторы) и др. Описана блок-схема машины-модели и некоторые примеры. В. А. Брик

8405. **Генератор случайных чисел, использующий субгармонические генераторы. Штерцер** (Random number generator using subharmonic oscillators. Sterzer Fred), Rev. Scient. Instrum., 1959, 30, № 4, 241—243 (англ.)

При решении многих математических и физических задач необходимо использовать случайные числа. При решении таких задач на цифровых машинах можно пользоваться имеющимися таблицами случайных чисел, но возникают трудности, связанные с необходимостью запоминания больших количеств таких чисел в машине. Поэтому обычным стал метод использования вычислительной машины для выработки «псевдослучайных» чисел с помощью определенных арифметических процессов. Однако чем более точной должна быть «случайность» вычисляемых чисел, тем более длинные и отнимающие больше времени арифметические процессы приходится использовать. Известны также примеры выработки случайных величин с помощью электронных моделирующих устройств. (Например, устройство фирмы «Ремингтон Ренд»). В данной статье описано электронное устройство непрерывного действия, способное вырабатывать случайные двоичные знаки со скоростями порядка $3 \cdot 10^7$ знаков в 1 сек., что примерно на два порядка больше (быстрее), чем может быть достигнуто на современных вычислительных машинах при примерно равных характеристиках вырабатываемых чисел. Автор считает, что скорость выработки может быть увеличена путем параллельного включения нескольких устройств. Принцип работы устройства заключается в следующем. Два субгармонических генератора возбуждаются общим источником колебаний, имеющим частоту 4000 *мгц*. Выходные сигналы генераторов имеют половинную частоту: 2000 *мгц*. Благодаря наличию шумов, фазы выходных сигналов являются случайными (во времени) величинами. Специальное устройство сравнивает фазы выходных сигналов генераторов и вырабатывает последовательность двоичных сигналов, причем единицы появляются при совпадении фаз, а нули — когда сигналы находятся в противофазе. В устройстве используется клистронный генератор, волноводы, кристаллические диоды и др. В. А. Брик

8406. **Получение амплитудного и фазового спектра по графически заданной кривой. Ремиллард** (Method of obtaining amplitude and phase spectra of a transient function using graphical input data. Remillard Wilfred J.), J. Acoust. Soc. America, 1959, 31, № 4, 531—534 (англ.)

Приведена теория и описано устройство аппарата для быстрого получения спектра однократного явления, заданного графически в виде кривой, нарисованной по точкам или полученной фотографически. Действие прибора основано на том, что спектр однократного явления с точностью до постоянного множителя является огибающей ординат спектра периодического процесса, полученного путем повторения того же однократного явления. Одной из важных частей прибора является катодный осциллограф, приспособленный, для периодического повторения одинакового сигнала. На экран осциллографа наклеивается маска, край которой воспроизводит исследуемый процесс. Через простую линзу свет от экрана фокусируется на фотоэлементе так соединенном со входом осциллографа, что усиление света отгоняет зайчик в область непрозрачной маски. Горизонтальная развертка двусторонняя, линейная во времени. Таким образом зайчик взад и вперед бегает по самому краю маски, а напряжение на вертикальных отклоняющих пластинках повторяет исследуемую функцию (време-

ии). Испытание прибора на простой кривой дало на протяжении 2 часов 18 гармоник со средней погрешностью 2,7% по амплитуде и 3,2% по фазе.
Г. А. Остроумов

8407. **Вычислительная сортировальная машина УНИВАК фирмы «Ремингтон Ренд» (Универ файл компютер)** (Le calculateur classeur Univac Remington Rand. (Univac file computer)), Rev. mécanogr., 1958, 12, № 128, 155—158 (франц.)

8408. **Усовершенствование технологии изготовления реле. Гоме** (Améliorations de méthodes obtenues par améliorations de conception de pièces. Gaumer Jean), Étude trav., 1958, № 90, 12—20. Discuss., 20—22 (франц.)
Описан опыт усовершенствования технологии производства отдельных деталей реле на заводах счетно-перфорационных машин фирмы «Буль». Усовершенствование технологии производится, как правило, на базе изменения конструкции. В. В. Васманов

8409. **Механический вычислитель структурных коэффициентов. Шаффер** (Mechanical structure-factor computer. Schaffer W.), J. Scient. Instrum., 1959, 36, № 2, 75—77 (англ.)
Описывается принцип действия и конструкция механического устройства, позволяющего вычислять выражения вида $F_{hkl}=\sum_j A_j \cos(hx_j+ky_j+lz_j)$, встречающиеся в кристаллографии при структурном анализе.
А. Н. Чуйкин

8410. **Счетная линейка для ряда нормальных чисел. Баккьяни** (Regolo calcolatore a numeri normali. Bacchiani R.), Riv. mecc., 1958, 9, № 191, 34—35 (итал.)
Счетная линейка типа логарифмической для расчетов с числами нормальных рядов (геометрические прогрессии со знаменателем в виде дробной степени 10), применяемых в промышленности в качестве стандартных. Кроме основных чисел нормальных рядов со знаменателем $\sqrt[40]{10}$, $\sqrt[20]{10}$, $\sqrt[10]{10}$, $\sqrt[5]{10}$, на линейке нанесены обратные величины, квадраты и кубы этих чисел. Указывается, что расчеты с дискретными значениями чисел нормальных рядов дают точность, достаточную для практики.
И. В. Лебедев

8411. **Логарифмическая линейка Нелсона. Милс** (The Nelson slide rule. Mills Blake D., Jr), Amer. Math. Monthly, 1958, 65, № 3, 194—195 (англ.)
Описана логарифмическая линейка обычной конструкции, отличающаяся градуировкой шкал. Эти шкалы позволяют реализовать разработанный автором способ перемножения двух чисел. Способ заключается в том, что против наибольшего из сомножителей (на нижней шкале корпуса) устанавливается (по нижней шкале движка) разность сомножителей, а против меньшего сомножителя на верхней шкале движка читается значение произведения (по верхней шкале корпуса). В. В. Васманов

8412. **Программирование для электронных счетных машин. Такахаси Хидэтоси,** Дэнси коги, Electronician, 1958, 7, № 10, 33—37, 66 (японск.)
Статья общего характера.

8413. **Большие электронные вычислительные машины. Массон** (Les grands calculateurs électroniques. Masson M.), Bull. Assoc. franç. techniciens pétrole, 1959, № 134, 385—392 (франц.; рез. англ., нем., итал.)
Статья общего характера.

8414. **Физическое осуществление электронной цифровой вычислительной машины. Мейсон** (The physical realization of an electronic digital computer by A. D. Both. Discussion. Mason F. P.— Author's reply), Electron. Engng, 1959, 31, № 375, 299—300 (англ.)

8415. **Современные вычислительные машины. Соресини** (Moderne macchine da calcolo. Soresini Franco), Elettrificazione, № 4, Elettronica industr. ed energia nucleare, 3, № 4, 61—64 (итал.)
Сообщение о машинах фирм «ИБМ», «Ремингтон Ренд» и «Монро», демонстрировавшихся на XXXVII Международной ярмарке в Милане.

8416. **Современные вычислительные и моделирующие машины. Васильев Д. В.,** Изв. Ленингр. электротехн. ин-та, 1959, вып. 37, 14—34
Статья общего характера.

8417. **Вычислительная машина обрабатывает манускрипты Мертвого моря** (A computer at work on the Dead Sea Scrolls), New Scientist, 1958, 3, № 76, 28—29 (англ.)
См. также РЖМат, 1960, 2459.

8418. **Заметки об опыте предсказания результатов общих выборов с помощью математической машины. Блексли** (Note on an experiment in forecasting the results of a general election with an electronic computer. Bleksley A. E. H.), S. Afric. J. Sci., 1959, 55, № 4, 99—102
Описывается применение математической машины для предсказания окончательных результатов голосования на общих выборах в Южно-Африканском Союзе в 1958 г. Исходными данными служили результаты выборов в 1953 г. и предварительные результаты голосования. Кроме того, в машину вводились данные об изменении по сравнению с 1953 г. числа и состава избирателей по различным избирательным округам. Сравнивая эти данные, машина выдавала ожидаемые результаты голосования. Для проведения опыта использовалась универсальная математическая машина ГЭК-1201 фирмы «Голлерит» (Hollerith), построенная на электронных лампах. Входные данные вводятся в машину с помощью перфокарт со скоростью 85 карт в 1 мин. Запоминающее устройство выполнено на магнитном барабане, вращающемся со скоростью 50 оборотов в 1 сек. и имеет емкость 1024 сорокаразрядных двоичных чисел. Время выборки одного числа составляет 1,25 мсек. Арифметическое устройство содержит 3000 электронных ламп и позволяет выполнять сложение и вычитание за 2,5 мсек., умножение на 8-разрядное десятичное число за 20 мсек. и на 40-разрядное двоичное число за 50 мсек. Выходное устройство машины печатает результаты на бумаге со скоростью 1 строка за 0,7 сек. В статье кратко рассмотрена программа, составленная для предсказания результатов выборок и приведены результаты, выданные машиной и полученные при окончательном подсчете голосов.
А. Н. Чуйкин

8419. **Основы теории электронных вычислительных машин. Кудлик** (Basic theory of electronic computers. Kudlick Walter), Traffic Engng, 1958, 28, № 4, 20—23, 50 (англ.)
Статья общего характера.

8420. **Рост отдела вычислительных машин. Часть II. Янг** (The growth of a computer department. Part II. Young P. L.), Electr. Manuf., 1958, 2, № 11, 30—31, 33 (англ.)
Часть I см. РЖМат, 1959, 2113.

8421. **Задачи, решаемые на электрической бухгалтерской машине фирмы «ИБМ». Перфорирование и контроль чтения графиков** (Problème électro-comptables IBM. Perforation et vérification de la lecture graphique), Rev. mécanogr., 1958, 12, № 128, 168—169 (франц.)

8422. **Задачи, решаемые на электрической бухгалтерской машине формы «ИБМ». Кубический корень из числа, состоящего из 12 цифр. Дернонкур** (Problème électro-comptables IBM: racine cubique d'un nombre de 12 chiffres maximum. Dernoncourt P.), Rev. mécanogr., 1958, 12, № 129, 213—216 (франц.)

8423. **Конструирование логических машин. Избранная библиография. Нетервуд** (Logical machine design: a selected bibliography. Netherwood Doug-

las B.), IRE Trans. Electronic Comput., 1958, 7, № 2, 155—178 (англ.)

Приводится обширный библиографический справочник по вычислительной математике и технике, охватывающий 484 работы. Работы расположены в алфавитном порядке фамилий авторов, а также приводится список тех же статей, подобранных по их содержанию, причем в этом списке название статьи разбивается на две части таким образом, чтобы первым стояло слово, определяющее тему статьи. Часть названия, предшествующая определяющему слову, отбрасывается и печатается после окончания названия. Такой порядок систематизации позволяет легко отыскивать статьи, описывающие определенные схемы и методы вычислительной техники.

О. В. Бачин

8424. **Добавочный библиографический список по вычислительным автоматам. Гофман** (Ergänzender Literaturbericht über das Gebiet der Rechenautomaten. Hoffmann Walter), Bl. Dtsch. Ges. Versicherungsmath., 1958, 3, № 4, 501—518 (нем.)

8425 К. **Нелинейный магнетизм и магнитные усилители.** (Nonlinear magnetics and magnetic amplifiers. (Proc. Spec. Techn. Conf., Aug. 6th-8th, 1958, Los Angeles, Calif.) S. l., Amer. Inst. Electr. Engrs, 1958, viii, 482 pp., ill., 7.00 doll.) (англ.)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

8426. **Анализ маршрута полета самолета на цифровой вычислительной машине. Мурхед** (Aircraft route analysis on a digital computer. Moorhead W. G.), Comput. J., 1959, 1, № 4, 160—162 (англ.)

Для инженерно-штурманских расчетов, производимых при составлении инструкций для пилотов, летающих по различным трассам, фирмой «Викерс-Армстронг» используется цифровая вычислительная машина «Пегас» фирмы «Ферранти». Характеристики самолета вводятся в машину в виде таблиц чисел, в которых используется интерполяция по 3 точкам. Особенности трассы описываются 31 числом. Всего для описания данных самолета и трассы требуется 36 чисел. Вычисление заправки топливом производится с учетом расхода на различных этапах полета и необходимого запаса для ухода на другой аэродром. План полета составляется или из условия минимальности стоимости, или из условия минимальности времени полета. При вычислении эшелона полета учитываются требования правил воздушного движения, согласно которым самолет должен лететь на постоянной высоте, определяемой уравнением $H=600k+150n$ (*м*), где k — произвольное целое число, n — число 0, 1, 2 или 3 в зависимости от квадрата курса полета. Вычисление ведется методом итерации до тех пор, пока разница двух последовательных вычислений взлетного и посадочного веса не совпадут с точностью 45 *кг*. Время вычисления составляет от 1 до 3 мин. в зависимости от сложности маршрута. Результаты вычисления выдаются машиной в виде отпечатанных карточек, на которых указаны необходимые взлетные данные, расход топлива по этапам полета, суммарный расход, высота, скорость и время полета. Машина используется в среднем для анализа 50 маршрутов в неделю. Предполагается, что в будущем машина может производить анализ полета с учетом перемен — изменений температуры и ветра по высотам, а также сможет оперировать с более подробными данными о самолете. Этому в настоящее время препятствует недостаточность объема памяти — магнитного барабана на 4096 слов. Из этого объема памяти половина используется для программы, четверть — для характеристик рабочего пространства и алфавита, используемого выходным печатающим устройством, и остальная четверть — для таблиц характеристик самолета. Указывается, что затраты на программирование такой работы окупаются только при большом количестве вычислений.

И. Д. Алимов

8427. **Новые применения вычислительных машин** (Novel applications of computers), Computers and Automat., 1959, 8, № 3, 12—13 (англ.)

Статья состоит из ряда небольших заметок.

1. Отделение мясной промышленности и ветеринарии при университете Арканзаса (США, штат Арканзас) установило у себя универсальную цифровую машину «Бендикс G-15». Машина будет использоваться для изучения тенденций изменения качества мясного скота и мясных продуктов. Информацией, которая будет обрабатываться машиной, являются статистические данные о разведении скота, продуктивности, величине удоев коров, весе животных, их размерах, о характере и качестве кормов для различных групп скота и др. Статистические данные, характеризующие ряд поколений скота, после их обработки будут использоваться для составления прогнозов относительно разведения скота.

2. Высказывается мнение о возможности моделирования различных возможных реакций массы потребителей на те или иные изменения условий на торговом рынке. Предполагается, что зависимости между воздействиями и реакциями этого рода могут быть представлены в виде определенных функций.

3. Кратко излагаются результаты проводившихся в Нью-Йорке в течение года исследований возможностей создания подземных поездов (метрополитена) без обслуживающего персонала. Первым конкретным шагом практического осуществления этих идей должно явиться создание определенного участка метрополитена с автоматическими поездами. В случае удачи эксперимента это приведет к переводу на другие работы до 90% из 3100 машинистов и 75% из 3500 кондукторов, которые сейчас используются в Нью-Йорке. Упоминается о проведении в Советском Союзе работ в этой области — об опытном пробеге автоматического состава между Кунцево и Усово.

4. Описываются работы объединения, носящего название National Association of Investment Clubs и занимающейся изучением капиталистического производства и рынков. Изучается соотношение между уровнем зарплаты и уровнем цен и изменение этого соотношения за ряд лет. Делаются предсказания относительно положения в этой области в ближайшие годы. Вычисления производятся с помощью вычислительной машины ЛГП-30 (LGP-30).

5. В университете Purdue (штат Индиана) используется цифровая машина «Дататрон» для регистрации и распределения студентов по группам и курсам.

В. А. Брик

8428. **Использование универсальной вычислительной счетной машины в ядерной установке с газовым реактором. Орикост, Пани** (Utilisation d'une calculatrice numérique universelle dans une centrale nucléaire à réacteur à gaz. Auricoste J., Panis Y.), Techn. mod., 1959, 51, № 1, 62—64 (франц.)

Вычислительная машина РВ-300 (RW-300) применялась для обработки результатов замеров в ядерном реакторе установленном на первой французской термоядерной станции. Кратко описывается методика проведения замеров и метод их обработки на машине. Приводятся данные о машине РВ-300. Машина построена полностью на полупроводниках (500 транзисторов, 3000 диодов и 20 реле). Рабочая частота 128 *кгц*. Память на магнитном барабане 8000 чисел. Ввод и вывод данных осуществляется с помощью перфолент и магнитных лент. Скорость выполнения операций:

сложение и вычитание	1,09 *мсек.*
умножение	3,59 „
деление	3,74 „

Автор указывает, что можно гарантировать надежную работу машины (1000 час. без сбоев). В виде приставок к машине подключаются устройства для перевода данных из непрерывной формы в цифровую и обратно (точность 0,001). Н. Н. Поснов

8429. **Электронный регулятор ПИД. Хамрад** (Elektronický regulátor PID. Chamrád Valentin), Automatizace, 1959, 2, № 3, 89—90 (чешск.)

Дается описание электронного регулятора МАРК IV (MARK IV), который, по утверждению автора, устраняет недостатки электронных регуляторов, применяемых до сих пор (сложность схемы, короткое время жизни электронных ламп и др.).

МАРК IV — электронный регулятор с тремя независимыми входами. Схема регулятора такова, что сигнал, поданный на соответствующий вход пропорционально усиливается или дифференцируется, или интегрируется. Усиление сигнала возможно в двух интервалах в пределах от 5 до 65 и от 70 до 325%. Постоянная времени интегрирующей цепочки изменяется в трех интервалах в пределах от 3 до 30 сек., от 0,3 до 3 мин. и от 3 до 30 мин; а для дифференцирующей цепочки — непрерывно от 0 до 3 мин. Отмечается, что в регуляторе МАРК IV подобраны электронные лампы одного типа (легко заменяемые при порче) с большим временем работы. Подробно описывается схема и конструктивное оформление регулятора. В. Л. Евтеев

8430. **Бесконтактные системы управления обеспечивают автоматизацию доменных печей. Бен, Динер, Эрбе** (Statistic control provides blast furnace automation. Behne Neal J., Diener H. C., Erbe J. Raymond), Iron and Steel Engr, 1959, **36**, № 2, 127—136. Discuss. 136—138 (англ.)

Описана система автоматического программного управления (с.а.у.) составлением шихты и загрузочными операциями на доменной печи № 4 завода Охайо «Стальной корпорации США» (United States Steel Corp.), разработанная фирмой «Вестингауз Электрик» (Westinghouse Electric Corp.). С целью повышения надежности с. а. у., весьма важной в доменном хозяйстве, была выбрана схема с использованием бесконтактных магнитных элементов. Эти элементы применяются как в качестве датчиков положения и состояния отдельных агрегатов с.а.у. — концевых, нажимных и ограничительных выключателей, датчиков давления, датчиков потока и пр., так и в качестве элементов логических и запоминающих схем. Приведена и объяснена скелетная схема с.а.у. В дискуссии изложены некоторые данные об эксплуатации с.а.у. доменными печами, разработанных фирмой «Дженерал Электрик» (General Electric Co.). Б. Е. Бердичевский

8431. **Интерполирующее устройство для системы программного управления фрезерным станком. Дубковская А. Г.,** Станки и инструмент, 1959, № 6, 12—15

Описывается разработанное в Ленинградском электротехническом институте им. Ульянова (Ленина) интерполирующее устройство непрерывного действия, предназначенное для управления движением рабочего органа станка по кривым, определяемым интерполяционными формулами Лагранжа, Ньютона, Гаусса, Бесселя и др. В конкретной реализации устройства используется интерполяционная формула Гаусса для четырех точек. Разработанная схема содержит два интерполирующих устройства для управления движением по двум осям координат фрезерного станка. Исходные данные (разности третьего порядка и координаты опорных точек) вводятся в устройство в двоичном коде с помощью перфоленты. Эти данные, считанные с ленты фотоэлементами, преобразуются (с помощью счетчика и электромагнитных реле) в напряжения, запоминаемые в промежуточном запоминающем устройстве. Само интерполирование производится (по каждой оси) тремя электромеханическими интеграторами. Выходные валы интеграторов жестко связаны с роторами сельсинов, изменяющееся по фазе выходное напряжение которых записывается на магнитную ленту. Готовая лента может быть введена непосредственно в управляющую систему станка. В состав системы входит корректирующее устройство, которое сравнивает в конце каждого участка интерполирования выходные величины интеграторов с заданными значениями координат опорных точек и производит соответствующую коррекцию с помощью следящей системы. Каждый электромеханический интегратор содержит три элемента: электродвигатель (типа АДП-123), тахогенератор (типа АТ-231) и электронный усилитель (коэффициент усиления равен 10 000). Суммарная ошибка интегрирования таким интегратором за интервал интерполирования в течение 10 сек. составляет (при скорости подачи 300 *мм/мин*) 0,05 *мм*. Отмечается, что при более рациональном выборе элементов интегратора и уменьшении интервалов интерполирования можно уменьшить ошибку так, что, например, окружность радиуса 10 *мм*, разделенная на 12 частей, может обрабатываться с погрешностью интегрирования на одном интервале порядка 0,01 *мм*. В. А. Брик

8432. **Руководство по цифровому управлению для технологов. Стоккер** (The production man's guide to numerical control. Stocker William M., Jr), Amer. Machinist, 1957, **101**, № 14, 133—154b (англ.)

См. РЖЭ, 1958, № 19, 36014.

8433. **Программирование при подготовке работы. Штубенрехт** (Programmieren — auch in der Arbeitsvorbereitung. Stubenrecht Alfred), Elektron. Datenverarb., 1959, № 1, 10—14 (нем.; рез. англ.)

Статья общего характера.

8434. **Вычислительная машина в качестве управляющего устройства. Клоз** (Computer control. Close Gilbert C.), Automation, 1957, **4**, № 12, 57—60 (англ.)

См. РЖЭ, 1958, № 19, 35994.

8435. **Применение электронных моделирующих установок для исследования устойчивости параллельной работы синхронных генераторов соизмеримой мощности. Рябинин И. А., Раимов М. М.,** Изв. высш. учебн. заведений. Электромеханика, 1959, № 2, 11—26. Дискус., 27—30

8436. **Математическое моделирование бесколлекторных машин переменного тока с односторонней асимметрией. Ситник Н. Х.,** Изв. высш. учебн. заведений. Электромеханика, 1959, № 2, 31—42

8437. **Расчет неустановившегося движения в нижнем бьефе ГЭС с помощью электрического моделирования. Челноков Н. И., Тетельбаум И. М., Обрезков В. И.** В сб.: Межвуз. конференция по применению моделирования в электротехн. задачах и матем. моделирования. М., 1957, 159—161

См. РЖЭ, 1959, № 4, 6670.

8438. **Практическое применение электронных цифровых вычислительных машин к расчету электрических машин. Леман** (Praktische Anwendung elektronischer Digitalrechner zur Berechnung elektrischer Maschinen. Lehmann S.), VDE-Fachber., 1958, **20**, 154—162. Diskuss., 162 (нем.)

8439. **Использование моделирующих устройств для синтеза элементов электрических цепей, обладающих импедансом с отрицательной действительной частью. Карплус** (Synthesis of non-PR driving point impedance functions using analog computer units. Karplus Walter J.), IRE Trans. Circuit Theory, 1957, **4**, № 3, 170—172 (англ.)

См. РЖЭ, 1958, № 18, 33771.

8440. **Изучение магнитного поля внутри ярма электромагнита при помощи электролитической ванны с профилированной поверхностью дна. Брук, Жандро** (Établissement, à l'aide de la cuve rhéographique à

fond modèle, de la carte du champ dans la culasse d'un aimant. Bruck H., Gendreau G.), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 322–325. Discuss., 325—326 (франц.; рез. англ.)
См. РЖЭ, 1957, № 18, 35426.

8441. **Применение электролитической ванны в качестве вычислительного устройства. Прудковский Г. П.,** Приборы и техн. эксперимента, 1959, № 3, 77—79

8442. **Вычислительные машины и электронное обслуживание. Часть 1. Введение. Часть 2. Контроль производства. Вильямс** (Computers and the electronic office. Part 1. Introduction. Part 2. Production Control. Williams R. H.), Instrum. Practice, 1959, **13**, № 5, 526—528; № 6, 632—635 (англ.)
Статья общего характера.

8443. **Вычислительные машины в автомобильной промышленности** (Computors in the bus industry), Bus and Coach, 1958, **30**, № 6, 217 (англ.)

8444. **Использование вычислительной машины на нефтеобрабатывающем заводе. Стантон, Рид, Мейсон** (Computer use in pilot plant calculations. Stanton L. S., Reid E. B., Mason H. F.), Industr. and Engng Chem., 1958, **50**, № 5, 719—720 (англ.)

8445. **Новый этап в автоматизации конторских счетных операций: электронные машины. Бекшер** (Une nouvelle étape dans le calcul comptable-automatique: les machines électroniques. Becchère M.), Rev. P. T. T. France, 1957, **12**, № 6, 36—47 (франц.)
См. РЖЭ, 1959, № 14, 29867.

8446. **Автоматизация административной работы и перфоленты. Поффе** (L'automation administrative et les bandes perforées. Poffe N.), Rev. mécanogr., 1958, **12**, № 128, 150—153 (франц.)

8447. **Основные направления и тенденции развития цифровых счетно-решающих систем в проблеме конструирования машин и орудий. Гутенмахер Л. И.** В сб.: Соврем. направления в обл. конструирования технол. оборуд. М., Машгиз, 1957, 25—48
См. РЖЭ, 1958, № 21, 40474.

8448. **Программа для составления плана формирования поездов на электронной вычислительной машине «Урал». Кутукова Г. А.,** Вестн. Всес. н.-и. ин-та ж. д. трансп., 1959, № 4, 53—54

8449. **Применение вычислительной техники в медицине. Воскресенский А. Д., Прохоров А. И.,** Сов. здравоохранение, 1959, № 8, 19—25 (рез. англ.)
Статья общего характера.

8450. **Применение электронных вычислительных машин на железнодорожном транспорте. Петров А. П.,** Вестн. Всес. н.-и. ин-та ж. д. трансп., 1959, № 4, 8—18

8451. **Решение основных задач структурного анализа на универсальных вычислительных машинах. Трифонов Н. П., Щедрин Б. М.,** Кристаллография, 1959, **4**, № 3, 315—323

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абэ 7471
Авдеева В. А. 8235
Авербух Б. Г. 7371, 7372
Агаев Г. Н. 7847
Айвазян С. А. 8003
Айзенберг Л. А. 7516
Айзенштат Н. Д. 8337
Александров И. А. 7472
Алексеев А. С. 7717
Альпер С. Я. 7448
Андронов А. А. 7580
Антоновский М. Я. 7836
Анфертьева Е. А. 7180
Аояма 7154
Аронович Г. В. 7581
Ахундов А. М. 7622
Аширов С. 7757, 7759

Б

Бабенко К. И. 7449
Бабич В. М. 7718
Бабушка И. 7651
Баврин И. И. 7519, 7523, 7524, 75 5
Базилевич И. Е. 7465
Банков Г. 7556
Барановский Ф. Т. 7663
Баранцев Р. Г. 7678
Барбашин Е. А. 7577
Баренблатт Г. И. 7744
Баров В. 8089
Барон С. А. 7809 Д
Белинский П. П. 7549 Д
Белоусов В. Д. 7289
Белюстина Л. Н. 7584
Березин Ф. А. 7870
Блох З. Ш. 7830
Боев Г. П. 7983
Божоров Е. 7156 К
Бойков Г. П. 7741, 7742
Болтянский В. Г. 7365
Борок В. М. 7684, 7685
Боярский Б. В. 7491
Брадис В. М. 7168 К
Бреус К. А. 7565
Брилинг Р. С. 8210
Бродский М. С. 7866
Брудный Ю. А. 7418
Брумберг В. А. 8258
Брчић В. 7721
Булабаев Т. 8326
Буров В. Н. 7885
Быков Я. В. 7761
Быховский Э. Б. 7633

В

Вайнберг М. М. 7883
Вайнштейн И. А. 8337
Вальков К. И. 8206
Ван Фо Фы Г. А. 7834 Д
Варшавер Б. А. 8070
Васильев В. А. 7544
Васильев Д. В. 8416
Ватанабэ А. 8388
Вахания Н. Н. 7664
Векслер А. И. 7890
Верхунов В. М. 7146
Вилкас Э. И. 7953
Винкельбауэр К. 7925
Вишик М. И. 7631, 7642
Волнина Н. В. 7294
Воробьев Н. Н. 8018
Воскресенский А. Д. 8449

Г

Гальперин И. М. 7473
Ганзбург И. М. 7413
Гармаш В. А. 8071
Гельфанд И. М. 7957
Герасимов И. С. 7561
Гермаидзе В. Е. 7569
Глухов Ю. Н. 8381
Глушков В. М. 7223
Гнеденко Б. В. 8086
Голенко Д. И. 8090
Головинский Б. Л. 8321
Гольберг П. А. 7273
Гольцман Ф. М. 8333
Гончар А. А. 7416, 7417
Гофман И. Я. 7550
Грель Г. 7302
Гронец Ю. 7630
Грушин В. В. 7397
Губанов А. И. 7706
Гудкова И. А. 8132
Гуртовник А. С. 7610
Гусаченко Г. М. 7623
Гутенмахер Л. И. 8447
Гюнтер Н. М. 7161 К

Д

Давыдов Н. А. 7457, 7483
Далецкий Ю. Л. 7850
Даниловская В. И. 7743
Дан Сун-ши 7425, 7426
Даубе Я. Я. 8403
Дезин А. А. 7687
Дектярев И. М. 7836
Денчев Р. 7667
Джавадов М. Г. 7755
Джафаров А. С. 7390, 7419
Джемс-Леви Г. Е. 8327, 8336
Джрбашян М. М. 7459, 7507
Дзядык В. К. 7410
Диамантопулос Ф. 8228
Добрышман Е. М. 7709
Довнорович В. И. 7726
Дороговцев А. Я. 7988
Дрейманас А. И. 8237
Дубковская А. Г. 8431
Дуйшеев Э. 7537, 7538
Дундученко Л. О. 7474
Дунин-Барковский И. В. 8133
Дынкин Е. Б. 7235, 7279

Е

Евграфов М. А. 7682
Ефимов А. В. 7411

Ж

Жаутыков О. А. 7614
Жемков Л. И. 7738
Жислин Г. М. 7770
Жотиков Г. И. 8245

З

Заботин Я. И. 7268
Заморзаев А. М. 8202
Зарубин В. С. 7734
Зверкин А. М. 7566
Зельдович Я. Б. 7744
Зламал М. 7668
Зморович В. А. 7428, 7469, 7470
Золотарев Г. Н. 7624

И

Ибрагимов И. И. 7421
Иваницкая В. П. 8191 К
Иванов А. В. 7672
Иванов В. В. 7461
Иванов В. К. 7526
Измайлов С. В. 8252
Илиев Л. 7436
Ильин В. П. 7391, 7392
Иманалиев М. 7571, 7762, 7765
Иноземцев О. И. 7394
Иорданский С. В. 7715, 7733
Итимацу 7514, 7515

К

Кабулов В. К. 7720
Казьмин Ю. А. 7450
Какичев В. А. 7517, 7518
Калашников А. С. 7697 Д
Калинина Т. Б. 8333
Каляев А. В. 7562, 8309
Каргин Д. И. 7147
Карпеев Г. А. 8109
Карпелевич Ф. И. 7280
Карташева А. Н. 8133
Касьянюк С. А. 7474
Кац И. С. 7572, 7864
Кемниц Ю. В. 8061
Ким Е. И. 7739
Кимура 7573
Кириллов Г. И. 8238
Кириллов Н. Е. 7963
Киселев О. М. 7536, 7545
Козаленко И. Н. 8000
Коган Б. И. 7723
Коларов Д. 8159
Колмогоров А. Н. 7922, 7957
Комарницкая О. И. 7701
Копп В. Г. 8162
Коробов Н. М. 8294
Коровкин П. П. 7422 К
Космаков А. В. 8312
Кострикин А. И. 7311
Костычев Г. И. 7542
Костюченко А. Г. 7645
Краплин М. А. 7431
Краснов М. Л. 7666
Красносельский М.А. 7848, 7884
Крейн М. Г. 7572
Крейнес М. А. 8337
Кривенков Ю. П. 7675
Кривошеин Л. Е. 8292
Крутой Б. Ф. 8062
Кудряшев Л. И. 7738
Кужель А. В. 7240
Кузовков Н. Т. 7829
Кузьмин Р. О. 7161 К

Куклес И. С. 7575
Курепа Г. 7401, 7402
Курош А. Г. 7148, 7223
Куршин Л. М. 7773
Кутукова Г. А. 8448
Куфарев П. П. 7460
Кухаренко П. Г. 8316
Кухта Г. П. 7673
Кэ Чжао 7193

Л

Лаврова Р. С. 8195
Лаврук Б. Р. 7690
Ладыженская О. А. 7625, 7634, 7644
Ладыженский Л. А. 7884
Лебедев Н. А. 7435
Лебедева Э. Н. 8083
Лебедкина Л. Г. 7707
Левин А. Ю. 7570
Левин Б. Я. 7492
Леонтович Е. А. 7580
Леонтьев А. Ф. 7501
Липатова Ф. А. 8324, 8325
Литвинчук Г. С. 7520
Ли Цзин-си 7408
Лопатинський Я. Б. 7688
Лось В. А. 8404
Лошак Ж. 7587
Лощинин В. С. 7578
Лушникова З. М. 7574
Люстерник Л. А. 8301

М

Макаров И. П. 7398 К
Максудов Ш. Т. 7824
Малышев Ю. В. 7579
Мамедов Р. Г. 7886, 7887
Мамедов Я. Д. 7756
Маневич В. А. 8197, 8200
Мао Шэн-сюй 8149 Д
Маравић М. 7548 К
Маркович Э. С. 7163 К
Марчук Г. И. 7748, 7749
Маслов В. П. 7863
Матыаш И. 8289
Мейман Н. Н. 7496, 7503
Меламед В. Б. 7877
Мельник И. М. 7489
Миёда И. 8389
Минковский В. Л. 7168 К
Минлос Р. А. 7939
Митропольский Ю. А. (Мітропольський Ю. О.) 7551, 7552
Митягина В. А. 8314
Михайлов В. П. 7693
Михайлов Г. А. 8372
Мищенко Е. Ф. 7704
Моисеев Н. Н. 7712
Молокович Ю. М. 8293
Монин А. С. 7745
Мотовиловець І. О. 7735
Муртазаев Д. 7626
Мусина С. С. 7763, 7764
Мухаммеджан Х. Х. 7272

Н

Назаров В. Н. 8161
Народецкий М. З. 7539
Нерсесян А. Б. 7459
Несмеянов А. 7125
Нефедьев Г. Н. 8284
Никитин А. К. 7708
Николаев П. В. 8331, 8339
Нисида 7941

О

Обрезков В. И. 8437
Обрешков Н. 7224 К
Онищик А. Л. 7281
Опейко Ф. А. 8209
Островский Г. М. 8288

П

Павлюк І. А. 7608
Панкратов А. Л. 7165 К
Панкратов С. А. 7590
Панов А. М. 7604
Паровиченко И. И. 7400
Пархоменко П. П. 7341
Пекелис А. С. 7290
Петрашень Г. И. 7716
Петров А. П. 8450
Петров В. В. 7919
Петров П. И. 8253
Пилика П. 7393
Плисс В. А. 7583
Плуме З. Я. 7681
Поваров Г. Н. 7343
Пономарев В. И. 7361—7363
Понтрягин Л. С. 7704
Попов Г. Я. 7722
Попов Е. П. 7700
Потапкин В. К. 7296
Пресняков П. Д. 8317
Прокопенко Л. Н. 7632
Проскуряков А. П. 7593
Прохоров А. И. 8449
Прохоров Ю. В. 7930
Прудковский Г. П. 8441
Пугачев В. С. 8064

Р

Раимов М. М. 8435
Раик А. Е. 7215
Раљевић Ш. 7815
Расулов М. Л. 7637, 7786, 7696 Д
Рахматулин Х. А. 7719
Регирер С. А. 7710
Ремизова М. П. 7476
Рехлицкий З. И. 7617
Рихтер В. 7921
Розанов Ю. А. 7973 Д
Ройтенберг Я. Н. 7609
Росницкий О. В. 8381
Рыкалин А. 7215
Рышков С. С. 7366
Рябинин И. А. 8435

С

Сазонов В. 7903
Сарымсаков Т. А. 7836, 7947
Сасаки Р. 8388, 8389
Свидзинский А. В. 7788
Свирский И. В. 7774
Сегал Б. И. 7928, 8352 К
Сейц И. 7925
Семендяев К. А. 7157 К, 8352 К
Семенов А. А. 8109
Серебрякова Н. Н. 7582
Серр 7331, 7379
Серых Г. М. 7740
Симеонов И. 7556
Симонов Р. А. 7145
Сиокос Ф. 8257
Сираждинов С. Х. 7932, 8077
Ситник Н. Х. 8436
Слободецкий Л. Н. 7661
Смирнов Л. В. 7132
Соболев С. Л. 7642
Соболевский П. Е. 7848
Соболь И. М. 7698
Соминский И. С. 7170 К
Ставровский А. С. 7713
Старжинский В. М. 7567, 7599
Стрешнева В. А. 8350
Субханкулов М. А. 7175
Судаков В. Н. 7893
Судзуки 8037
Суетин П. К. 7456
Сунь Мэй-шэн 7238
Сэкигути К. 8389
Сюй Чунь-фан 7137

Т

Табуева В. А. 7577
Такахаси Х. 8412
Талантова Н. В. 8236
Танияма 7295
Тевзадзе Г. П. 8230
Тетельбаум И. М. 8437
Тиновський А. А. 7531
Тирский Г. А. 7671
Тихонов А. Н. 7812
Тома В. 8368
Трифонов Н. П. 8451

У

Уздалев А. И. 7724
Уиддер Д. В. 7825 К
Ульянов П. Л. 7396
Усольцев С. А. 7736
Устволькая Т. И. 8318
Усубакунов Р. 7563
У Сюе-моу 7441
У Цун-синь 7842

Ф

Фадлеев Д. К. 7222, 7296
Федорова Н. А. 8328
Федорченко А. М. 7591
Филиппов П. В. 8207, 8208
Фирсакова О. С. 7494
Фихтенгольц Г. М. 7797 К
Фрей Т. 7453
Фрейдкин С. А. 7789
Фрейман Л. С. 8316
Фудзии А. 8390

Х

Хавин В. П. 7488
Хага 8157
Халфин Л. А. 8072
Харкевич А. А. (ред.) 8147 К
Харчева А. К. 7168 К
Харшиладзе Ф. И. 7172 К
Хасимото М. 8388, 8389
Хаяси Т. 7618 К
Хведелидзе Б. В. 7754
Хиршман И. И. 7825К
Хованский Г. С. 8323, 8335
Хоссу М. 7780
Хрусталев А. Ф. 7723

Ц

Цзоу Синь-ти 7486

Ч

Чалый А. Т. 8211 К
Челноков Н. И. 8437
Чепрасов В. А. 8327
Чепрасов В. П. 7546
Чечик В. А. 7553
Чжан Кай-мин 7478
Чинаев П. И. 7831
Чичкин Е. С. 7605
Чочиев Ф. З. 7638
Чэн Цзи-пэй 7801
Чэнь Цзин-жунь 7174
Чэнь Цзы-ци 7387

Ш

Шалаев С. В. 7540
Шепелевська Н. М. 7543
Шерман Д. И. 7535
Шидловский А. Б. 7181
Шимко Н. Г. 7674
Шмульян Ю. Л. 7888
Шрагин И. В. 7758, 7878 — 7880, 7883
Штраус А. В. 7865
Штыкан А. Б. 8311
Шульгин Д. Ф. 7544
Шум А. И. 8242

Щ

Щедрин Б. М. 8451

Ю

Юримяэ Э. И. 7810 Д
Ю Чжао-юн 7785

Я

Яголом А. М. 7957, 7967 К
Ямамото 8127

A

Aarts W. H. 8399
Abrham J. 8032
Ackoff R. L. 8047
Adams J. F. 7370
Adler G. 7650
Adler I. 7221 K
Ahrens J. 8273
Akashi H. 7699
Albertoni S. 7649
Aldebert H. et al. 7155 K
Al-Dhahir M. W. 8201
Aleksandrov A. D. 7133
Alexiewicz A. 7802, 7845
Alvarez Laso J. 7138
Amato V. 7262
Anderson R. D. 7360
Andersson B. J. 7826
Andree R. V. 7231 K
Andreotti A. 8221 K
Angheluță T. 7790
Ångström K. H. 7977
Anis A. A. 7916
Aoyama H. 7154
Arango H. 7342
Arya S. C. 7818, 7819
Auricoste J. 8428
Auslander L. 7368
Ayuso A. 7142

B

Babbar M. 8038
Bacchiani R. 8410
Bade W. G. 7892
Bailin L. L. 8297
Baldacci R. F. 7772
Baldassarri M. 8203 K
Ballantine J. P. 8308
Balogh T. 8134
Banaschewski B. 7403
Banerjee D. P. 7914, 7982
Barbiljan D. 7300
Barrett J. H. 7602
Barrett L. L. 8251 K
Barros Sierra J. 7796 K
Barsotti L. 7807
Bartsch W. 7158 K
Battek J. 8139
Battin R.-H. 7972 K
Bauer H. 7858
Bear H. S. 7857
Beaumont R. A. 7318
Becchère M. de 8445
Bedrosian E. 8067
Beesack P. R. 7725
Behne N. J. 8430
Beizer B. 7333, 7334
Bellman R. 7568, 7768, 7844
Berge C. 7348
Bergman S. 7658—7660
Bermant A. F. 7795 K
Bernstein A. 8367
Berruti Onesti N. 7621
Bers L. 7691, 7692, 7752K
Berstein I. 7529
Bertolini F. 7382
Bessaga C. 7838
Bhatt N. 7409
Bhattacharyya P. K. 8001
Bickley W. G. 8347 K
Bilinski S. 8222
Birch B. J. 7200
Blackwell D. 8024
Blanchard R. 8176, 8183
Blanc-Lapierre A. 8144 K
Blaser A. 7596
Blažek M. 7771
Bleksley A. E. H. 8418
Blum M. 8110
Bobeck A. H. 8377
Bock R. D. 7991
Boehm E. M. 8363
Boggio T. 7683
Boigelot A. 7652
Bojadžiev G. 7612
Boldt I. V., Jr 8366
Boldyreff A. W. 8050
Bolt B. 7196
Bolt R. L. 8179 K
Bonfiglioli L. 8160
Boot W. J. 8108
Booton R. C., Jr 8111
Borenius G. 7978
Borwein D. 7805
Bott R. 7282
Bowcock J. 7899
Boyd A. V. 7805, 7911
Brainerd B. 7309
Bratman H. 8366
Brauer R. 7261, 7264, 7274
Breuer K. H. 7479
Bronstein I. N. 7157 K
Browkin J. 7176
Brown M. 8041
Brož R. 8045
Bruck H. 8440
Bruijn N. G. de 7794 K
Brunk H. 7385
Brzoska F. 7158 K
Buck R. C. 7839, 7855
Buicliu G. 8174
Burau W. 8279
Bürger 8398
Burks A. W. 7332
Burr E. J. 8054
Busemann H. 8274
Bushaw D. 7702
Buzano P. 8017

C

Cagnac G. 7258 K
Cahen G. 7257 K
Campbell L. L. 8360
Cardot C. 7340
Carlitz L. 7208
Carlson P. G. 7984
Carvalho O. de 7997
Casal P. 8144 K
Castañs Camargo M. 8058—8060
Castoldi L. 7917
Cattaneo Gasparini I. 8264
Čech E. 7381 K
Cederbaum I. 7250
Ceolin C. 8260
Chamrád V. 8429
Chang S. S. L. 7960
Chang Kai-ming 7478
Charles J. 7954
Chen Ching-jun 7174
Chen Tzi-chi 7387
Chern Shiing-shen 8287
Chevalier A. 8355 K
Chevalley C. 7378
Choquet G. 7360
Chou Hsin-ti 7486
Chow Wei-Liang 7380
Christie L. S. 8084
Chu J. T. 7980
Ciliberto C. 7670
Cîmpan F. T. 8188
Clatworthy W. H. 8008
Close G. C. 8434
Clunie J. 7424
Cluzel R. 8355 K
Cohen E. 7201
Cohen H. 7871
Cohn P. M. 7312
Colautti M. P. 7601
Coleman C. de W. 8351
Colerus E. 8153 K
Collins H. S. 7871
Colombo G. 7586
Comét S. 7275
Conforto F. 8221 K
Connell I. G. 7211
Conner P. E. 7375, 7376
Conrad P. 7284
Cooke K. L. 7568
Corduneanu C. 7616
Corrádi K. 7434
Costa N. C. A. da 7205, 7206
Cottrell P. J. W. 8117
Cowling V. F. 7481
Coz M. 8283
Cramér H. 7971 K
Creangă I. 8224
Cristescu R. 7897
Crum M. M. 7445, 7446
Csébfalvi K. 7554
Cugiani M. 7182, 7183
Cukiert J. 7800
Čulík K. 7345—7347
Cundy H. M. 8182

D

Daboni L. 7907
Dantzig D. van 7714
Dantzig G. 8028
Das A. 8158
Davies O. L. 8007
Davis R. M. 7677
Davite A. 7335
Dawson D. F. 7808
Deaux R. 8183
Dedebant G. 7950
De Floriani W. 8042
Degosang O. 8151
Delsarte J. 7628
Dernoncourt P. 8422
Diener H. C. 8430
DiGri V. J. 8364
Dionísio J. J. 7245
Dixon W. J. 8012 K
Dobrescu A. 8226
Dolbeault P. 8266
Doob J.-L. 7528, 7530
Draper C. S. 8320
Dresner L. 8101
Duffin R. J. 8299
Dugué D. 7386, 7923
Dun van F. J. 8007
Dupas R. 8205
Durran J. H. 7209

E

Edwards R. E. 7521
Effertz F. H. 7479
Egydio P. 7997
Eicker F. 7647
Elias P. 7961
Epstein B. 7462
Epstein M. A. 7958
Erbe J. 8430
Erdős P. 7202, 7236, 7433, 7440
Erwe F. 7482
Escuder P. 7828
Esseen C. G. 7924
Eves H. 8165
Ewing G. M. 7385

F

Fabián V. 8004
Farahat H. K. 7314
Faure R. 7597
Feit W. 7261
Fekete M. 7451, 7452
Felix M. 8106
Feller E. H. 7306
Felscher W. 7329
Fend A. V. 7985
Ferlan N. M. 7437
Féron R. 7904
Fettis H. E. 8291
Ficken F. A. 7837
Fielder D. C. 8302
Findlay G. D. 7307, 7308
Finston M. 8320
Finzi B. 7798 K
Fisz M. 8010 K
Fleischer I. 7323
Fleming W. H. 7383
Flett T. M. 7466, 7499, 7806
Flood M. 8029
Flor P. 7187
Florin F. 8186
Floyd E. E. 7376
Foias C. 7867
Forscher F. 8091
Foster A. L. 7330
Foster C. 8023
Foulkes H. O. 7277
Fox L. 8358 K
Franckx E. 7955
Fréchet M. 7905, 7935, 7993
Freud G. 7420
Friedman A. 7689
Froda A. 7225 K
Frolík Z. 7353
Fuglede B. 7895
Fulkerson R. 8028
Fuller G. 8181 K
Funato M. 7585

G

Gál I. S. 7841
Gale D. 8015
Gallego-Diaz J. 8184
Gani J. 8126
Gantmacher F. R. 7256 K
Garnir H. G. 7652
Gass S. I. 8027
Gatti S. 7976
Gaudiot P. 7229 K
Gaumer J. 8408
Gazzano A. 8343 K
Gęba K. 7856
Gelbaum B. R. 8021
Gendreau G. 8440
Gentile G. 7195
Georgiew G. 7191
Getoor R. K. 7945
Geymonat L. 7141
Ghermănesco M. 7753
Ghizzetti A. 7598
Gillies D. B. 8019
Girault M. 8146 K
Glicksberg I. 7872, 7875
Gloden A. 7139
Gołąb S. 7792
Golay M. J. E. 7959
Gold L. 7913
Goldie A. W. 7305
Golomb S. W. 7210
Gonshor H. 7319
Gonzalez del Valle A. 8400
Goormaghtigh R. 7203
Górski J. 7230 K
Götz W. 7173 K
Green J. A. 7260, 7276, 7291
Green L. W. 8262
Greenwald I. D. 8362
Greguš M. 7564
Greiff Bravo L. 7244
Grenander U. 8103
Grensted P. E. W. 7600
Griffin J. S., Jr 8185

Gröbner W. 8221 K
Grosjean P.-V. 8135
Gross O. 8015
Guggenheimer H. 8220
Gupta A. S. 7711
Gyenge A. M. 8123

H

Haag R. 7898, 7900 K
Habetha K. 7695 Д
Hadley G. F. 8034
Haight F. 8080
Haim I. 7828
Hájek J. 7243, 7952
Hajnal A. 7143
Haley K. B. 8036
Hallerberg A. E. 8172
Hallert B. 8104
Halmos P. R. 7327
Halperin I. 7395
Hamaker H. C. 8007
Hamilton D. J. 8385
Hanani H. 8199
Hansen R. C. 8297
Harary F. 7344
Harbarth K. 7350
Harris B. 7981, 8049
Hartman P. 7639, 7648
Hartmanis J. 7325, 7326
Harvey T. J. 7592
Hashimoto J. 8272
Hasse H. 7232 K
Hauptschein A. 8049
Hayashi C. 8093
Hayman W. K. 7508
Heaps H. S. 8066
Heins M. 7510
Hejtmanek J. 8154 Д
Heller I. 8030, 8031
Helson H. 7854
Henriksen M. 7843
Herd G. R. 8120
Herdan G. 8074
Hermes H. 7965
Herrmann O. 7293
Hersch J. 8290
Higman G. 7314
Hirasawa Y. 7654
Hirschman I. I., Jr 7821
Hoering W. 7337
Hoffmann W. 8424
Hoffsaes 8374
Hoheisel G. 7505
Hohn F. E. 7255 K
Holberg K. 8394
Homer J. B. 7783
Homma T. 8081
Hornfeck B. 7179
Hornich H. 7640
Horninger H. 8227
Horváth J. 7641
Hosszú M. 7781
Hotelling H. 7980
Howell J. R. 8300
Hsu L. C. 7412
Huber A. 8375
Hunter J. A. H. 7192
Hussain Q. M. 8270
Hýbl J. 8056

I

Ignaczak J. 7731
Igusa J. I. 7380
Ionescu D. V. 8164
Isaacs A. T. 8066
Isbell J. R. 7359, 8277
Iséki K. 7317
Ishihara S. 8267
Ishii G. 7995
Itô K. 7940
Iwano M. 7559

J

Jacobsthal E. 7207
Jain P. C. 7746
James I. M. 7373
Jans J. P. 7310
Jehne W. 7301
Jenkins J. L. 8121
Jensen A. 8088
Jiřina M. 7942
Johnson G. P. 7853
Johnson S. 8028
Julia G. 7149

K

Kadison R. V. 7869
Kahane J.-P. 7854
Kakehashi T. 7464
Kalman J. A. 7324
Kampen N. G. van 7747
Kan D. M. 7369
Kane M. 8362
Kanno K. 7415
Kaplan E. L. 7996
Karplus W. J. 8439
Karube T. 7283
Katětov M. 7381 K
Katznelson Y. 7854
Kaufmann A. 8125
Kawakita Y. 8037
Kemeny J. G. 7931
Kemperman J. H. 7994
Kempthorne O. 8148 K
Kertész A. 7322
Khinchin A. Ia. 7968 K
Kiefer J. 7986
Kielland-Torkildsen N. 8115
Kiessler F. 8344 K
Kimura T. 7560
King J. E. 8364
Kitagawa T. 7956
Klein M. 8130
Klemola T. 8233
Knödel W. 8342
Kobayashi S. 8246
Ko Chao 7193
Koitzsch R. 8356 K
Kolchin E. R. 7297
Kometani E. 8087
Konorski B. 8345 K
Könyves Tóth K. 7151
Koopman B. O. 8057
Koosis P. 7454, 7455, 7485
Korach M. 8116
Kořínek V. 7270
Körmendi I. 7259 K
Kowalski Z. 7603
Krabbe G. L. 7860
Kraewinkels J. J. E. 7793 K
Kramer W. 8212 K
Krasner M. M. 7298
Krause C. A. 8397
Kremer H. F. 8187
Kreyszig E. 7635, 7636, 7657, 7680, 8308
Kruskal W. H. 7144
Krysicki W. 8004, 8345 K
Krzyż J. 7475
Kuczma M. 7791
Kudlick W. 8419
Kuipers L. 7813
Kuo H. L. 7750
Kurepa G. 7401, 7402
Kurepa S. 7873
Kustaanheimo P. 8275, 8276
Kwo T. T. 8052

L

Labra y Fernández M. 8166, 8167
Lambacher T. 7173 K
Lambek J. 7307—7309
Lambert L. 8313
Lamperti J. 7906
Landsberg M. 7351
Lange A. S. 8156
Langenhop C. E. 7588
Langer R. E. (Ed.) 8348 K
Laning J. H. 7972 K
Lax P. D. 7620
Lay E. J. S. 7160 K
Leapunov A. A. 7130
Lee Ching-hsi 7408
Leeuw K. de 7875
Lefschetz S. 7576
Legendre R. 7509
Lehman S. 7768
Lehmann H. 7234 K
Lehmann S. 8438
Lehmer D. H. 7178
Leibholz S. W. 7333, 7334
Leichtweiss K. 8282
Lekkerkerker C. G. 7189, 7458
Lemmon W. W. 8261 K
Lenoir M. 8255
Lense J. 7811
Leondes C. T. 7703
Lermer A. S. 8340
Levelt A. H. M. 7458
Lévy P. 7936
Levy S. 7699
Lewandowski Z. 7463
Lewis J. P. 7159 K
Lichnerowicz A. 8265
Lions J. L. 7628
Littlewood J. E 7595
Lloyd S. P. 8065
Loeffel H. 7974 D
Loève M. 7920
Loewner C. 8243
Loonstra F. 7227 K
Lowe R. R. 8397
Lubin C. I. 8163
Lugowski H. 7226 K
Łukaszewicz J. 8138
Lumer G. 7849, 8281
Lundh Y. 8394
Luzzatto G. 7900 K

M

McAnulty J. C. 8046
MacCamy R. C. 7653
McCarthy C. A. 7851, 7852
McCarthy M. D. 8124
McFarland B. L. 7737
Machado E. A. M. 7950
McKay J. H. 7263
McKelvey R. 7557
MacKenzie R. E. 7368
McMillan B. 8065
McWhorter A. L. 8379
Machado E. A. M. 7950
Madsen Barbosa R. 8168
Maebashi T. 8248
Maeda S. 7889
Magnus K. 7705
Maher J. E. 8102
Mahler K. 7188
Mahrenholtz O. 8295
Malcolm D. G. 8055
Malý V. 8094
Mandelbrot B. 8095
Mangoldt H. von 7162 K
Mansfield E. 8053
Manteuffel K. 7254 K, 8193 K
Maradudin A. 8305
Maravall Casesnoves D. 7918, 8150
Marchionna E. 8215
Mariot L. 7901 K
Marquet S. 8098, 8099
Martin H. 8129
Martinelli E. 8269
Maserick P. H. 8271
Mason F. P. 8414
Mason H. F. 8444
Massey F. J., Jr 8012 K
Masson M. 8413
Masuyama M. 8280
Mathews P. M. 7943
Măties I. 8346 K
Matsusaka T. 8219
Mattuck A. 8218
Matyáš J. 8395
Maury G. 7288
Medina e Isabel M. 8060
Medgyessy P. 7964
Meier P. 7996
Meisling T. 8085
Meister E. 7541
Mejía Ramirez J. 8189
Melzak Z. A. 7615
Mercer A. 8063
Merli L. 7627
Meyers L. F. 7212
Mibu Y. 7881
Michalup E. 8304
Mientka W. E. 7732
Mihăilescu T. 8232
Mikhail F. I. 8259
Mikałajska Z. 7589
Mikusiński J. 7439
Miller J. B. 7823
Mills B. D., Jr 8411
Miranda C. 7655
Mirsky L. 7251
Mitchell J. 7522
Miyadera I. 7874
Mizumoto H. 7477
Mlak W. 7613
Mocanu P. T. 7468
Mock A. J. 8171
Mock O. 8365
Mode C. J. 8140
Mogyoródi J. 8096
Moisil C. 7533
Moisil G. C. 7694 K
Montel P. 7429
Montgomery D. 7377
Moor A. 8247
Moorhead W. G. 8426
Moppert C. F. 7532
Mora Mas F.-J. 8107
Mordell L. J. 7198, 7423
Morgenstern D. 7656
Moriguti S. 8076
Morimoto H. 7611
Moroney M. J. 8137
Morra F. 7798 K
Morris G. R. 7594
Morse M. 7835
Moshan B. 7197
Mostowski A. 7228 K
Mott J. 7248
Mourier E. 7902
Mrówka S. 7354
Mullin A. A. 7778
Murphy B. 8401
Mycielski J. 7404, 7405

N

Nadolschi V. 8131
Nagai T. 8240
Nagano T. 7374, 8234
Nagata M. 7303, 8214
Naines J. B., Jr 8046
Nakanishi S. 7389
Nakazawa T. 7775
Nathan A. 8402
Negoescu N. C. 7240

Nerode A. 7328
Netherwood D. B. 8423
Newman M. 7186
Niče V. 8198
Nicolescu M. 7527
Nirenberg L. 7691, 7692
Nisihira S. 8128
Nitsche J. C. 7646
Noble B. 7769
Nolfi P. 7969
Novák J. 7381 K
Nowacki W. 7729, 7730, 7731

O

Oblonsky J. 8370
Odaka K. 8128
Ogilvy C. S. 7782
Olsson P. O. M. 7816
O'Neill B. 7364
Onicescu O. 8092
Onoyama T. 7951
Orden A. 8033
Orthner R. 7134 K
Osborn H. A. 7246
Ostrowski A. M. 7247

P

Pachale H. 7882
Pa Chen-kuo 8239
Page E. S. 8113
Pailloux H. 8250 K
Panerai T. 7164 K
Panis Y. 8428
Papapetrou A. 8254
Papoulis A. 7833
Parameswaran M. R. 7803
Passaquindici M. 7252
Páter Z. 7269
Patterson H. 7987
Pauc C. Y. 7384
Paula e Silva P. R. 8155
Payne L. E. 7662
Pehrson C. R. 8036
Pełczyński A. 7838
Perfinkova V. Ckova D. 7555
Peremans W. 7271
Perkal J. 7992
Pestel E. 8295
Peterson N. M. 8079
Peterson T. S. 7233 K
Petersson H. 7513
Pfanzagl J. 8142
Pham T. H. 8256
Phillips H. B. 7171 K
Phillips R. S. 7862
Pickert G. 8180 K
Pierce J. R. 7827
Pillai K. C. S. 7979
Piranian G. 7440, 7484
Plainevaux J. E. 8319
Plans A. 7861
Pless V. 7320
Pocholle G. 8100
Poffe N. 8446
Pogorzelski W. 7490, 7760
Potthoff G. 7336
Prabhu N. U. 8126
Prijatelj N. 7352
Pryde J. 8353 K

R

Rabenstein A. L. 7558
Rahman Q. I. 7427, 7502
Rainwater J. 7355
Raith F. 8190
Rajchman J. A. 8376
Rajewski M. 7832
Ramabhadran G. N. 8069
Ramakrishnan A. 7943
Rapoport A. 8022, 8023, 8075
Ravasz L. 8123
Redheffer R. M. 7447
Rediker R. H. 8379
Rees D. 7304
Régnier A. 7938
Reichmann W. J. 7220
Reid E. B. 8444
Reinhart B. L. 8268
Remillard W. J. 8406
Rényi A. 7236, 7433
Reutter F. 8330
Reynolds W. F. 7264
Riauba B. 7908
Ribarič M. 7822
Ribenboim P. 7285
Richter H. 7970 K
Ricossa S. 8048
Ridder J. 7150
Riffenburgh R. H. 8322
Rigrod W. W. 7827
Robert G. 8114
Roberts J. B. 7438
Roberts M. de V. 8367
Robinson F. N. H. 8068
Rocha Pitta H. da 8249
Rodeja F. E. G. 7194
Rolewicz S. 7838
Romanowski S. 7166 K, 7167 K
Rosati M. 7511, 7512, 8221K
Roşcău H. 7430
Rosenberg A. 7321
Rosenblatt M. 7946, 7966 K, 7999
Rosenblum M. 7849
Ross D. C. 8392
Rosser J. B. 7787
Rothe E. H. 7767
Rothe R. 7169 K
Roux D. 7432
Roy S. N. 8013 K
Royster W. C. 7480
Rozen R. 7286
Rudin W. 7854
Ruscior S. 8223
Russell H. G. 7442
Rüssmann H. 7606
Rutishauser R. W. 8257
Rybarz J. 7933
Rymer T. B. 8380

S

Sachs H. 7190
Sade A. 7287
Saito K. 7998
Sakaguchi K. 7467
Sakakura E. 8225
Sakino S. 8093
Salah Elmaghraby E. 8026
Salié H. 7814
Sampei Y. 7399
Samson P. 7979
Sancho de San Roman J. 7299, 8285
Sandauer J. 8119
Sansone G. 7547 K
Santaló L. A. 7784, 8286
Santos J. 7342
Sasayama H. 7859, 8152
Sbrana F. 7669
Schaffer W. 8409
Schiffer M. M. 7659
Schinzel A. 7792
Schmidt T. W. 8299
Schneider H. 7248
Schneider T. 7218 K
Schoenberg I. J. 7462
Scholten C. S. 8382
Schraivogel R. A. 8332
Schumann J. 8044
Schwartz J. T. 7896
Schwartz L. S. 8049
Schwarz H. R. 7249
Schweizer W. 7173 K
Sedlák J. 8334
Seeliger O. 8354 K
Seifert G. 7588
Semadeni Z. 7845, 7856
Semendjajew K. A. 7157 K
Serre J.-P. 7331, 7379
Shankar H. 7497
Shapley L. S. 8020
Shekoury R. N. 8201
Shell D. L. 8361
Shenton J. 8040
Sherman S. 7912
Shieh Hui-chun 7500
Shimoda I. 7534
Sibagaki W. 8357 K
Siegel S. 8009 K
Sierpiński W. 7214
Simaika J. B. 7910
Simboan G. 7891
Simionescu G. D. 8177, 8194, 8196
Simon H. A. 7975
Simonelli I. 8216
Simonnard M. A. 8034
Simpson H. R. 8141
Singer I. 7846, 7869
Sirotti V. 8043
Sispánov S. 8315
Skertchly A. R. B. 8118
Skof F. 7437
Slessenger W. W. O. 7776
Smith C. L. 7703
Smith C. S. 8063
Smith R. B. 8298
Snyder C. L. 8383
Söhngen H. 7541
Sørensen N. A. 8073
Soresini F. 8415
Soubies—Camy H. 7338, 7339
Soulé J. L. 8112
Spampinato N. 7241, 8192 K, 8278
Sprott D. A. 7265
Srinivasan N. S. 7213
Stähli F. 7234 K
Stammberger A. 8329
Stanton L. S. 8444
Stanton R. G. 7265
Stark M. 7228 K
Steel T. B., Jr 8363
Steinberg J. 7820
Steinecke V. 8105
Steinhaus H. 7909, 8004
Sterzer F. 8405
Stetter H. J. 7665
Stigant S. A. 7253 K
Stocker W. M., Jr 8432
Stojaković M. 7239
Stone A. H. 7357
Strachey C. 7242
Straus E. G. 7364
Strotz R. H. 8046
Stubblety A. J. 8122
Stubenrecht A. 8133
Subba Rao K. 7199
Subba Rao M. V. 7493
Su Buchin 8229
Sucheston L. 7929
Sudan G. 7219 K
Supino G. 7679
Suzuki M. 7274, 8037
Suzuki N. 7868
Suzuki Y. 8002
Švec A. 8244
Świerczkowski S. 7405
Swift C. J. 8365
Szabó I. 7169 K
Szász P. 7406
Sz.-Nagy B. 7867

T

Taguti G. 8006
Takács L. 8136
Takahashi S. 7388
Takano K. 7934
Takeda K. 7414
Takei K. 8306, 8307
Taketa K. 7267
Tanaka C. 7487, 7506
Tasnády I. 7259 K
Täuber I. 8169
Temple G. 8347 K
Theodorescu R. 7948, 7949
Thompson D. M. 8025
Thompson G. L. 8025
Thouzeau G. 8112
Thyssen M. 7643
Tillmann H. G. 7876
Title R. S. 8377
Todd J. 8303
Todt H. 8044
Tomas Noguera J. 8175
Tornehave H. 7495
Tortrat A. 8144 K
Toyoda T. 8260
Transue W. 7835
Treder H. 8254
Trees R. E. 8351
Tricomi F. G. 7140, 7799 K
Trotter H. F. 7926,
Truksa L. 8143
Trybuła S. 7909, 7915 8078
Tsurumi S. 7944

U

Uchiyama S. 7779
Ueno S. 8097
Uhlmann A. 8263
Urbanik K. 7894
Usai G. 8178
Utz W. R. 7385

V

Vacca M. T. 7676
Vaccaro M. 7349
Vandenplas P. 7954
Van der Waerden B. L. 8011 K
Vandiver H. S. 7217 K
Vaona G. 8231
Vázquez Garcia R. 7796 K
Veen B. 8005
Vessereau A. 7927
Villamayor O. E. 7313
Villardino R. M. 8170
Villari G. 7607
Vogel W. O. 8241
Vranič V. 8014 K
Vries H. de 7356
Vuorio V. 7237
Vyšín J. 8204 K

W

Wagner H. M. 8039
Wait J. R. 7732
Walecka D. 7899
Wall D. W. 7315, 7316
Wall G. E. 7274

Wallace E. W. 7216
Walsh J. E. 7989, 8016, 8051
Walsh J. L. 7442 – 7444, 7451, 7452
Wang Hao 7332
Wang Shiang-haw 7292
Watson G. L. 7184
Watts C. E. 7367
Weaver M. W. 7217 K
Wein H. H. 8053
Weinberger H. F. 7662
Weinert H. 7226 K
Weiss G. H. 8305
Weiss L. 7990
West M. L. 8173
Weston J. D. 7358
White H. 8084
Wiener N. 8145 K
Wiesner J. B. 7131
Wijdenes P. 8359 K
Williams K. B. 8036
Williams R. H. 8442
Wilson A. 7504
Wintner A. 7639, 7648
Wishart D. M. G. 8082
Włodarski L. 7804
Wolfowitz J. 7986
Wozencraft J. 7962
Wright E. 7196
Wrona W. 7166 K, 7167 K
Wuyts P. 7817

Y

Yaglom A. M. 7957, 7967 K
Yaglom I. M. 7967 K
Yano K. 7407
Yoshinaga K. 7840
Young P. L. 8420

Z

Zacher G. 7266
Zagustin A. 8349 K
Zaidman S. 7786
Zariski O. 8213, 8217
Zeckendorf E. 7185
Zelinsky D. 7321
Zemanian A. H. 7498
Zimmermann W. 7751
Zítek F. 7937
Zorski H. 7727, 7728
Zuber R. 8310
Zulauf A. 7777
Zurmühl R. 8296

Технический редактор *Г. А. Шевченко.*